

基于滑模函数分数阶 Rikitake 混沌系统 3 个同步方案设计

孟金涛, 毛北行, 王东晓, 焦建锋, 陈 灿

(郑州航空工业管理学院 数学学院, 郑州 450046)

摘要: 用滑模同步理论和滑模动态方法研究分数阶 Rikitake 不确定混沌系统滑模同步, 绘制 Rikitake 混沌系统吸引子相图, 根据分数阶微积分, 构造 3 个滑模函数, 给出 3 个同步方案, 并对 3 个同步方案进行对比和分析. 结果表明: 分数阶 Rikitake 不确定混沌系统在一定条件下可取得滑模同步.

关键词: 分数阶; 滑模; 同步; 混沌系统

中图分类号: O415.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)02-0595-06

Design of Three Synchronization Schemes of Fractional-Order Rikitake Chaotic Systems Based on Sliding Mode Functions

MENG Jintao, MAO Beixing, WANG Dongxiao, JIAO Jianfeng, CHEN Can
(School of Mathematics, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou 450046, China)

Abstract: By using sliding mode synchronization theory and sliding mode dynamic methods, we studied sliding mode synchronization of fractional-order Rikitake uncertain chaotic systems and drew the attractor phase diagrams of Rikitake chaotic systems. According to fractional-order calculus, we constructed three sliding mode functions, gave three synchronization schemes, and compared and analyzed three synchronization schemes. The results show that fractional-order Rikitake uncertain chaotic system can achieve sliding mode synchronization under certain conditions.

Keywords: fractional-order; sliding mode; synchronization; chaotic system

由于混沌系统具有随机性、不确定性、初值敏感性和非线性性^[1-3], 因此人们提出和研究了形式各异的实际系统, 如 Lorenz 系统^[1]、Chen 系统^[2]、LÜ 系统^[3]、分数阶系统^[4-5]、Rucklidge 系统^[6]、高维系统^[7]、有限时间系统^[8]、自适应滑模系统^[9-10]和 Rikitake 系统^[11-14]等. 为解决实际物理系统的不确定性和参数依赖性, 人们提出了多种研究方法, 由于滑模同步可较好解决和处理来自系统的非线性, 因此已引起人们广泛关注. 如文献[4]通过设计积分滑模函数研究了混沌系统的积分滑模同步, 给出了一种新型滑模同步方式; 文献[5]研究了混沌系统的模糊滑模同步, 通过定义模糊规则给出了模糊滑模面的设计和控制器的选取; 文献[6-7]研究了混沌系统的自适应滑模同步, 通过设计自适应规则和滑模函数给出了主从系统自适应滑模同步的充分条件; 文献[8]研究了分数阶混沌系统的有限时间滑模同步, 在设计滑模函数取得同步的同时给出了同步时间; 文献[9]研究了分数阶永磁同步电机混沌系统的自适应滑模同步, 给出了自适应规则 and 控制器; 文献[10]研究了分数阶 Sprott-D 混沌系统

收稿日期: 2023-09-11.

第一作者简介: 孟金涛(1980—), 男, 汉族, 硕士, 副教授, 从事复杂网络和混沌同步的研究, E-mail: mjint@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12401655)和河南省高等学校重点科研项目(批准号: 24ZX008).

自适应滑模同步问题,给出了滑模函数构造的 3 个设计方案;文献[11]研究了 Rikitake 双圆盘耦合发电机系统的动力学行为;文献[12]研究了带摩擦的 Rikitake 双盘发电机混沌系统的同步,给出了系统取得混沌同步的充分条件;文献[13]研究了分数阶 Rikitake 系统的混沌控制;文献[14]研究了分数阶 Rikitake 混沌系统的自适应滑模同步,针对 Rikitake 混沌系统设计了 3 个控制器.在此基础上,本文研究分数阶 Rikitake 混沌系统滑模同步,给出滑模同步的 3 个控制方案,其中方案 1 设计的是传统滑模函数,需设计 3 个控制器,方案 2 和方案 3 通过设计适当的滑模面,仅需 2 个控制器即可使分数阶 Rikitake 混沌系统取得滑模同步,并对 3 个方案进行比较.

