doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023369

一类具有奇异项和对数源的四阶薄膜方程解的爆破和衰退估计

吴秀兰，赵雅鑫，杨晓新
(长春理工大学 数学与统计学院，长春 130022)

摘要： 考虑一类具有奇异项和对数源的四阶薄膜方程. 首先利用截断函数和 Galerkin 逼近相结合给出该方程弱解的局部存在性；然后借助位势井方法和 Rellich 不等式，证明一定条件下该方程弱解的整体存在性和衰减估计；最后，利用凸方法证明该方程的解在有限时刻爆破，并给出爆破时间的上界和下界.

关键词： 奇异项；对数非线性项；四阶；整体存在；爆破

中图分类号： O175.8　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671-5489(2024)03-0556-09

Blow-up and Decay Estimate of Solution for a Class of Fourth-Order Thin-Film Equation with Singular Term and Logarithmic Source

WU Xiulan, ZHAO Yaxin, YANG Xiaoxin
(*School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Science and Technology, Changchun* 130022, *China*)

Abstract: We considered a class of fourth-order thin-film equation with singular term and logarithmic source. Firstly, we obtained the local existence of weak solutions to the equation by combining truncation function and Galerkin approximation. Secondly, by virtue of the potential well method and Rellich inequality, we proved the global existence and decay estimate of weak solution to the equation under certain conditions. Finally, we proved the blow-up result of the solution to the equation at a finite time by using the convex method, and gave the lower and upper bounds for blow-up time.

Keywords: singular term; logarithmic nonlinearity; fourth-order; global existence; blow-up

0 引　言

考虑一类具有奇异项和对数非线性项的如下四阶抛物方程初边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{u_t}{|\boldsymbol{x}|^4} + \Delta^2 u = |u|^{p-2} u \ln |u|, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad t > 0; \\ u(\boldsymbol{x}, t) = \Delta u(\boldsymbol{x}, t) = 0, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0; \\ u(\boldsymbol{x}, 0) = u_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N > 4)$ 是具光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，$u_0(\boldsymbol{x}) \in H_0^2(\Omega)$，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$，$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}$，此外，定义 p 范围如下：

收稿日期： 2023-09-06.

第一作者简介： 吴秀兰(1979—)，女，汉族，博士，副教授，从事偏微分方程的研究，E-mail：chjlsywxl@126.com.

基金项目： 国家自然科学基金(批准号：12171054)和吉林省自然科学基金(批准号：YDZJ202201ZYTS584).

$$2 < p < \bar{p} = \begin{cases} \dfrac{8}{N} + 2, & N \geqslant 8, \\ \dfrac{4}{N-4} + 2, & 4 < N < 8. \end{cases}$$

四阶薄膜方程出现在外延薄膜的生长理论中，对于问题(1)，$u(\boldsymbol{x},t)$表示外延生长中薄膜的高度，$\Delta^2 u$ 表示毛细驱动的表面扩散. 近年来，对四阶抛物方程初边值问题的研究已得到广泛关注[1-5]，例如，King 等[1]考虑如下四阶抛物型方程初边值问题：

$$u_t + \Delta^2 u - \nabla \cdot (f(\nabla u)) = g(\boldsymbol{x},t,u), \qquad (\boldsymbol{x},t) \in \Omega \times (0,\infty),$$

利用半离散逼近技术，在适当的初边值条件下建立了该问题弱解的存在性、唯一性及正则性. 由于对数非线性项[6-10]不满足单调性且符号可能改变，因此与具有指数源项[11-12]的问题相比有较大的难度. 例如，Li 等[6]考虑如下具有非线性对数项的四阶抛物型方程初边值问题：

$$u_t + \Delta^2 u = |u|^{p-2} u \ln u, \qquad (\boldsymbol{x},t) \in \Omega \times (0,\infty),$$

利用位势井法得到了该问题弱解的局部存在唯一性以及弱解在有限时间内的衰减和爆破的结果. Do 等[13]考虑具有奇异项和特殊介质的如下形式的初边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{u_t}{|\boldsymbol{x}|^4} + \Delta^2 u = k(t)|u|^{p-1}u, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(\boldsymbol{x},t) = \Delta u(\boldsymbol{x},t) = 0, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

利用截断函数和 Galerkin 逼近相结合得到了问题(2)弱解的局部存在性，借助位势井方法和 Rellich 不等式，证明了问题(2)在一定条件下弱解的整体存在性和衰退估计，并利用凸方法证明了问题(2)的解在有限时刻爆破，其中 $p \in (1,\infty)$，$\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geqslant 1)$，$\partial\Omega$ 是光滑的，且初值 $u_0(\boldsymbol{x}) \in H_0^2(\Omega)$，$k(t)$满足适当的结构性条件. 文献[14]给出了问题(2)解的爆破时间的上界和下界.

受上述研究启发，如果将问题(2)中的非线性项 $k(t)u^{p-1}u$ 替换成其他形式，如对数非线性项 $|u|^{p-2}u\ln|u|$，对问题(1)这种具有奇异项的方程解的整体存在和爆破性质的研究目前尚未见文献报道. 本文首先证明问题(1)弱解的局部存在性；然后给出一定条件下问题(1)弱解的整体存在性和衰减估计；最后证明解的爆破性质，并给出爆破时间的上界和下界.

