

一类具有时滞的 Leslie-Gower 捕食-食饵模型的 Hopf 分支

袁海龙, 樊雨, 李一多

(陕西科技大学 数学与数据科学学院, 西安 710021)

摘要: 利用 Hopf 分支理论, 研究一类具有时滞的 Leslie-Gower 捕食-食饵模型. 首先, 以时滞为分支参数, 讨论该模型正平衡点的稳定性和 Hopf 分支的存在性; 其次, 根据偏泛函微分方程的规范型理论和中心流形定理, 确定 Hopf 分支的分支方向和分支周期解的稳定性; 最后, 利用 MATLAB 进行数值模拟.

关键词: 时滞; Leslie-Gower 模型; Hopf 分支; 稳定性

中图分类号: O175.12 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)04-0821-10

Hopf Bifurcation of a Class of Leslie-Gower Predator-Prey Models with Time Delay

YUAN Hailong, FAN Yu, LI Yiduo

(School of Mathematics & Data Science, Shaanxi University of Science & Technology, Xi'an 710021, China)

Abstract: Using the Hopf bifurcation theory, we studied a class of Leslie-Gower predator-prey models with time delay. Firstly, taking time delay as the bifurcation parameter, we discussed the stability of the positive equilibrium point of the model and the existence of Hopf bifurcation. Secondly, according to the normal form theory and center manifold theorem for partial differential equation, we derived the direction of Hopf bifurcation and the stability of bifurcation periodic solutions. Finally, we used MATLAB for numerical simulations.

Keywords: time delay; Leslie-Gower model; Hopf bifurcation; stability

0 引言

捕食-食饵关系是自然界种群之间最重要和最广泛的基本关系之一, 种群模型在研究外来物种入侵、流行疾病传播以及自催化化学反应等方面都具有重要作用. 目前, 对捕食-食饵关系模型的研究已取得了丰富的成果^[1-5]. 考虑到 Leslie-Gower 捕食-食饵模型中食饵的生长速率可能具有 Allee 效应, Ni 等^[6]研究了如下捕食-食饵模型:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(1-u)\left(\frac{u}{b} - 1\right) - \beta uv, & t > 0, \\ \frac{dv}{dt} = \mu v\left(1 - \frac{v}{u}\right), & t > 0, \\ u(0) = u_0 > 0, \quad v(0) = v_0 > 0, \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2023-09-05.

第一作者简介: 袁海龙(1989—), 男, 汉族, 博士, 讲师, 从事反应扩散方程及其应用的研究, E-mail: yuanhailong@sust.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11901370)、陕西省自然科学基金基础研究计划项目(批准号: 2019JQ-516)、陕西省教育厅专项科研计划项目(批准号: 19JK0142)和陕西省科协人才托举项目(批准号: 20200508).

其中 u 和 v 分别表示食饵和捕食者的种群密度, $b \in (0, 1)$ 为 Allee 效应的阈值, 初始值 u_0 和 v_0 为非负连续函数, 参数 β 和 μ 均为正常数. 对于系统(1), Ni 等^[6]主要讨论了当系统只有一个正平衡点时, 正平衡点的稳定流形和不稳定流形.

由于种群具有成熟期, 当前的种群数量会依赖于过去某一时刻的种群状态. 因此考虑时滞影响可更准确地描述系统的动力学特性. 时滞效应在自然界中普遍存在, 时滞微分方程的稳定性及其分支问题也备受关注. 例如: Yang 等^[7]考虑一类具有恒定猎物避难所和时滞的捕食-食饵系统, 研究了其正平衡点的局部稳定性和图灵不稳定性, 证明了时滞对系统的影响, 得到了 Hopf 分支的存在性并确定了 Hopf 分支的性质, 同时做出了数值模拟; Chen 等^[8]考虑一个具有齐次 Neumann 边界条件的时滞扩散 Leslie-Gower 捕食-食饵系统, 通过分析特征方程, 研究了其共存平衡点的稳定性和不稳定性以及相关的 Hopf 分支, 利用上下解方法, 给出了其共存平衡点全局渐近稳定的参数充分条件; Du 等^[9]考虑具有双时滞和扩散的修正 Leslie-Gower 捕食-食饵模型, 研究了其正平衡点的稳定性以及 Hopf、双 Hopf 分支的存在性, 并给出了双 Hopf 分支点附近中心流形上的正规形式及临界点附近的展开, 还得到了双 Hopf 分支点附近的复杂动力学行为. 常笑源等^[10]在系统(1)的基础上, 考虑如下捕食-食饵系统:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) (u - m) - qv, & t > 0, \\ \frac{dv}{dt} = sv \left(1 - \frac{v(t-\tau)}{u(t-\tau)}\right), & t > 0, \\ u(\theta) = \phi_1(\theta), \quad v(\theta) = \phi_2(\theta), & \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (2)$$

其中时滞 τ 表示捕食者的成熟期, K 为食饵的最大环境容纳量, r 和 s 分别为食饵和捕食者的自然增长率, q 表示食饵人均减少率的最大值, $m \in (0, 1)$ 为 Allee 效应的阈值. 对于系统(2), 文献^[10]给出了其非负平衡点的存在性和稳定性, 并以时滞 τ 作为分支参数证明了在正平衡点附近产生 Hopf 分支.

基于以上研究, 本文考虑食饵的成熟期对捕食者种群密度的影响, 在系统(1)中对捕食者方程引入时滞, 同时考虑其包含齐次 Neumann 边界条件的反应扩散系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = u(1-u) \left(\frac{u}{b} - 1\right) - \beta uv, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = \mu v \left(1 - \frac{v}{u(t-\tau)}\right), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) > 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0 (\text{不恒为 } 0), & x \in \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (3)$$

其中 d_1 和 d_2 分别对应食饵和捕食者的扩散系数, Δ 为 Laplace 算子, $\Omega \in \mathbb{R}^N$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开集, ν 为边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量. 为书写方便, 做无量纲变换, 令

$$\tilde{t} = \frac{t}{b}, \quad m = b, \quad q = b\beta, \quad s = \mu,$$

仍用 t 表示 \tilde{t} , 在空间域 $\Omega \in [0, l\pi]$ 考虑系统(3), 且 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $l \in \mathbb{R}^+$, 从而系统(3)可化为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u(1-u)(u-m) - qv, & x \in (0, l\pi), \quad t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = sv \left(1 - \frac{v}{u(t-\tau)}\right), & x \in (0, l\pi), \quad t > 0, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0, & x = 0, l\pi, \quad t > 0, \\ u(x, t) = u_0(x, t) > 0, \quad v(x, t) = v_0(x, t) \geq 0 (\text{不恒为 } 0), & x \in [0, l\pi], \quad t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (4)$$