1 系统描述

定义 1^[15] Caputo 分数阶导数定义为

$$D_t^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-q-1} x^{(n)}(\tau) d\tau, \quad n-1 < q < n \in \mathbb{Z}^+.$$

分数阶 Rikitake 混沌系统的状态方程^[14]为

$$\begin{cases} D_t^q x = -\mu x + yz, \\ D_t^q y = -\mu y + (z-a)x, \\ D_t^q z = 1 - xy. \end{cases} \quad (1)$$

当初始值为(1,2,3),参数 $\mu=2$, $a=5$, $q=0.99$ 时,系统(1)的吸引子相图如图 1 所示.

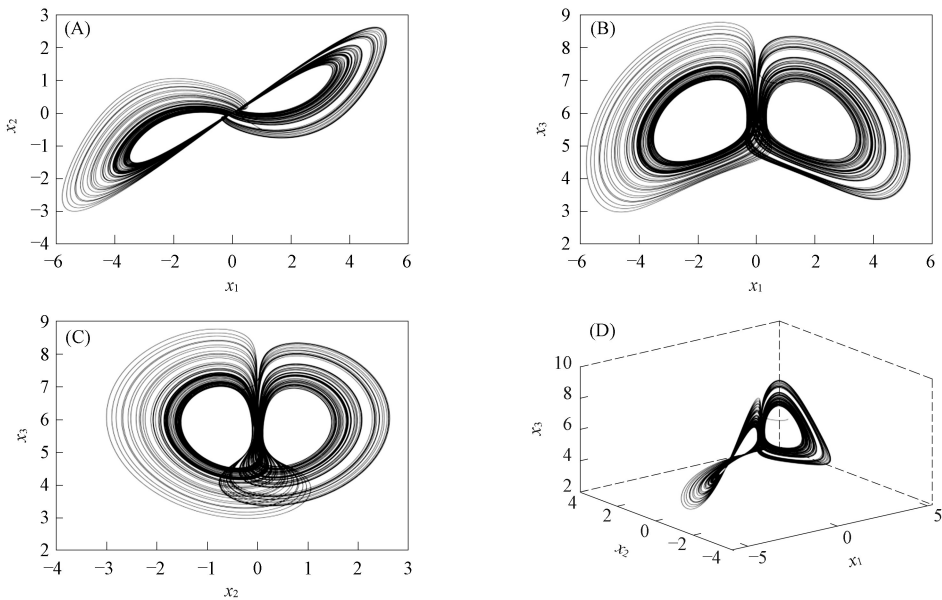


图 1 系统(1)的吸引子相图

Fig. 1 Attractor phase diagrams of system (1)

以系统(1)为主系统,设计从系统为

$$\begin{cases} D_t^q x_1 = -\mu x_1 + y_1 z_1 + u_1, \\ D_t^q y_1 = -\mu y_1 + (z_1 - a)x_1 + u_2, \\ D_t^q z_1 = 1 - x_1 y_1 + u_3, \end{cases} \quad (2)$$

其中 u_1, u_2, u_3 为控制器.定义 $e_1 = x_1 - x$, $e_2 = y_1 - y$, $e_3 = z_1 - z$,可得

$$\begin{cases} D_t^q e_1 = -\mu e_1 + y_1 z_1 - yz + u_1, \\ D_t^q e_2 = -\mu e_2 + z_1 x_1 - zx - ae_1 + u_2, \\ D_t^q e_3 = -x_1 y_1 + xy + u_3. \end{cases} \quad (3)$$

引理 1^[16] 若 $x(t)$ 为连续可微函数,则对 $\forall q \in (0,1)$,有 $\frac{1}{2} D_t^q x^2(t) \leq x^T(t) D_t^q x(t)$.