1　预备知识

令 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，对任意的 $u \in L^p(\Omega)$，$\| u \|_p$ 表示 u 的 $L^p(\Omega)$范数，对 $H_0^2(\Omega)$空间赋以范数 $\| u \|_{H_0^2(\Omega)} = \| \Delta u \|_2$，用$\langle \cdot , \cdot \rangle$表示对偶积. 本文中 C 在不同之处表示不同的正常数.

本文采用位势井方法，下面定义与之相关的泛函和一些集合，并研究其基本性质. 对任意的 $u \in H_0^2(\Omega)$，令

$$J(u) = \frac{1}{2} \| \Delta u \|_2^2 + \frac{1}{p^2} \| u \|_p^p - \frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p \ln |u| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{3}$$

$$I(u) = \| \Delta u \|_2^2 - \int_\Omega |u|^p \ln |u| \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{4}$$

则

$$J(u) = \frac{1}{p} I(u) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \| \Delta u \|_2^2 + \frac{1}{p^2} \| u \|_p^p. \tag{5}$$

定义 Nehari 流形和井深分别为

$$\mathcal{N} = \{ u \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}, \ I(u) = 0 \},$$

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u).$$

定义集合

$$W_1 = \{ u \in H_0^2(\Omega) \mid J(u) < d \}, \qquad W_2 = \{ u \in H_0^2(\Omega) \mid J(u) = d \},$$

$$W = W_1 \cup W_2, \qquad W_1^+ = \{ u \in H_0^2(\Omega) \mid J(u) < d, \ I(u) > 0 \},$$

$$W_2^+=\{u\in H_0^2(\Omega)\,|\,J(u)=d,\ I(u)>0\},\qquad W^+=W_1^+\cup W_2^+,$$
$$W_1^-=\{u\in H_0^2(\Omega)\,|\,J(u)<d,\ I(u)<0\},$$
$$W_2^-=\{u\in H_0^2(\Omega)\,|\,J(u)=d,\ I(u)<0\},\qquad W^-=W_1^-\cup W_2^-.$$

引理 1[6] 设 $u\in H_0^2(\Omega)$，则：

1) $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}J(\lambda u)=0$，$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}J(\lambda u)=-\infty$；

2) 存在唯一的 $\lambda^*=\lambda^*(u)>0$，使得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}J(\lambda u)\right|_{\lambda=\lambda^*}=0$；

3) $J(\lambda u)$ 在 $\lambda\in(0,\lambda^*)$ 上递增，在 $\lambda\in(\lambda^*,\infty)$ 上递减，在 $\lambda=\lambda^*$ 处取得最大值；

4) 在 $\lambda\in(0,\lambda^*)$ 上有 $I(\lambda u)>0$，在 $\lambda\in(\lambda^*,\infty)$ 上有 $I(\lambda u)<0$，并且 $I(\lambda^* u)=0$.

由于问题(1)存在奇异项，因此引入如下截断函数：

$$\rho_n(x)=\min\{|\boldsymbol{x}|^{-4},n\}.$$

引理 2(Rellich 不等式)[13-14] 设 $N>4$，$u\in H_0^2(\Omega)$，则 $\dfrac{u}{|\boldsymbol{x}|^2}\in L^2(\Omega)$ 且存在一个常数 $R_N>0$，使得

$$\int_\Omega\frac{|u|^2}{|\boldsymbol{x}|^4}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\frac{16}{N^2(N-4)^2}\int_\Omega|\Delta u|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}:=R_N\int_\Omega|\Delta u|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

注 1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是一个有界域，则以下不等式成立：

$$\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_\Omega(\rho_n^{-1}\rho_n)|u|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant C(\Omega)\,\|\rho_n^{1/2}u\|_2^2,$$

其中 $C(\Omega)$ 是与 Ω 相关的常数.

为处理对数非线性项 $|u|^{p-2}u\ln|u|$，引入以下引理：

引理 3[9] 设 μ 是任意给定正数，则如下两个不等式成立：

$$s^p\ln s\leqslant(\mathrm{e}\mu)^{-1}s^{p+\mu},\qquad s\geqslant 1,$$
$$|s^p\ln s|\leqslant(\mathrm{e}p)^{-1},\qquad 0<s<1.$$

下面给出一个特殊形式的 Gagliardo-Nirenberg 内插不等式和一个基本的积分不等式.

引理 4[13] 对任意的 $u\in H_0^2(\Omega)$，下列不等式成立：

$$\|u\|_{p+\mu}^{p+\mu}\leqslant C_G\,\|\Delta u\|_2^{(p+\mu)\theta}\,\|u\|_2^{(1-\theta)(p+\mu)},$$

其中 $\theta=\dfrac{N(p+\mu-2)}{4(p+\mu)}$，$0<\mu<\dfrac{8}{N}+2-p$，$C_G$ 是与 Ω,N,p 有关的正常数.