本文研究时滞效应在偏微分系统中对正平衡点产生的影响, 并分析正平衡点的稳定性和 Hopf 分支的存在性, 给出判断 Hopf 分支的分支方向和分支周期解稳定性的表达式. 结果表明: 当时滞参数小于某一临界值时, 正平衡点的稳定性不发生改变; 当时滞参数增大且经过某一临界值时, 会改变正

平衡点的稳定性, 系统在正平衡点附近会发生振荡并产生 Hopf 分支. 用 \mathbb{N} 和 \mathbb{R}^+ 分别表示非负整数集和正实数集.

1 平衡点的稳定性和 Hopf 分支的存在性

考虑具有时滞参数的偏微分系统(4), 根据计算及文献[10]可知:

- 1) 系统(4)存在两个边界平衡点 $E_0(1, 0)$ 和 $E_m(m, 0)$;
- 2) 当 $0 < q < (1 - \sqrt{m})^2$ 时, 系统(4)存在两个正平衡点 $E_1(u^*, v^*)$ 和 $E_2(\tilde{u}, \tilde{v})$, 其中

$$u^* = v^* = \frac{(1 + m - q) + \sqrt{(1 + m - q)^2 - 4m}}{2},$$

$$\tilde{u} = \tilde{v} = \frac{(1 + m - q) - \sqrt{(1 + m - q)^2 - 4m}}{2};$$

- 3) 当 $q = (1 - \sqrt{m})^2$ 时, 系统(4)存在唯一一个正平衡点 $E_3(\sqrt{m}, \sqrt{m})$;
- 4) 当 $q > (1 - \sqrt{m})^2$ 时, 系统(4)不存在正平衡点.

由于当 $0 < q < (1 - \sqrt{m})^2$ 时, 正平衡点 $E_2(\tilde{u}, \tilde{v})$ 是不稳定的, 因此本文首先讨论当 $0 < q < (1 - \sqrt{m})^2$ 时系统(4)正平衡点 $E_1(u^*, v^*)$ 的稳定性及 Hopf 分支. 当 $\tau = 0$ 时, 满足条件 $0 < q < (1 - \sqrt{m})^2$, $s > s^* = -2u^{*2} + (m + 1)u^*$, 且 $u^* \in \left(\frac{m+1}{2}, 1\right)$, 其中 $0 < m < 1$, 则 $E_1(u^*, v^*)$ 是局部渐近稳定的. 然后分析当 $\tau \neq 0$ 时, 对系统(4)的正平衡点 $E_1(u^*, v^*)$ 的影响, 若 $\tau \in [0, \tau_0^0)$, 则系统(4)的正平衡点 $E_1(u^*, v^*)$ 是局部渐近稳定的; 若 $\tau = \tau_n^j$, $j \in \mathbb{N}$, 则存在 n 使系统(4)在正平衡点 $E_1(u^*, v^*)$ 处产生 Hopf 分支; 若 $\tau > \tau_0^0$, 则系统(4)的正平衡点 $E_1(u^*, v^*)$ 是不稳定的.

定义 $X = C([0, l\pi], \mathbb{R}^2)$, 在系统(4)中令 $\hat{u} = u - u^*$, $\hat{v} = v - v^*$, 仍用 u, v 表示 \hat{u}, \hat{v} , 则其在抽象空间 $C([-\tau, 0], X)$ 中具有如下形式的抽象泛函微分方程:

$$\frac{dU(t)}{dt} = d\Delta U(t) + L(U_t) + F(U_t), \tag{5}$$

其中 $d\Delta = (d_1\Delta, d_2\Delta)$, $\text{dom}(d\Delta) = \{(u, v)^T : u, v \in C^2([0, l\pi], \mathbb{R}), u_x, v_x = 0, x = 0, l\pi\}$. 已知 $L: C([-\tau, 0], X) \rightarrow X$, $F: C([-\tau, 0], X) \rightarrow X$, 对于 $U_t = \phi$, $U(t) = \phi(0)$, $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T \in C([-\tau, 0])$, 有

$$L(\phi) = \begin{pmatrix} [-2u^{*2} + (m + 1)u^*]\phi_1(0) - qu^*\phi_2(0) \\ s\phi_1(-\tau) - s\phi_2(0) \end{pmatrix}, \quad F(\phi) = \begin{pmatrix} F_1(\phi) \\ F_2(\phi) \end{pmatrix},$$

其中

$$F_1(\phi) = (\phi_1(0) + u^*)[1 - (\phi_1(0) + u^*)](\phi_1(0) + u^* - m) - q(\phi_1(0) + u^*)(\phi_2(0) + v^*) - [-2u^{*2} + (m + 1)u^*]\phi_1(0) + qu^*\phi_2(0),$$

$$F_2(\phi) = s(\phi_2(0) + v^*)\left(1 - \frac{\phi_2(0) + v^*}{(\phi_1(-\tau) + u^*)}\right) - s\phi_1(-\tau) + s\phi_2(0).$$

系统(4)在 $(0, 0)$ 附近的线性化系统为

$$\frac{dU(t)}{dt} = d\Delta U(t) + L(U_t). \tag{6}$$

根据文献[11], 可得线性系统的特征方程为

$$\lambda y - d\Delta y - L(e^{\lambda \cdot} y) = 0, \quad y \in \text{dom}(d\Delta), \quad y \neq 0. \tag{7}$$

由特征值问题 $-\psi'' = \mu\psi$, $x \in (0, l\pi)$, $\psi'(0) = \psi'(l\pi) = 0$, 可得特征值 $\mu_n = \frac{n^2}{l^2} (n \in \mathbb{N})$, 相应的特征

函数为 $\psi_n(x) = \cos\left(\frac{n}{l}x\right)$, 将

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n}{l}x\right) \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \end{pmatrix}$$

代入特征方程(7)得

$$\begin{pmatrix} -2u^{*2} + (m+1)u^* - d_1 \frac{n^2}{l^2} & -qu^* \\ se^{-\lambda\tau} & -s - d_2 \frac{n^2}{l^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