引理 2^[16-17] 设 $V(t) = \frac{1}{2}(y_1^2(t) + y_2^2(t))$, 若存在常数 $k > 0$, 使得 $D_t^q V(t) \leq -ky_1^2(t)$, 则 $y_1^2(t) \leq 2V(0)E_{q,1}(-2kt^q)$, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_1(t)\| = 0$.

2 主要结果

定理 1 设计滑模函数 $s(t) = e_1 + e_2 + e_3$, 3 个控制器分别为

$$u_1 = yz - y_1 z_1, \quad u_2 = zx - z_1 x_1 + ae_1, \quad u_3 = x_1 y_1 - xy - \mu e_3 - \eta |s| \operatorname{sgn} s,$$

则主从系统(1)和(2)取得滑模同步.

证明: 当在滑模面上运动时, 满足 $s=0$, 将控制器 u_1 代入式(3)可得 $D_t^q e_1 = -\mu e_1$, 因此 $e_1 \rightarrow 0$. 将 u_2 代入式(3)可得 $D_t^q e_2 = -\mu e_2 \Rightarrow e_2 \rightarrow 0$. 将 u_3 代入式(3)可得 $D_t^q e_3 = -\mu e_3$, 因而 $e_3 \rightarrow 0$.

当不在滑模面上运动时, 构造函数 $V(t) = s^2/2$, 由引理 1, 求分数阶导数可得

$$\begin{aligned} D_t^q V(t) &\leq sD_t^q s = sD_t^q(e_1 + e_2 + e_3) = \\ &s[(-\mu e_1 + y_1 z_1 - yz + u_1) + \\ &(-\mu e_2 + z_1 x_1 - zx - ae_1 + u_2) + (-x_1 y_1 + xy + u_3)] = \\ &s[-\mu(e_1 + e_2 + e_3) - \eta |s| \operatorname{sgn} s] = -(\mu + \eta) |s|^2, \end{aligned}$$

根据引理 2 可得 $s \rightarrow 0$, 从而滑模面趋近于原点.

以系统(1)为主系统, 设计从系统为

$$\begin{cases} D_t^q x_1 = -\mu x_1 + y_1 z_1 + u_1, \\ D_t^q y_1 = -\mu y_1 + (z_1 - a)x_1, \\ D_t^q z_1 = 1 - x_1 y_1 + u_2, \end{cases} \quad (4)$$

其中 u_1, u_2 为控制器. 定义 $e_1 = x_1 - x, e_2 = y_1 - y, e_3 = z_1 - z$, 可得

$$\begin{cases} D_t^q e_1 = -\mu e_1 + y_1 z_1 - yz + u_1, \\ D_t^q e_2 = -\mu e_2 + z_1 x_1 - zx - ae_1, \\ D_t^q e_3 = -x_1 y_1 + xy + u_2. \end{cases} \quad (5)$$

定理 2 设计滑模函数 $s(t) = e_1 + e_3$, 2 个控制器分别为

$$u_1 = yz - y_1 z_1 - \eta |s| \operatorname{sgn} s, \quad u_2 = x_1 y_1 - xy - \mu e_3,$$

则主从系统(1)和(4)取得滑模同步.

证明: 当在滑模面上运动时, 满足 $s=0$, 将控制器 u_1 代入式(5)可得 $D_t^q e_1 = -\mu e_1$, 因此 $e_1 \rightarrow 0$. 由 $s(t) = e_1 + e_3 = 0 \Rightarrow e_3 = -e_1 \Rightarrow e_3 \rightarrow 0$, 根据式(5)第二个方程可得

$$\begin{aligned} D_t^q e_2 &= -\mu e_2 + z_1 x_1 - zx - ae_1, \\ z_1 x_1 - zx &= (z_1 x_1 - z_1 x) + (z_1 x - zx) = z_1 e_1 + x e_3. \end{aligned}$$

由于混沌系统轨迹有界, 且 $e_1, e_3 \rightarrow 0$, 因此 $z_1 x_1 - zx \rightarrow 0$, 式(5)第二个方程可写为 $D_t^q e_2 = -\mu e_2$, 从而 $e_2 \rightarrow 0$.