引理 5[9] 设 f：$\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 是一个非增函数，σ 是一个非负常数，满足不等式

$$\int_t^\infty f^{1+\sigma}(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{\omega}f^\sigma(0)f(t),\qquad\forall\, t\geqslant 0,$$

则：

1) 当 $\sigma=0$ 时，对任意的 $t\geqslant 0$，有 $f(t)\leqslant f(0)\mathrm{e}^{1-\omega t}$.

2) 当 $\sigma>0$ 时，对任意的 $t\geqslant 0$，有 $f(t)\leqslant f(0)\left(\dfrac{1+\sigma}{1+\omega\sigma t}\right)^{1/\sigma}$.

最后引入在证明爆破中常用的凸引理.

引理 6[15] 设 $\theta(t)$ 是二次连续可微的函数，且如下不等式成立：

$$\theta''(t)\theta(t)-(1+\beta)(\theta'(t))^2\geqslant 0,\qquad t>0,$$

其中 $\beta>0$ 且为常数. 若 $\theta(0)>0$，$\theta'(0)>0$，则 $\exists\, T_1$：$0<T_1<\dfrac{\theta(0)}{\beta\theta'(0)}$，使得 $\theta(t)\to\infty$，$t\to T_1$.

下面给出问题(1)弱解以及最大存在时间的定义.

定义 1 若 $T>0$，对于 $u=u(\boldsymbol{x},t)\in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$，如果 $\dfrac{u_t}{|\boldsymbol{x}|^2}\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$，$u(\boldsymbol{x},0)=u_0$，有

$$\left\langle\frac{u_t}{|\boldsymbol{x}|^4},w\right\rangle+\langle\Delta u,\Delta w\rangle=\langle|u|^{p-2}u\ln|u|,w\rangle,\qquad w\in H_0^2(\Omega),$$

则称 u 是问题(1)在 $\Omega\times[0,T)$ 上的弱解.

定义 2　若 $u(\boldsymbol{x},t)$ 是问题(1)的一个弱解，且对所有的 $t\in[0,T_{\max})$，有

$$\lim_{t\to T_{\max}}\left\|\frac{u(\boldsymbol{x},t)}{|\boldsymbol{x}|^2}\right\|_2^2=+\infty,$$

则称 $u(\boldsymbol{x},t)$ 在一个有限的时间 $T_{\max}$ 爆破，其中 $T_{\max}$ 是 $u(\boldsymbol{x},t)$ 的最大存在时间.

2　弱解的局部存在性

引理 7[6]　若 $N>4$，$2<p<\overline{p}$，初值 $u_{n0}(\boldsymbol{x})\in C_0^\infty(\Omega)(\forall n\in\mathbb{N}^+)$，则下列方程

$$\begin{cases}\rho_n(\boldsymbol{x})(u_n)_t+\Delta^2u_n=|u_n|^{p-2}u_n\ln|u_n|, & (\boldsymbol{x},t)\in\Omega\times(0,T),\\ u_n(\boldsymbol{x},t)=\Delta u_n(\boldsymbol{x},t)=0, & (\boldsymbol{x},t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ u_n(\boldsymbol{x},0)=u_{n0}, & \boldsymbol{x}\in\Omega\end{cases}\tag{6}$$

存在一个弱解 $u_n\in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$，$u_{nt}\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$，且满足下列等式：

$$\langle\rho_n(\boldsymbol{x})u_{nt},\varphi\rangle+\langle\Delta u_n,\Delta\varphi\rangle=\langle|u_n|^{p-2}u_n\ln|u_n|,\varphi\rangle,\qquad\forall\varphi\in H_0^2(\Omega).\tag{7}$$

注 2　由 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^2(\Omega)$ 中稠知，在 $H_0^2(\Omega)$ 中，$u_{n0}(\boldsymbol{x})\to u_0(\boldsymbol{x})$.

定理 1　设 $N>4$，$2<p<\overline{p}$，$u_0(\boldsymbol{x})\in H_0^2(\Omega)$，则存在常数 $T>0$，使得问题(1)在 $\Omega\times[0,T)$ 中有唯一一个弱解 $u(\boldsymbol{x},t)\in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$，且 $\dfrac{u_t}{|\boldsymbol{x}|^2}\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. 这里 $u(\boldsymbol{x},t)$ 满足如下能量等式：

$$\int_0^t\||\boldsymbol{x}|^{-2}u_\tau(\tau)\|_2^2\mathrm{d}\tau+J(u(t))=J(u_0),\qquad 0\leqslant t\leqslant T.\tag{8}$$

证明：证明分两个步骤.

步骤 1）弱解的局部存在性和能量等式.