因此,特征方程(7)的所有特征根由以下特征方程给出:

$$\Delta_n(\lambda, \tau) = \lambda^2 + A_n \lambda + B e^{-\lambda\tau} + C_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

其中

$$A_n = (d_1 + d_2) \frac{n^2}{l^2} + 2u^{*2} - (m+1)u^* + s, \quad B = qu^*,$$

$$C_n = \left[d_1 \frac{n^2}{l^2} + 2u^{*2} - (m+1)u^* \right] \left(d_2 \frac{n^2}{l^2} + s \right).$$

若 $\lambda = \pm i\sigma (\sigma > 0)$ 为方程(8)的一对纯虚根,则有

$$\begin{cases} \sigma^2 - C_n = B \cos(\sigma\tau), \\ \sigma A_n = B \sin(\sigma\tau), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

将式(9)中两式平方后再相加,可得

$$\sigma^4 + (A_n^2 - 2C_n)\sigma^2 + C_n^2 - B^2 = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} A_n^2 - 2C_n &= \left[d_1 \frac{n^2}{l^2} + 2u^{*2} - (m+1)u^* \right]^2 + \left(d_2 \frac{n^2}{l^2} + s \right)^2, \\ C_n^2 - B^2 &= \left[d_1 \frac{n^2}{l^2} + 2u^{*2} - (m+1)u^* \right]^2 \left(d_2 \frac{n^2}{l^2} + s \right)^2 - q^2 u^{*2} s^2. \end{aligned} \quad (11)$$

当 $m+q < 1$ 时,有 $C_0^2 - B^2 < 0$ 成立,由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} (C_n^2 - B^2) = +\infty$,故存在一个最小的 N_0 ,使得当 $0 \leq n \leq N_0$ 时,方程(10)至多有一个正根,当 $n > N_0$ 时,方程(10)没有正根.当 $0 \leq n \leq N_0$ 时,方程(10)有一个正根 σ_n ,满足

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{-(A_n^2 - 2C_n) + \sqrt{(A_n^2 - 2C_n)^2 - 4(C_n^2 - B^2)}}{2}}, \quad (12)$$

则 τ 的表达式可确定为

$$\tau = \tau_n^j = \tau_n^0 + \frac{2j\pi}{\sigma_n}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

其中

$$\tau_n^0 = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_n} \arccos \frac{\sigma_n^2 - C_n}{B}, & A_n \geq 0, \\ \frac{1}{\sigma_n} \left(2\pi - \arccos \frac{\sigma_n^2 - C_n}{B} \right), & A_n < 0. \end{cases} \quad (14)$$

此时方程(8)有一对纯虚根 $\pm i\sigma_n$.

令 $\lambda_n(\tau) = \alpha_n(\tau) + i\beta_n(\tau)$ 是方程(8)的根,且当 $\tau \rightarrow \tau_n^j$ 时,满足 $\alpha_n(\tau_n^j) = 0$ 和 $\beta_n(\tau_n^j) = \sigma_n$,下面给出横截条件.

引理 1 对于 $0 \leq n \leq N_0$, $j \in \mathbb{N}$,且 $s > s^*$,有 $\alpha_n'(\tau_n^j) > 0$.

证明:将 $\lambda_n(\tau)$ 代入方程(8)并关于 τ 求导,得

$$\left[\frac{d\alpha_n}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_n^j} \right]^{-1} = \operatorname{Re} \left[\left(\frac{2\lambda_n e^{\lambda_n \tau} + A_n e^{\lambda_n \tau} - B\tau}{B\lambda_n} \right) \Big|_{\tau=\tau_n^j} \right],$$

由于 σ_n 和 τ_n^j 满足方程(9),并且根据方程(12)中 σ_n 的表达式,可得

$$\left[\frac{d\alpha_n}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_n^j} \right]^{-1} = \operatorname{Re} \left(\frac{(2\lambda_n + A_n)(\cos(\lambda_n \tau) + i \sin(\lambda_n \tau)) - B\tau}{B\lambda_n} \right) =$$

$$\frac{\sqrt{(A_n^2 - 2C_n)^2 - 4(C_n^2 - B^2)}}{B^2} > 0.$$

因此横截条件成立, 证毕.

根据式(13), 显然 $\tau_n^{j+1} > \tau_n^j$, 下面给出 τ_n^j 关于 n 的单调性.

性质 1 若 $0 \leq n \leq N_0, j \in \mathbb{N}$, 且 $s > s^*$, 则有 $\tau_{n+1}^j > \tau_n^j$ 成立.

证明: 将式(12)变形可得

$$\sigma_n^2 = \frac{-(A_n^2 - 2C_n) + \sqrt{(A_n^2 - 2C_n)^2 - 4(C_n^2 - B^2)}}{2} = \frac{2}{\sqrt{\frac{(A_n^2 - 2C_n)^2}{(B^2 - C_n^2)^2} + \frac{4}{B^2 - C_n^2} + \frac{A_n^2 - 2C_n}{B^2 - C_n^2}}},$$

其中 $A_n^2 - 2C_n$ 和 $C_n^2 - B^2$ 都在式(11)中给出. 又由于 $s > s^*$, 当 $0 \leq n \leq N_0$ 时, $A_n^2 - 2C_n$ 关于 n 严格递增, 同时 $B^2 - C_n^2$ 关于 n 严格递减, 所以可得 $\sigma_{n+1}^2 < \sigma_n^2$. 由于 $s > s^*$ 时, $A_n \geq 0$, 根据式(14),

$$\tau_n^0 = \frac{1}{\sigma_n} \arccos \frac{\sigma_n^2 - C_n}{B}. \text{ 因此, 当 } 0 \leq n \leq N_0 \text{ 时, 有 } \tau_{n+1}^0 > \tau_n^0.$$

因为 $\sigma_{n+1} < \sigma_n$, 结合式(13), 所以当 $j \geq 1, 0 \leq n \leq N_0$ 时, $\tau_{n+1}^j > \tau_n^j$.