当不在滑模面上运动时, 构造函数 $V(t) = s^2/2$, 由引理 1, 求分数阶导数可得

$$\begin{aligned} D_t^q V(t) &\leq sD_t^q s = sD_t^q(e_1 + e_3) = \\ &s[(-\mu e_1 + y_1 z_1 - yz + u_1) + (-x_1 y_1 + xy + u_2)] = \\ &s[-\mu(e_1 + e_3) - \eta |s| \operatorname{sgn} s] = -(\mu + \eta) |s|^2, \end{aligned}$$

根据引理 2 可得 $s \rightarrow 0$, 从而滑模面具有可达性和稳定性.

以系统(1)为主系统, 设计从系统为

$$\begin{cases} D_t^q x_1 = -\mu x_1 + y_1 z_1, \\ D_t^q y_1 = -\mu y_1 + (z_1 - a)x_1 + u_1, \\ D_t^q z_1 = 1 - x_1 y_1 + u_2, \end{cases} \quad (6)$$

其中 u_1, u_2 为控制器. 定义 $e_1 = x_1 - x, e_2 = y_1 - y, e_3 = z_1 - z$, 可得

$$\begin{cases} D_t^q e_1 = -\mu e_1 + y_1 z_1 - yz, \\ D_t^q e_2 = -\mu e_2 + z_1 x_1 - zx - ae_1 + u_1, \\ D_t^q e_3 = -x_1 y_1 + xy + u_2. \end{cases} \quad (7)$$

定理 3 设计滑模函数 $s(t) = e_2 + e_3$, 2 个控制器分别为

$$u_1 = -z_1 x_1 + zx + ae_1, \quad u_2 = x_1 y_1 - xy - \mu e_3 - \eta |s| \operatorname{sgn} s,$$

则主从系统(1)和(6)取得滑模同步。

证明: 当在滑模面上运动时, 满足 $s=0$, 将控制器 u_1 代入式(7)可得 $D_t^q e_2 = -\mu e_2$, 因此 $e_2 \rightarrow 0$. 由 $s(t) = e_2 + e_3 = 0 \Rightarrow e_3 = -e_2 \Rightarrow e_3 \rightarrow 0$, 根据式(7)第一个方程可得

$$D_t^q e_1 = -\mu e_1 + y_1 z_1 - yz,$$

$$y_1 z_1 - yz = (y_1 z_1 - y_1 z) + (y_1 z - yz) = y_1 e_3 + ze_2,$$

由于混沌系统轨迹有界, 且 $e_2, e_3 \rightarrow 0$, 因此 $y_1 z_1 - yz \rightarrow 0$, 式(7)第一个方程可写为 $D_t^q e_1 = -\mu e_1$, 从而 $e_1 \rightarrow 0$.

当不在滑模面上运动时, 构造函数 $V(t) = s^2/2$, 由引理 1, 求分数阶导数可得

$$D_t^q V(t) \leq s D_t^q s = s D_t^q (e_2 + e_3) = s [(-\mu e_2 + z_1 x_1 - zx - ae_1 + u_1) + (-x_1 y_1 + xy + u_2)] = s [-\mu(e_2 + e_3) - \eta |s| \operatorname{sgn} s] = -(\mu + \eta) |s|^2,$$

根据引理 2 可得 $s \rightarrow 0$, 从而分数阶 Rikitake 主从系统取得滑模同步。

3 数值仿真

用 MATLAB 进行数值仿真, 参数分别为 $q=0.99, \mu=2, a=5$. 初始值设为 $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 2, 3); (x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (3, 1, 1)$.