首先，在式(7)中取 $\varphi=u_n$，并在 0 到 t 上积分，有

$$\frac12\||\rho_n(\boldsymbol{x})|^{1/2}u_n(t)\|_2^2+\int_0^t\|\Delta u_n(\tau)\|_2^2\mathrm{d}\tau=\frac12\||\rho_n(\boldsymbol{x})|^{1/2}u_n(0)\|_2^2+\int_0^t\int_\Omega|u_n(\tau)|^p\ln|u_n(\tau)|\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\tau.\tag{9}$$

设

$$S_n(t)=\frac12\||\rho_n(\boldsymbol{x})|^{1/2}u_n\|_2^2+\int_0^t\|\Delta u_n\|_2^2\mathrm{d}\tau,\tag{10}$$

与式(9)结合，有下列等式成立：

$$S_n(t)=S_n(0)+\int_0^t\int_\Omega|u_n|^p\ln|u_n|\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\tau.\tag{11}$$

下面对式(11)右端进行估计. 设 $\Omega_1=\{\boldsymbol{x}\in\Omega:|u_n|\geqslant1\}$，$\Omega_2=\{\boldsymbol{x}\in\Omega:|u_n|<1\}$，利用引理 3、引理 4 以及 Young 不等式，有

$$\begin{aligned}\int_\Omega|u_n|^p\ln|u_n|\mathrm{d}\boldsymbol{x}&=\int_{\Omega_1}|u_n|^p\ln|u_n|\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{\Omega_2}|u_n|^p\ln|u_n|\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\\&(\mathrm{e}\mu)^{-1}\|u_n\|_{p+\mu}^{p+\mu}\leqslant(\mathrm{e}\mu)^{-1}C_G\|\Delta u_n\|_2^{\theta(p+\mu)}\|u_n\|_2^{(1-\theta)(p+\mu)}\leqslant\\&(\mathrm{e}\mu)^{-1}C_G\varepsilon\|\Delta u_n\|_2^2+(\mathrm{e}\mu)^{-1}C_GC(\varepsilon)\|u_n\|_2^{2\alpha},\end{aligned}\tag{12}$$

其中 $\varepsilon\in(0,1)$，$2<p<\dfrac8N+2$，$0<\mu<\dfrac8N+2-p$ 且 $\alpha=\dfrac{4p+4\mu-Np-N\mu+2N}{8-N(p+\mu-2)}>1$. 结合注 1、式(10)～(12)可得

$$S_n(t)\leqslant C_1+C_2\int_0^t(S_n(\tau))^\alpha\mathrm{d}\tau,\tag{13}$$

其中 $C_1=\dfrac{S_n(0)}{1-(\mathrm{e}\mu)^{-1}C_G\varepsilon}$，$C_2=\dfrac{(\mathrm{e}\mu)^{-1}C_GC(\varepsilon)2^\alpha}{1-(\mathrm{e}\mu)^{-1}C_G\varepsilon}$. 直接计算式(13)可知，存在常数 $T>0$，使得对所有的

$t\in[0,T]$，都有

$$S_n(t)\leqslant C_T, \tag{14}$$

其中 C_T 是与 T 有关的常数. 在式(6)第一个等式两端同时乘 u_{nt} 并在 $\Omega\times(0,t)$ 上积分，有

$$\int_0^t \| |\rho_n(\boldsymbol{x})|^{1/2}u_{n\tau}(t)\|_2^2\mathrm{d}\tau+J(u_n(t))=J(u_{n0}),\qquad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{15}$$

由 $J(u)$ 的连续性及注2可得

$$J(u_{n0})\leqslant C. \tag{16}$$

结合式(3),(12),(14)～(16)可得

$$\begin{aligned}C\geqslant J(u_n(t))=&\frac{1}{2}\|\Delta u_n\|_2^2+\frac{1}{p^2}\|u_n\|_p^p-\frac{1}{p}\int_\Omega|u_n|^p\ln|u_n|\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\\&\frac{1}{2}\|\Delta u_n\|_2^2+\frac{1}{p^2}\|u_n\|_p^p-\frac{C_G\varepsilon}{p\mathrm{e}\mu}\|\Delta u_n\|_2^2-\frac{C_GC(\varepsilon)}{p\mathrm{e}\mu}\|u_n\|_2^{2\alpha}\geqslant\\&\left(\frac{1}{2}-\frac{C_G\varepsilon}{p\mathrm{e}\mu}\right)\|\Delta u_n\|_2^2+\frac{1}{p^2}\|u_n\|_p^p-\frac{C_GC(\varepsilon)C(\Omega)2^\alpha}{p\mathrm{e}\mu}(C_T)^\alpha,\end{aligned}$$

即

$$\|\Delta u_n\|_2^2+\|u_n\|_p^p\leqslant C. \tag{17}$$

由式(15)～(17)可得如下估计：

$$\|u_n\|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))}\leqslant C, \tag{18}$$

$$\||\rho_n(x)|^{1/2}u_{nt}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\leqslant C, \tag{19}$$

类似注1并由估计式(18)，可得

$$\|u_{nt}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\leqslant C. \tag{20}$$

结合式(18),(20)及 Aubin-Lions-Simon 定理[16]可知，u_n 在 $C(0,T;L^2(\Omega))$ 中强收敛. 所以当 $n\to\infty$ 时，有 $u_n(\boldsymbol{x},0)\to u(\boldsymbol{x},0)$，a.e.于 Ω. 由注2及极限的唯一性知 $u(\boldsymbol{x},0)=u_0$.