综合上述分析, 可得如下定理:

定理 1 设 $0 < q < (1 - \sqrt{m})^2, s > s^*, u^* \in \left(\frac{m+1}{2}, 1\right)$ 成立, 则有:

- 1) 若 $\tau \in [0, \tau_0^0)$, 则系统(4)的正平衡点 $E_1(u^*, v^*)$ 是局部渐近稳定的;
- 2) 若 $\tau = \tau_n^j, j \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq N_0$, 则系统(4)在正平衡点 $E_1(u^*, v^*)$ 处产生 Hopf 分支;
- 3) 若 $\tau > \tau_0^0$, 则系统(4)的正平衡点 $E_1(u^*, v^*)$ 是不稳定的.

2 Hopf 分支的方向和稳定性

当 $\tau = \tau_n^j$ 时, 系统(4)在 $E_1(u^*, v^*)$ 处产生 Hopf 分支. 下面利用时滞偏微分方程的中心流形定理^[12]和规范型理论^[11,13]研究 $\tau = \tau_0 = \tau_0^0$ 时 Hopf 分支的方向和分支周期解的稳定性.

令 $\tau = \tau_0 + \mu$, 则 $\mu = 0$ 为系统(5)的 Hopf 分支值. 令 $t = \lambda\tau$ 并代入方程(5), 且仍用 t 表示 λt , 同理, $U_t = \varphi, U(t) = \varphi(0)$, 则可将系统(5)转化为

$$\frac{dU(t)}{dt} = \tau_0 d\Delta U(t) + \tau_0 L_0(U_t) + G(U_t, \mu), \tag{15}$$

其中,

$$L_0(\varphi) = \begin{pmatrix} [-2u^{*2} + (m+1)u^*]\varphi_1(0) - qu^*\varphi_2(0) \\ s\varphi_1(-1) - s\varphi_2(0) \end{pmatrix},$$

$$G(\varphi, \mu) = \mu d\Delta\varphi(0) + \mu L_0(\varphi) + (\mu + \tau_0)F_0(\varphi),$$

$$F_0(\varphi) = \begin{pmatrix} ((\varphi_1(0) + u^*)([1 - (\varphi_1(0) + u^*)](\varphi_1(0) + u^* - m) - q(\varphi_2(0) + v^*))) \\ -[-2u^{*2} + (m+1)u^*]\varphi_1(0) + qu^*\varphi_2(0) \\ s(\varphi_2(0) + v^*)\left(1 - \frac{\varphi_2(0) + v^*}{(\varphi_1(-\tau) + u^*)}\right) - s\varphi_1(-1) + s\varphi_2(0) \end{pmatrix},$$

且 $\varphi \in C([-1, 0], X)$.

系统(5)在(0,0)处的线性化系统为

$$\frac{dU(t)}{dt} = \tau_0 d\Delta U(t) + \tau_0 L_0(U_t). \tag{16}$$

由式(10)可知, $\pm i\sigma_0 \tau_0$ 为系统(16)的一对纯虚根, 其线性泛函微分方程为

$$\frac{dz(t)}{dt} = \tau_0 L_0(z_t). \tag{17}$$

根据 Riesz 表示定理可知, 存在 $\eta(\theta, \mu) (\theta \in [-1, 0])$ 为 2×2 阶的有界变差函数矩阵, 且满足

$$(\tau_0 + \mu)L_0(\varphi) = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu)\varphi(\theta), \quad \varphi(\theta) \in C([-1, 0], \mathbb{R}^2),$$

其中 $\boldsymbol{\eta}(\theta, \mu) = (\tau_0 + \mu)E\delta(\theta) - (\tau_0 + \mu)F\delta(\theta + 1)$,

$$E = \begin{pmatrix} -2u^{*2} + (m + 1)u^* & -qu^* \\ 0 & -s \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix},$$

且对于 $\delta(\theta): [-1, 0] \rightarrow (X, X)$, 有 $\delta(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0), \\ 1, & \theta = 0. \end{cases}$

若 $\boldsymbol{\varphi}(\theta) \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$, 则 $A(0)$ 定义为

$$A(0)(\boldsymbol{\varphi}(\theta)) = \begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\varphi}(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0), \\ \int_{-1}^0 d\boldsymbol{\eta}(\theta, 0)\boldsymbol{\varphi}(\theta), & \theta = 0. \end{cases}$$

若 $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2) \in C^1([-1, 0], (\mathbb{R}^2)^*)$, 则 A^* 定义为

$$A^*(\boldsymbol{\psi}(s)) = \begin{cases} -\frac{d\boldsymbol{\psi}(s)}{ds}, & s \in (0, 1], \\ \int_{-1}^0 \boldsymbol{\psi}(-s)d\boldsymbol{\eta}(\theta, 0), & s = 0. \end{cases}$$

若 $\boldsymbol{\varphi}(\theta) \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$, $\boldsymbol{\psi}(s) \in C^1([-1, 0], (\mathbb{R}^2)^*)$, 引入如下双线性形式:

$$\langle \boldsymbol{\psi}(s), \boldsymbol{\varphi}(\theta) \rangle_0 = \bar{\boldsymbol{\psi}}(0)\boldsymbol{\varphi}(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \bar{\boldsymbol{\psi}}(\xi - \theta)d\boldsymbol{\eta}(\theta, 0)\boldsymbol{\varphi}(\xi)d\xi,$$

则 $A(0)$ 和 A^* 是双线性形式 $\langle \boldsymbol{\psi}(s), \boldsymbol{\varphi}(\theta) \rangle_0$ 下的伴随算子.

经验证可知, $\pm i\sigma_0\tau_0$ 是 $A(0)$ 和 A^* 的特征值, 设 $\boldsymbol{q}(\theta) = (q_1, q_2)^T e^{i\sigma_0\tau_0\theta}$ ($\theta \in [-1, 0]$) 和 $\boldsymbol{q}^*(s) = \frac{1}{D}(q_1^*, q_2^*) e^{i\sigma_0\tau_0 s}$ ($s \in [0, 1]$) 分别为 $A(0)$ 和 A^* 关于特征值 $i\sigma_0\tau_0$ 和 $-i\sigma_0\tau_0$ 对应的特征向量, 其中

$$(q_1, q_2) = \left(1, \frac{-2u^* + m + 1}{q} - \frac{i\sigma_0}{qu^*}\right), \quad (q_1^*, q_2^*) = \left(1, \frac{-qu^*(s + i\sigma_0)}{s^2 + \sigma_0^2}\right),$$
$$D = 1 - \frac{qu^*(s + i\sigma_0)}{s^2 + \sigma_0^2} \left(\frac{-2u^* + m + 1}{q} - \frac{i\sigma_0}{qu^*} + \tau_0 s e^{-i\sigma_0\tau_0}\right).$$