在定理 1 条件下, 构造滑模函数 $s(t) = e_1 + e_2 + e_3$, 控制器分别为 $u_1 = yz - y_1 z_1, \eta=2, u_2 = zx - z_1 x_1 + ae_1, u_3 = x_1 y_1 - xy - \mu e_3 - \eta |s| \operatorname{sgn} s$. 在定理 2 条件下, 构造滑模函数构造 $s(t) = e_1 + e_3$, 控制器分别为 $u_1 = yz - y_1 z_1 - \eta |s| \operatorname{sgn} s, u_2 = x_1 y_1 - xy - \mu e_3, \eta=1.5$. 在定理 3 条件下, 构造滑模函数 $s(t) = e_2 + e_3$, 控制器分别为 $u_1 = -z_1 x_1 + zx + ae_1, \eta=1.2, u_2 = x_1 y_1 - xy - \mu e_3 - \eta |s| \operatorname{sgn} s$.

定理 1、定理 2 和定理 3 的系统误差曲线分别如图 2~图 4 所示. 定理 1、定理 2 和定理 3 中加入控制器后的变化曲线分别如图 5~图 7 所示.

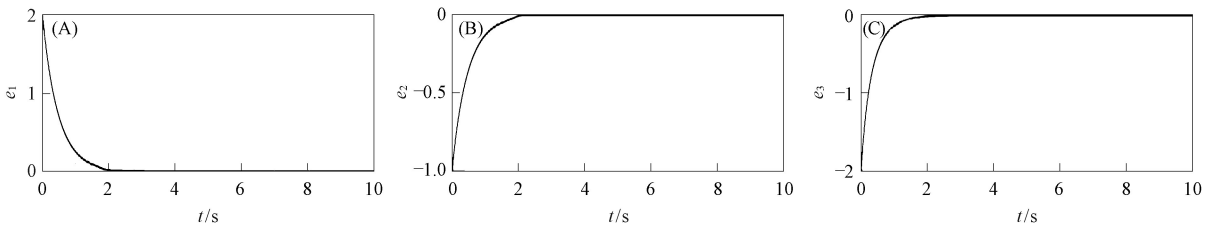


图 2 定理 1 中的系统误差曲线

Fig. 2 Systematic error curves in theorem 1

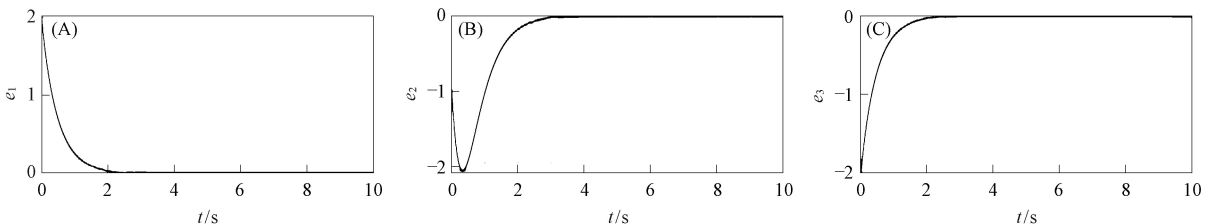


图 3 定理 2 中的系统误差曲线

Fig. 3 Systematic error curves in theorem 2

由图 2~图 7 可见, 系统误差在初始时相差较大, 且距原点较远, 一段时间后系统误差逐渐趋近于原点, 表明混沌系统的主从系统取得了滑模同步, 定理 3 达到同步所需时间比定理 1 和定理 2 少,