另一方面，经直接计算并结合引理3，得

$$\begin{aligned}\int_\Omega||u_n|^{p-2}u_n\ln|u_n||^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}=&\int_{\Omega_1}||u_n|^{p-2}u_n\ln|u_n||^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{\Omega_2}||u_n|^{p-2}u_n\ln|u_n||^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\\&(\mathrm{e}\mu)^{-2}\|u_n\|_{2(p-1+\mu)}^{2(p-1+\mu)}+[\mathrm{e}(p-1)]^{-2}|\Omega|\leqslant\\&(\mathrm{e}\mu)^{-2}B_2\|\Delta u_n\|_2^{2(p-1+\mu)}+[\mathrm{e}(p-1)]^{-2}|\Omega|<C,\end{aligned} \tag{21}$$

其中 B_2 是 $H_0^2(\Omega)$ 到 $L^{2(p-1+\mu)}(\Omega)$ 的最佳嵌入常数，$0<\mu\leqslant\dfrac{4}{N-4}+2-p$，$p<\dfrac{4}{N-4}+2$.

结合上述先验估计式(18)～(21)可知，存在函数 u 和 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 的子序列(不妨仍记为其本身)，使得当 $n\to\infty$ 时有：$u_n\to u$ 在 $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$ 中弱 * 收敛，$|\rho_n(x)|^{1/2}u_{nt}\to\dfrac{u_t}{|\boldsymbol{x}|^2}$ 在 $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ 中弱收敛；$|u_n|^{p-2}u_n\ln|u_n|\to|u|^{p-2}u\ln|u|$ 在 $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ 中弱 * 收敛. 借助上述收敛性，在式(7)中令 $n\to\infty$，有

$$\langle|\boldsymbol{x}|^{-4}u_t,\varphi\rangle+\langle\Delta u,\Delta\varphi\rangle=\langle|u|^{p-2}u\ln|u|,\varphi\rangle,\qquad\varphi\in H_0^2(\Omega),$$

则易知 u 是问题(1)在 $\Omega\times[0,T)$ 上的一个弱解. 在问题(1)第一个等式两端同时乘 u_t 并在 $\Omega\times(0,t)$ 上积分，可得能量等式(8).

步骤2) 唯一性.

设问题(1)有两个不同的解 u_1,u_2，其满足相同的初值条件：$u_1(\boldsymbol{x},0)=u_2(\boldsymbol{x},0)=u_0\in H_0^2(\Omega)$. 设 $v=u_1-u_2$，则 $v(0)=0$，且

$$\left\langle\frac{v_t}{|\boldsymbol{x}|^4},w\right\rangle+\langle\Delta v,\Delta w\rangle=\langle|u_1|^{p-2}u_1\ln|u_1|-|u_2|^{p-2}u_2\ln|u_2|,w\rangle,\qquad\forall w\in H_0^2(\Omega). \tag{22}$$

在式(22)中取 $w=v$，并在 $[0,t]$ 上积分，有

$$\frac{1}{2}\||\boldsymbol{x}|^{-2}v\|_2^2+\int_0^t\|\Delta v\|_2^2\mathrm{d}\tau=\int_0^t\int_\Omega\frac{|u_1|^{p-2}u_1\ln|u_1|-|u_2|^{p-2}u_2\ln|u_2|}{v}v^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\tau,$$

结合注 1，有

$$\| v \|_2^2 \leqslant 2M\int_0^t\int_\Omega \frac{f(u_1)-f(u_2)}{v}v^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\tau,$$

其中 M 是一常数，$f(s)=|s|^{p-2}s\ln|s|$ 在 $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 上是局部 Lipschitz 连续的，结合 Gronwall 不等式得到弱解的唯一性.

3　解的整体存在性和衰减估计

定理 2　若 $u_0\in W^+$，则问题(1)当 $t\geqslant 0$ 时有一个整体弱解 $u(\boldsymbol{x},t)\in W^+$，且弱解的衰减估计为

$$\| \Delta u(t) \|_2^2 \leqslant \| \Delta u_0 \|_2^2 \mathrm{e}^{1-(2C_3/R_N)t},\qquad t\geqslant 0,\tag{23}$$

其中 $C_3=1-\left(\dfrac{d}{J(u_0)}\right)^{2/p-1}$.

证明：已知 $W^+=W_1^+\cup W_2^+$，下面分两种情形证明.

情形 1）$u_0\in W_1^+$.

结合 $J(u_0)<d$ 和能量等式(8)，有

$$\int_0^t \| |\boldsymbol{x}|^{-2}u_\tau(\tau) \|_2^2\mathrm{d}\tau+J(u(t))=J(u_0)<d,\qquad 0\leqslant t\leqslant T_{\max},\tag{24}$$

其中 $T_{\max}$是最大存在时间. 下面证明对任意的 $t\in[0,T_{\max})$，有 $u(\boldsymbol{x},t)\in W_1^+$. 若不然，由 $u(\boldsymbol{x},t)$的连续性可知，存在 $t_0\in(0,T_{\max})$，使得 $u(\boldsymbol{x},t_0)\in\partial W_1^+$，即

$$J(u(t_0))=d,\tag{25}$$

或

$$I(u(t_0))=0.\tag{26}$$

显然，式(25)与式(24)矛盾，如果式(26)成立，则根据井深 d 的定义可得 $J(u(t_0))\geqslant d$，与式(24)矛盾. 因此，对所有的 $t\in[0,T_{\max})$有 $u(\boldsymbol{x},t)\in W_1^+$ 成立.