根据文献[11]可知, A_U 是线性系统(16)的无穷小生成元, 满足 $A_U\boldsymbol{\psi} = \dot{\boldsymbol{\psi}}(\theta)$. 同时, 令 $\boldsymbol{f}_0 = (f_0^1, f_0^2)^T$, 其中 $\boldsymbol{f}_0^1 = (1, 0)^T$, $\boldsymbol{f}_0^2 = (0, 1)^T$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{C}^2$, 定义 $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{f}_0 = c_1 f_0^1 + c_2 f_0^2$, 当 $\boldsymbol{\psi}(\theta) \in [-1, 0]$ 时, 定义 $(\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{f}_0)(\theta) = \boldsymbol{\psi}(\theta) \cdot \boldsymbol{f}_0$, 且对 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, $\boldsymbol{v} = (u_1, u_2) \in X = C([0, l\pi], \mathbb{R}^2)$, 有

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \frac{1}{l\pi} \int_0^{l\pi} u_1 \bar{v}_1 dx + \frac{1}{l\pi} \int_0^{l\pi} u_2 \bar{v}_2 dx.$$

因此, $\langle \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{f}_0 \rangle = (\langle \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{f}_0^1 \rangle, \langle \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{f}_0^2 \rangle)^T$, 其中 $\boldsymbol{\varphi} \in C([-1, 0], X)$.

令 $\boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{q}(\theta), \bar{\boldsymbol{q}}(\theta))$, $\boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{q}^*(s), \bar{\boldsymbol{q}}^*(s))^T$, 则 $(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Phi})_0 = \boldsymbol{I}$, 其中 $\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 设系统(17)的中心子空间为 $P = \text{span}\{\boldsymbol{q}(\theta), \bar{\boldsymbol{q}}(\theta)\}$, 伴随子空间为 $P^* = \text{span}\{\boldsymbol{q}^*(s), \bar{\boldsymbol{q}}^*(s)\}$.

下面再由 $P_{CN}C$ 给出系统(17)的中心子空间, 其中

$$P_{CN}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\Psi}, \langle \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{f}_0 \rangle)_0 \cdot \boldsymbol{f}_0, \quad \boldsymbol{\varphi} \in C, \quad P_{CN}C = \{(\boldsymbol{q}(\theta)z, \bar{\boldsymbol{q}}(\theta)\bar{z}) \cdot \boldsymbol{f}_0 : z \in \mathbb{C}\},$$

$C = P_{CN}C \oplus P_S C$, $P_S C$ 为稳定的子空间.

由于 Hopf 分支的方向和稳定性都与 $\mu = 0$ 有关, 因此在系统(15)中令 $\mu = 0$, 可确定中心流形

$$\boldsymbol{W}(z, \bar{z}) = \boldsymbol{W}_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + \boldsymbol{W}_{11}(\theta) z\bar{z} + \boldsymbol{W}_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots,$$

系统(15)在中心流形中的流可写为

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{\Phi}(z(t), \bar{z}(t))^T + \boldsymbol{W}(z(t), \bar{z}(t)) = \boldsymbol{q}(\theta)z(t) + \bar{\boldsymbol{q}}(\theta)\bar{z}(t) + \boldsymbol{W}(z(t), \bar{z}(t)),$$

其中

$$\dot{z}(t) = i\omega_0\tau_0 z(t) + \bar{\boldsymbol{q}}^*(0) \langle \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_t, 0), \boldsymbol{f}_0 \rangle = i\omega_0\tau_0 z(t) + \boldsymbol{g}(z, \bar{z}),$$

且

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) \langle G(u, 0), f_0 \rangle = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots \tag{18}$$

再根据 $G(\varphi, \mu)$ 的表达式, 有

$$G(\varphi, 0) = \tau_0 F_0(\varphi) = \tau_0 \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix},$$

其中,

$$\begin{aligned} G_1 &= (-6u^* + 2m - 2)\varphi_1^2(0) - 6\varphi_1^3(0) - q\varphi_1(0)\varphi_2(0) + O(4), \\ G_2 &= -\frac{2sv^*}{u^{*3}}\varphi_1^2(-1) + \frac{6sv^*}{u^{*4}}\varphi_1^3(-1) + \frac{12sv^*}{u^{*4}}\varphi_1^2(-1)\varphi_2(0) + \\ &\quad \frac{2sv^*}{u^{*2}}\varphi_1(-1)\varphi_2(0) + \frac{2s}{u^{*2}}\varphi_1(-1)\varphi_2^2(0) - \frac{2s}{u^*}\varphi_2^2(0) + O(4), \end{aligned} \tag{19}$$

式中 $O(4) = O(\|(u, v)\|^4)$.

由式(18), (19)可得

$$\begin{aligned} g_{20} &= \frac{2\bar{q}_1^* \tau_0}{D} [(-6u^* + 2m - 2)q_1^2 - qq_1q_2] + \frac{2\bar{q}_2^* \tau_0}{D} \left[-\frac{2sv^*}{u^{*3}}q_1^2 e^{-2i\sigma_0\tau_0} + \frac{2sv^*}{u^{*2}}q_1q_2 e^{-i\sigma_0\tau_0} - \frac{2s}{u^*}q_2^2 \right], \\ g_{11} &= \frac{\bar{q}_1^* \tau_0}{D} [2(-6u^* + 2m - 2)q_1\bar{q}_1 - q(q_1\bar{q}_2 + \bar{q}_1q_2)] + \\ &\quad \frac{\bar{q}_2^* \tau_0}{D} \left[-\frac{4sv^*}{u^{*3}}q_1\bar{q}_1 + \frac{2sv^*}{u^{*2}}(\bar{q}_1q_2 e^{i\sigma_0\tau_0} + q_1\bar{q}_2 e^{-i\sigma_0\tau_0}) - \frac{4s}{u^*}q_2\bar{q}_2 \right], \\ g_{02} &= \frac{2\bar{q}_1^* \tau_0}{D} [(-6u^* + 2m - 2)\bar{q}_1^2 - q\bar{q}_1\bar{q}_2] + \frac{2\bar{q}_2^* \tau_0}{D} \left[-\frac{2sv^*}{u^{*3}}q_1^2 e^{2i\sigma_0\tau_0} + \frac{2sv^*}{u^{*2}}\bar{q}_1\bar{q}_2 e^{i\sigma_0\tau_0} - \frac{2s}{u^*}q_2^2 \right], \\ g_{21} &= \frac{2\bar{q}_1^* \tau_0}{D} [(-6u^* + 2m - 2)(2q_1W_{11}^1(0) + \bar{q}_1W_{20}^1(0)) - 2q_1^2\bar{q}_1^2] - \\ &\quad \frac{\bar{q}_1^* \tau_0 \beta}{D} [2qq_1^2W_{11}^2(0) + q\bar{q}_1^2W_{20}^2(0) + q\bar{q}_2W_{20}^1(0) + 2qq_2W_{11}^1(0)] - \\ &\quad \frac{2\bar{q}_2^* \tau_0}{D} \left[\frac{2sv^*}{u^{*3}}(2q_1 e^{-i\sigma_0\tau_0}W_{11}^1(-1) + \bar{q}_1 e^{i\sigma_0\tau_0}W_{20}^1(-1)) \right] + \\ &\quad \frac{2\bar{q}_2^* \tau_0}{D} \left[\frac{6sv^*}{u^{*4}}(2\bar{q}_1q_1^2 e^{2i\sigma_0\tau_0}) + \frac{12sv^*}{u^{*4}}(2q_1^2\bar{q}_2 e^{-2i\sigma_0\tau_0}) \right] + \\ &\quad \frac{\bar{q}_2^* \tau_0}{D} \left[\frac{2sv^*}{u^{*2}}(2q_2W_{11}^1(-1) + 2\bar{q}_2W_{20}^1(-1) + \bar{q}_1 e^{i\sigma_0\tau_0}W_{20}^2(0) + 2q_1 e^{-i\sigma_0\tau_0}W_{11}^2(0)) \right] - \\ &\quad \frac{2\bar{q}_2^* \tau_0}{D} \left[\frac{2s}{u^*}(2q_2W_{11}^2(0) + \bar{q}_2W_{20}^2(0)) \right] + \frac{2\bar{q}_2^* \tau_0}{D} \left[\frac{2s}{u^{*2}}(q_1q_2^2 e^{-i\sigma_0\tau_0}) \right], \end{aligned}$$

因此, 要得到 g_{21} , 需要先计算出 $W_{20}(\theta)$ 和 $W_{11}(\theta)$.

由于 $W(z(t), \bar{z}(t))$ 满足

$$\begin{aligned} \dot{W} &= A_U W + X_0 G(\Phi(z, \bar{z}))^T \cdot f_0 + \omega(z, \bar{z}, 0) - \\ &\quad \Phi(\Psi, \langle X_0 G(\Phi(z, \bar{z}))^T \cdot f_0 + \omega(z, \bar{z}, 0), f_0 \rangle)_0 \cdot f_0 = \\ &\quad A(0)W + H_{20} \frac{z^2}{2} + H_{11} z\bar{z} + H_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots, \end{aligned} \tag{20}$$

因此根据链式法则

$$\dot{W} = \frac{\partial W(z, \bar{z})}{\partial z} \cdot \dot{z} + \frac{\partial W(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \cdot \dot{\bar{z}},$$

可得

$$\begin{cases} [2i\sigma_0\tau_0 - A_U]W_{20} = H_{20}, \\ -A_U W_{11} = H_{11}, \\ [-2i\sigma_0\tau_0 - A_U]W_{02} = H_{02}. \end{cases} \tag{21}$$

当 $-1 \leq \theta < 0$ 时, 有

$$-\Phi(\Psi, \langle X_0 G(\Phi(z, \bar{z}))^T \cdot f_0 + \omega(z, \bar{z}), 0 \rangle, f_0) \cdot f_0 = H_{20} \frac{z^2}{2} + H_{11} z\bar{z} + H_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots, \quad (22)$$

$$H_{20}(\theta) = -[g_{20}q(\theta) + \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta)] \cdot f_0, \quad H_{11}(\theta) = -[g_{11}q(\theta) + \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta)] \cdot f_0.$$

根据式(21), (22)可得

$$W_{20}(\theta) = \frac{ig_{20}}{\sigma_0 \tau_0} q(\theta) \cdot f_0 + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\sigma_0 \tau_0} \bar{q}(\theta) \cdot f_0 + E_1 e^{2i\sigma_0 \tau_0 \theta},$$

$$W_{11}(\theta) = -\frac{ig_{11}}{\sigma_0 \tau_0} q(\theta) \cdot f_0 + \frac{i\bar{g}_{11}}{\sigma_0 \tau_0} \bar{q}(\theta) \cdot f_0 + E_2.$$

在式(21)中令 $\theta=0$, 再结合无穷小生成元的定义以及

$$H_{20}(0) = -g_{20}[q(0) + \bar{g}_{02}\bar{q}(0)] \cdot f_0 + \tau_0 \begin{pmatrix} (-6u^* + 2m - 2)q_1^2 - qq_1q_2 \\ -\frac{2sv^*}{u^{*3}}q_1^2 e^{-2i\sigma_0 \tau_0} + \frac{2sv^*}{u^{*2}}q_1q_2 e^{-i\sigma_0 \tau_0} - \frac{2s}{u^*}q_2^2 \end{pmatrix},$$

$$H_{11}(0) = -g_{11}[q(0) + \bar{g}_{11}\bar{q}(0)] \cdot f_0 + \tau_0 \begin{pmatrix} 2(-6u^* + 2m - 2)q_1\bar{q}_1 - q(q_1\bar{q}_2 + \bar{q}_1q_2) \\ -\frac{4sv^*}{u^{*3}}q_1\bar{q}_1 + \frac{2sv^*}{u^{*2}}(\bar{q}_1q_2 e^{i\sigma_0 \tau_0} + q_1\bar{q}_2 e^{-i\sigma_0 \tau_0}) - \frac{4s}{u^*}q_2\bar{q}_2 \end{pmatrix},$$