结合式(5),(24)和 W_1^+的定义可知

$$\int_0^t \| |\boldsymbol{x}|^{-2}u_\tau(\tau) \|_2^2\mathrm{d}\tau+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\| \Delta u \|_2^2+\frac{1}{p^2}\| u \|_p^p<d.\tag{27}$$

注意到式(27)的右端常数 d 不依赖于 T，故对任意的 $T>0$，可取 $T_{\max}=T=+\infty$，再由上述不等式可知，问题(1)在 $\Omega\times(0,t)$上有一个整体弱解 $u(\boldsymbol{x},t)$.

下面证明问题(1)的衰退估计. 由式(5)和 $u(t)\in W_1^+$，可得

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\| \Delta u \|_2^2+\frac{1}{p^2}\| u \|_p^p\leqslant J(u)\leqslant J(u_0)<d.\tag{28}$$

取 $\lambda_0=\max\{(\lambda^*)^2,(\lambda^*)^p\}$，直接计算可得

$$(\lambda^*)^p\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\| \Delta u \|_2^2+\frac{1}{p^2}\| u \|_p^p\right\}\geqslant J(\lambda^* u(t))\geqslant d.$$

结合式(28)可得

$$\lambda_0\geqslant\frac{d}{J(u_0)}>1.$$

因此，可推断 $\lambda_*>1$，即

$$\lambda^*\geqslant\left(\frac{d}{J(u_0)}\right)^{1/p}>1.\tag{29}$$

另一方面，根据 $I(u)$的定义，可得

$$\begin{aligned}0=I(\lambda^* u)&=(\lambda^*)^2\| \Delta u \|_2^2-(\lambda^*)^p\int_\Omega |u|^p\ln|u|\,\mathrm{d}x-(\lambda^*)^p\ln(\lambda^*)\| u \|_p^p=\\&(\lambda^*)^pI(u)-[(\lambda^*)^p-(\lambda^*)^2]\| \Delta u \|_2^2-(\lambda^*)^p\ln(\lambda^*)\| u \|_p^p.\end{aligned}\tag{30}$$

结合(29),(30)可得

$$I(u)=\| u \|_p^p\ln(\lambda^*)+[1-(\lambda_*)^{2-p}]\| \Delta u \|_2^2\geqslant C_3\| \Delta u \|_2^2,\tag{31}$$

其中 $C_3=1-\left(\dfrac{d}{J(u_0)}\right)^{2/p-1}$.

由式(4)和引理 2，有

$$\int_t^T I(u)\mathrm{d}s=\int_t^T\left(\|\Delta u\|_2^2-\int_\Omega |u|^p\ln|u|\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}s=-\frac{1}{2}\int_t^T\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\||\boldsymbol{x}|^{-2}u\|_2^2\right)\mathrm{d}s=$$
$$\frac{1}{2}\||\boldsymbol{x}|^{-2}u(t)\|_2^2-\frac{1}{2}\||\boldsymbol{x}|^{-2}u(T)\|_2^2\leqslant$$
$$\frac{1}{2}\||\boldsymbol{x}|^{-2}u(t)\|_2^2\leqslant\frac{R_N}{2}\|\Delta u(t)\|_2^2. \tag{32}$$

结合式(31),(32)，有

$$\int_t^T\|\Delta u(s)\|_2^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{R_N}{2C_3}\|\Delta u(t)\|_2^2,\qquad \forall t\in[0,T]. \tag{33}$$

令不等式(33)中的 $T\to\infty$，再利用引理 5，可得衰减估计式(23).

情形 2) $u_0\in W_2^+$.

为证明此时问题(1)弱解的整体存在性，采用逼近的方法. 为此，令 $\{\theta_m\}_{m=1}^\infty\subset(0,1)$，使得 $\lim\limits_{m\to\infty}\theta_m=1$，并考虑以下初边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{u_t}{|\boldsymbol{x}|^4}+\Delta^2 u=|u|^{p-2}u\ln|u|, & \boldsymbol{x}\in\Omega,\quad t>0,\\ u(\boldsymbol{x},t)=\Delta u(\boldsymbol{x},t)=0, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\quad t>0,\\ u(\boldsymbol{x},0)=u_{0m}=\theta_m u_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\Omega.\end{cases}$$

注意 $I(\lambda(u_0))=I(u_0)>0$，则 $\lambda=1$. 由引理 1 中 4)知，存在唯一的 $\lambda^*>\lambda=1$ ，使得 $I(\lambda_* u_0)=0$. 于是，由 $\theta_m<1<\lambda_*$ 可推断出 $I(u_{0m})=I(\theta_m u_0)>0$，$J(u_{0m})=J(\theta_m u_0)<d$. 表明 $u_{0m}\in W_1^+$. 余下的证明与情形 1)的证明类似，故略. 证毕.