得

$$E_1 = E_{11} \cdot E_{12}, \quad E_2 = E_{21} \cdot E_{22}, \quad (23)$$

其中

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 2i\sigma_0 + 2u^{*2} - (m+1)u^* & qu^* \\ -se^{-2i\sigma_0 \tau_0} & 2i\sigma_0 + s \end{pmatrix}^{-1}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} (-6u^* + 2m - 2)q_1^2 - qq_1q_2 \\ -\frac{2sv^*}{u^{*3}}q_1^2 e^{-2i\sigma_0 \tau_0} + \frac{2sv^*}{u^{*2}}q_1q_2 e^{-i\sigma_0 \tau_0} - \frac{2s}{u^*}q_2^2 \end{pmatrix},$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 2u^{*2} - (m+1)u^* & qu^* \\ -s & s \end{pmatrix}^{-1}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 2(-6u^* + 2m - 2)q_1\bar{q}_1 - q(q_1\bar{q}_2 + \bar{q}_1q_2) \\ -\frac{4sv^*}{u^{*3}}q_1\bar{q}_1 + \frac{2sv^*}{u^{*2}}(\bar{q}_1q_2 e^{i\sigma_0 \tau_0} + q_1\bar{q}_2 e^{-i\sigma_0 \tau_0}) - \frac{4s}{u^*}q_2\bar{q}_2 \end{pmatrix}.$$

因此, g_{21} 表达式由此可确定.

基于上述分析, 根据参数可计算出每个 g_{ij} 的值, 判断分支方向和分支周期解稳定性的表达式也可由计算得到:

$$C_1(0) = \frac{i}{2\sigma_0 \tau_0} \left(g_{11}g_{20} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3} \right) + \frac{g_{21}}{2}, \quad \mu_2 = -\frac{\operatorname{Re}(C_1(0))}{\operatorname{Re}(\lambda'(\tau_0^0))},$$

$$\beta_2 = 2\operatorname{Re}(C_1(0)), \quad T_2 = -\frac{\operatorname{Im}(C_1(0)) + \mu_2 \operatorname{Im}(\lambda'(\tau_0^0))}{\sigma_0 \tau_0^0}.$$

因此可得如下定理.

定理 2 对于系统(4), 有以下结论:

1) μ_2 确定 Hopf 分支的分支方向, 当 $\mu_2 > 0$ 时, 分支方向是超临界的, 当 $\mu_2 < 0$ 时, 分支方向是次临界的;

2) β_2 确定分支周期解的稳定性, 当 $\beta_2 < 0$ 时, 分支周期解是渐近稳定的, 当 $\beta_2 > 0$ 时, 分支周期解是不稳定的;

3) T_2 确定分支周期解的周期, 当 $T_2 > 0$ 时, 周期增大, 当 $T_2 < 0$ 时, 周期减少.

3 数值模拟

下面利用 MATLAB 工具给出具体的实例, 以验证上述理论分析结果. 对于系统(4), 取参数 $m=0.29$, $q=0.2$, $s=0.185$, $l=2.25$, $d_1=0.01$, $d_2=1$, 计算得到正平衡点为 $E_1(u^*, v^*) = (0.6288, 0.6288)$, 同时满足条件 $0 < q < (1 - \sqrt{m})^2$, $s > s^* = -2u^{*2} + (m+1)u^*$, 且 $u^* \in \left(\frac{m+1}{2}, 1\right)$, 其中 $0 < m < 1$, 根据计算可得 $\tau_0^0 = 8.0270$.

取 $\tau = 4.54 < \tau_0^0$, 由定理 1 和定理 2 可知, 当 τ 经过 τ_0^0 , 正平衡点 $E_1(u^*, v^*)$ 由稳定变为不稳定并产生 Hopf 分支, 如图 1~图 3 所示. 取初值 $u(x, t) = u^* + 0.01\sin(4x)$, $v(x, t) = v^* + 0.01\sin(4x)$, $\tau = 4.54 < 8.027 0$, 由定理 1 和定理 2 可知, 系统(4)在正平衡点 $E_1(u^*, v^*)$ 处是局部渐近稳定的, 如图 1 所示. 取 $\tau = 8.03 > \tau_0^0$ 时, 由定理 1 和定理 2 可知, 系统(4)在正平衡点 $E_1(u^*, v^*)$ 处产生 Hopf 分支, 如图 2 和图 3 所示. 当初值为 $u(x, t) = u^* + 0.15\sin(0.01x)$, $v(x, t) = v^* + 0.15\sin(0.01x)$ 时, 系统(4)产生空间齐次周期解, 如图 2 所示; 当初值为

$$u(x, t) = u^* + 0.014\sin(0.5x), \quad v(x, t) = v^* + 0.014\sin(0.5x)$$

时, 系统(4)产生空间非齐次周期解, 如图 3 所示.

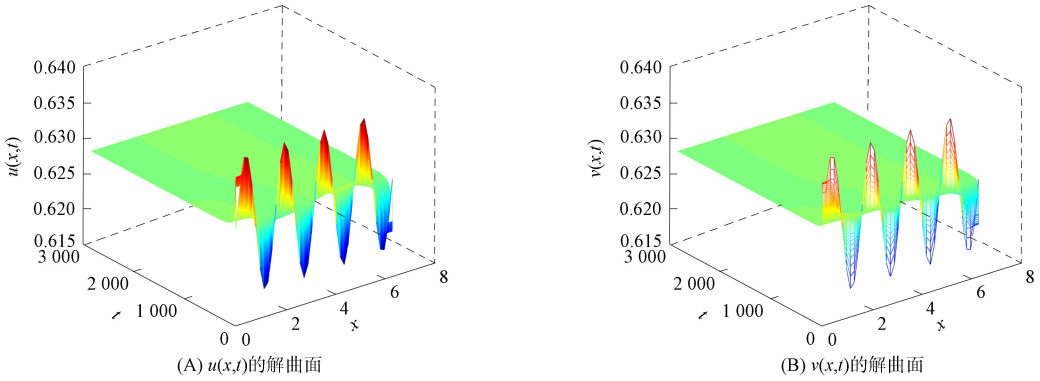


图 1 当 $\tau = 4.54 < \tau_0^0$ 时系统(4)在正平衡点处稳定

Fig. 1 System (4) is stable at positive equilibrium point when parameter $\tau = 4.54 < \tau_0^0$

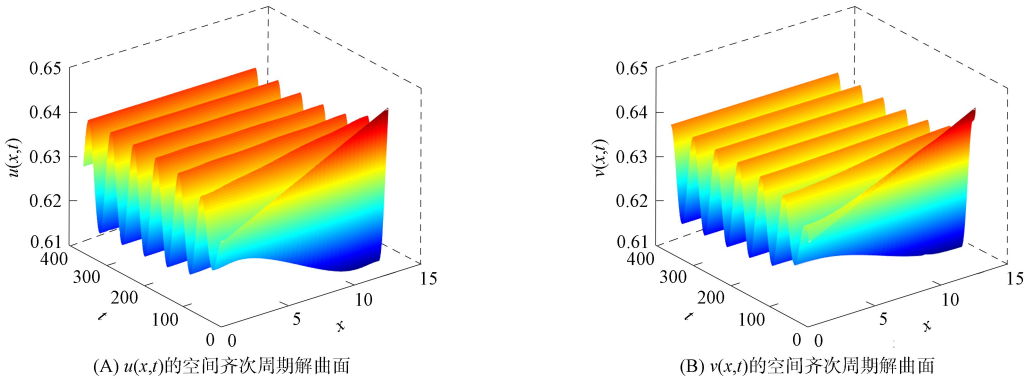


图 2 当 $\tau = 8.03 > \tau_0^0$ 时系统(4)产生齐次周期解

Fig. 2 System (4) generates homogeneous periodic solutions when parameter $\tau = 8.03 > \tau_0^0$

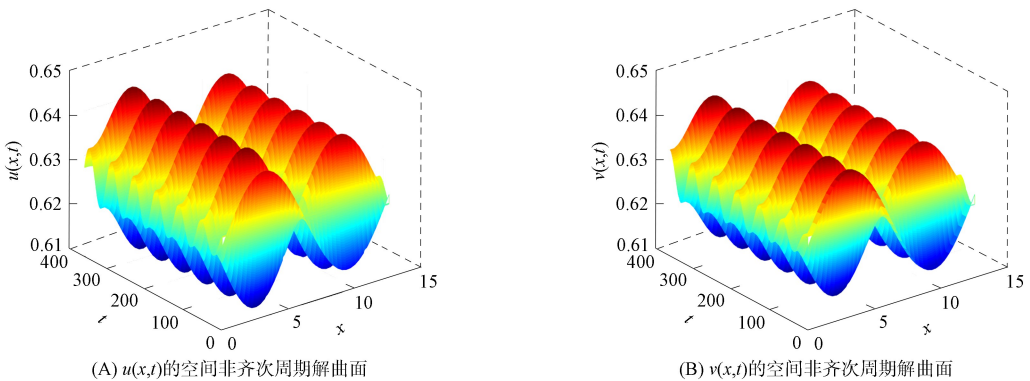


图 3 当 $\tau = 8.03 > \tau_0^0$ 时系统(4)产生非齐次周期解

Fig. 3 System (4) generates inhomogeneous periodic solutions when parameter $\tau = 8.03 > \tau_0^0$

此外, 计算得到 $\mu_2 = 1.348 1 \times 10^5 > 0$, 产生的 Hopf 分支方向为超临界, $\beta_2 = -1.385 7 \times 10^3 < 0$, 分支周期解是渐近稳定的, $T_2 = -6.594 1 \times 10^3 < 0$, 分支周期解的周期减少.

参 考 文 献

- [1] CHEN S S, SHI J P, WEI J J. The Effect of Delay on a Diffusive Predator-Prey System with Holling Type-II Predator Functional Response [J]. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2013, 12(1): 481-501.
- [2] 王雅迪, 袁海龙. 时滞 Lengyel-Epstein 反应扩散系统的 Hopf 分支 [J]. *山东大学学报(理学版)*, 2023, 58(8): 92-103. (WANG Y D, YUAN H L. Hopf Bifurcation Analysis in the Lengyel-Epstein Reaction Diffusion System with Time Delay [J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2023, 58(8): 92-103.)
- [3] 姚佳佳, 沈维. 一类食饵-捕食模型的稳定性和 Hopf 分支的存在性 [J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2022, 60(2): 225-230. (YAO J J, SHEN W. Stability of a Class of Prey-Predator Model and Existence of Hopf Bifurcation [J]. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, 2022, 60(2): 225-230.)
- [4] CHANG X Y, WEI J J. Hopf Bifurcation and Optimal Control in a Diffusive Predator-Prey System with Time Delay and Prey Harvesting [J]. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2012, 17(4): 379-409.
- [5] FU S M, ZHANG H S. Effect of Hunting Cooperation on the Dynamic Behavior for a Diffusive Holling Type II Predator-Prey Model [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, 99: 105807-1-105807-23.
- [6] NI W J, WANG M X. Dynamical Properties of a Leslie-Gower Prey-Predator Model with Strong Allee Effect in Prey [J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems: Series B*, 2017, 22(9): 3409-3420.
- [7] YANG R Z, ZHANG C R. Dynamics in a Diffusive Predator-Prey System with a Constant Prey Refuge and Delay [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2016, 31: 1-22.
- [8] CHEN S S, SHI J P, WEI J J. Global Stability and Hopf Bifurcation in a Delayed Diffusive Leslie-Gower Predator-Prey System [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012, 22(3): 1250061-1-1250061-11.
- [9] DU Y F, NIU B, WEI J J. Two Delays Induce Hopf Bifurcation and Double Hopf Bifurcation in a Diffusive Leslie-Gower Predator-Prey System [J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2019, 29(1): 013101-1-013101-16.
- [10] 常笑源, 汪红, 杨鸿飞, 等. 具时滞和 Leslie-Gower 功能反应函数的捕食者-食饵系统的 Hopf 分支分析 [J]. *黑龙江大学自然科学学报*, 2020, 37(1): 39-44. (CHANG X Y, WANG H, YANG H F, et al. Analysis of Hopf Bifurcation on the Leslie-Gower Predator-Prey System with Time Delay [J]. *Journal of Natural Science of Heilongjiang University*, 2020, 37(1): 39-44.)
- [11] WU J H. *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations* [M]. *Applied Mathematical Sciences*. New York: Springer, 1996: 1-448.
- [12] LIN X D, SO J W H, WU J H. Center Manifolds for Partial Differential Equations with Delays [J]. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 1992, 122(3/4): 237-254.
- [13] HASSARD B D, KAZARINOFF N D, WAN Y H. *Theory and Applications of Hopf Bifurcation* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981: 1-499.

(责任编辑: 赵立芹)