4 解的爆破性质

下面证明问题(1)的弱解在有限时刻爆破，并给出爆破时间的上界和下界. 设

$$L(t)=\frac{1}{2}\||\boldsymbol{x}|^{-2}u(t)\|_2^2.$$

定理 3 若 $u_0\in W_1^-$，$2<p<\overline{p}$，$u(\boldsymbol{x},t)$是问题(1)的弱解，则 $u(\boldsymbol{x},t)$在有限时间爆破，且爆破时间满足如下估计：

$$T_{\max}\leqslant\frac{\beta b^2}{(p-2)\beta b-\||\boldsymbol{x}|^{-2}u(0)\|_2^2}, \tag{34}$$

其中 $\beta\in\left(0,\dfrac{p(d-J(u_0))}{p-1}\right]$，$b>\max\left\{0,\dfrac{\||\boldsymbol{x}|^{-2}u(0)\|_2^2}{(p-2)\beta}\right\}$.

证明：设 $u_0\in W_1^-$，$u(\boldsymbol{x},t)$是问题(1)的弱解. 用与定理 2 中相同的方法可证明 $u_0\in W_1^-$ 时有 $u(\boldsymbol{x},t)\in W_1^-$. 于是将 $I(u)<0$ 与引理 1 中 4)相结合，可知存在 $\lambda^*<1$，使得 $I(\lambda^* u)=0$，从而

$$d\leqslant J(\lambda^* u)=\frac{1}{p}I(\lambda^* u)+(\lambda^*)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|\Delta u\|_2^2+\frac{(\lambda^*)^p}{p^2}\|u\|_p^p<$$
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|\Delta u\|_2^2+\frac{1}{p^2}\|u\|_p^p. \tag{35}$$

假设 $u(\boldsymbol{x},t)$是问题(1)的全局弱解，即 $T_{\max}=+\infty$. 定义正函数

$$F(t)=\int_0^t L(\tau)\mathrm{d}\tau+(T-t)L(0)+\frac{\beta}{2}(t+b)^2, \tag{36}$$

求导可得

$$F'(t)=L(t)-L(0)+\beta(t+b)=\int_0^t L'(\tau)\mathrm{d}\tau+\beta(t+b)=$$

$$\int_0^t\int_\Omega |\boldsymbol{x}|^{-4}u\cdot u_\tau \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\tau+\beta(t+b), \tag{37}$$

$$F''(t)=L'(t)+\beta=-I(u)+\beta=-pJ(u)+\left(\frac{p}{2}-1\right)\|\Delta u\|_2^2+\frac{1}{p}\|u\|_p^p+\beta. \tag{38}$$

由式(36)～(38)可得

$$F(t)F''(t)-(1+\theta)[F'(t)]^2=F(t)F''(t)+(1+\theta)\times$$
$$\left\{H(t)-[2F(t)-2(T-t)L(0)]\left(\int_0^t\||\boldsymbol{x}|^{-2}u_\tau\|_2^2\mathrm{d}\tau+\beta\right)\right\}, \tag{39}$$

其中

$$H(t)=\left[\int_0^t\||\boldsymbol{x}|^{-2}u\|_2^2\mathrm{d}\tau+\beta(t+b)^2\right]\cdot\left[\int_0^t\||\boldsymbol{x}|^{-2}u_\tau\|_2^2\mathrm{d}\tau+\beta\right]-$$
$$\left[\int_0^t\int_\Omega|\boldsymbol{x}|^{-4}uu_\tau\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\tau+\beta(t+b)\right]^2.$$

借助于 Cauchy-Schwarz 不等式、Young 不等式和 Hölder 不等式可得 $H(t)\geqslant 0$. 因此，取 $\theta=\frac{p-2}{2}>0$，再结合问题(1)、式(35)，(39)和 $H(t)$的非负性，有

$$F(t)F''(t)-\frac{p}{2}[F'(t)]^2\geqslant F(t)[p(d-J(u_0))+(1-p)\beta],$$

从而对任意的 $t\in(0,T_{\max})$和 $\beta\in\left(0,\frac{p(d-J(u_0))}{p-1}\right]$，有

$$F(t)F''(t)-(1-\theta)[F'(t)]^2\geqslant 0.$$

再结合引理 6，有 $F(0)>0$，$F'(0)=\beta b>0$，则 $\exists\, T_1$：$0<T_1<\frac{2F(0)}{(p-2)F'(0)}$，使得 $F(t)\to\infty$，$t\to T_1$，于是有式(34)成立.

定理 4 若 $u_0\in W^-$，$2<p<\bar{p}$，$u(\boldsymbol{x},t)$是问题(1)的弱解，在 T_* 处时刻爆破，则

$$T_*\geqslant\frac{L^{1-\alpha}(0)}{C_L(\alpha-1)}, \tag{40}$$

其中 $\alpha=\frac{4p+4\mu-Np-N\mu+2N}{8-N(p+\mu-2)}$，$C_L=[2C(\Omega)]^\alpha(\mathrm{e}\mu)^{-1}C_GC(\varepsilon)$.

证明：由 $I(u)$和 $L(t)$的定义，有

$$L'(t)=\int_\Omega|\boldsymbol{x}|^{-4}u\cdot u_t\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-\|\Delta u\|_2^2+\int_\Omega|u|^p\ln|u|\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-I(u)>0. \tag{41}$$

结合式(12)和式(41)可得

$$L'(t)=-\|\Delta u\|_2^2+\int_\Omega|u|^p\ln|u|\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant$$
$$((\mathrm{e}\mu)^{-1}C_G\varepsilon-1)\|\Delta u\|_2^2+(\mathrm{e}\mu)^{-1}C_GC(\varepsilon)\|u\|_2^{2\alpha}, \tag{42}$$

由于$(\mathrm{e}\mu)^{-1}C_G\varepsilon-1<0$，因此式(42)可化为

$$L'(t)\leqslant(\mathrm{e}\mu)^{-1}C_GC(\varepsilon)\|u\|_2^{2\alpha}\leqslant C_LL^\alpha(t), \tag{43}$$

其中 $C_L=[2C(\Omega)]^\alpha(\mathrm{e}\mu)^{-1}C_GC(\varepsilon)$. 对不等式(43)两端在 0 到 t 上积分，可得

$$\frac{1}{1-\alpha}[L^{1-\alpha}(t)-L^{1-\alpha}(0)]\leqslant C_Lt, \tag{44}$$

令式(44)中 $t\to T_*$，则有式(40).

参 考 文 献

[1] KING B B, STEIN O, WUNKLER M. A Fourth-Order Parabolic Equation Modeling Epitaxial Thin-Film Growth [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 286(2): 459-490.

[2] 廖祥永，高艳超. 一类具有超线性源项四阶双曲方程解的存在性及爆破时间估计 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2021，59(3)：551-554. (LIAO X Y, GAO Y C. Existence and Blow-up Time Estimates of Solution for a Class of

Fourth Order Hyperbolic Equations with Superlinear Source Terms [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2021, 59(3): 551-554.)

[3] ZHOU J. Blow-up for a Thin-Film Equation with Positive Initial Energy [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 446(1): 1133-1138.

[4] CAO Y, LIU C H. Global Existence and Non-extinction of Solutions to a Fourth-Order Parabolic Equation [J]. Applied Mathematics Letters, 2016, 61: 20-25.

[5] LI Q W, GAO W J, HAN Y Z. Global Existence Blow up and Extinction for a Class of Thin-Film Equation [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2016, 147: 96-109.

[6] LI P P, LIU C C. A Class of Fourth-Order Parabolic Equation with Logarithmic Nonlinearity [J/OL]. Journal of Inequalities and Applications, (2018-11-27)[2023-04-30]. https://doi.org/10.1186/s13660-018-1920-7.

[7] 韩玉柱，高文杰，石小葳. 一类具对数非线性项的薄膜方程 [J]. 中国科学: 数学, 2019, 49(12): 1765-1778. (HAN Y Z, GAO W J, SHI X W. A Class of Thin-Film Equations with Logarithmic Nonlinearity [J]. Scientia Sinica: Mathematica, 2019, 49(12): 1765-1778.)

[8] 武宇宇，高云柱. 具对数非线性项的 Kirchhoff 型黏弹性波动方程解的爆破性质 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2023, 61(6): 1279-1286. (WU Y Y, GAO Y Z. Property of Blow up of Solutions for Kirchhoff Type Viscoelastic Wave Equations with Logarithmic Nonlinear Term [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2023, 61(6): 1279-1286.)

[9] LE C N, LE X T. Global Solution and Blow-up for a Class of p-Laplacian Evolution Equations with Logarithmic Nonlinearity [J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2017, 151(1): 149-169.

[10] 吴秀兰，杨晓新. 一类带有奇异项和对数非局部源的抛物方程解的性质 [J]. 吉林师范大学学报(自然科学版), 2023, 44(4): 70-78. (WU X L, YANG X X. Study on the Solution of a Singular Nonlocal Parabolic Equation with Logarithmic Nonlinearity [J]. Journal of Jilin Normal University (Natural Science Edition), 2023, 44(4): 70-78.)

[11] LIAN W, WANG J, XU R Z. Global Existence and Blow up of Solutions for Pseudo-parabolic Equation with Singular Potential [J]. Journal of Differential Equations, 2020, 269(6): 4914-4959.

[12] 宋玉坤，蔡琳，邢迪. 具色散非线性波动方程解的存在性与爆破 [J]. 东北师大学报(自然科学版), 2023, 55(2): 16-19. (SONG Y K, CAI L, XING D. The Existence and Blow-up of Solutions for Nonlinear Wave Equations with Dispersion Term [J]. Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition), 2023, 55(2): 16-19.)

[13] DO T D, TRONG N N, THANH B L T. On a Higher-Order Reaction-Diffusion Equation with a Special Medium Void via Potential Well Method [J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2023, 27(1): 53-79.

[14] THANH B L T, TRONG N N, DO T D. Blow-up Estimates for a Higher-Order Reaction-Diffusion Equation with a Special Diffusion Process [J]. Journal of Elliptic and Parabolic Equations, 2021, 7: 891-904.

[15] LEVINE H A. Some Nonexistence and Instability Theorems for Solutions of Formally Parabolic Equations of the Form $Pu_t=-Au+\mathscr{F}(u)$ [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1973, 51(5): 371-386.

[16] SIMON J. Compact Sets in the Space $L^p(0,T;B)$ [J]. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 1986, 146(4): 65-96.

(责任编辑: 赵立芹)