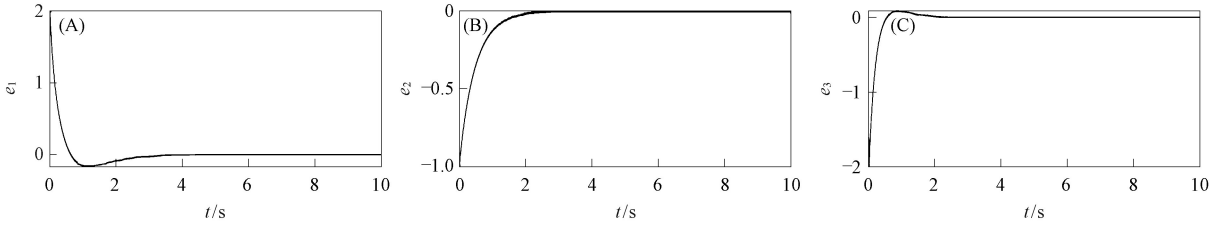


图 4 定理 3 中的系统误差曲线

Fig. 4 Systematic error curves in theorem 3

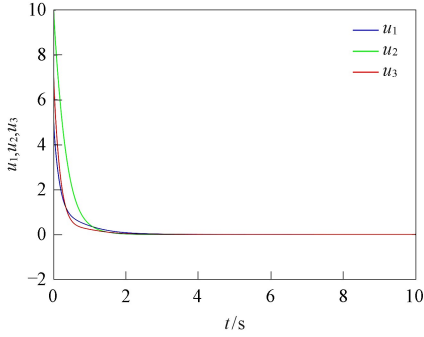


图 5 定理 1 中加入控制器后的变化曲线

Fig. 5 Change curves after adding controllers in theorem 1

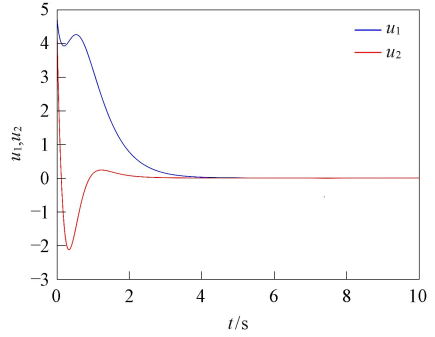


图 6 定理 2 中加入控制器后的变化曲线

Fig. 6 Change curves after adding controllers in theorem 2

定理 1 与定理 2 达到同步所需时间差别较小, 但定理 2 比定理 1 的控制器简单, 由于定理 1 需 3 个控制器, 因此需消耗较大的能量, 定理 2, 3 仅需 2 个控制器, 因此控制代价小且易实现. 定理 1~定理 3 的控制效果越来越好, 3 个定理中控制器对参数 η 的依赖性越来越弱: 定理 1 中 $\eta=2$, 约在 0.031 5 s 后误差曲线趋于一致; 定理 2 中 $\eta=1.5$, 约在 0.027 5 s 后误差曲线趋近于原点; 定理 3 中 $\eta=1.2$, 约在 0.022 5 s 后误差趋近于原点. 将定理 2 与定理 3 的控制器进行比较可见: 定理 2 中约在 0.037 5 s 后控制器作用消失; 定理 3 中约在 0.018 5 s 后控制器作用消失, 控制曲线趋近于原点, 表明系统取得滑模同步.

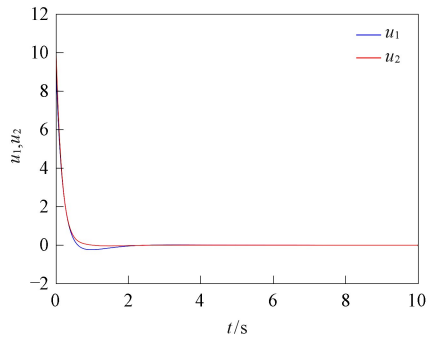


图 7 定理 3 中加入控制器后的变化曲线

Fig. 7 Change curves after adding controllers in theorem 3

综上, 本文根据分数阶滑模同步理论, 用 3 个控制方案研究了分数阶 Rikitake 混沌系统滑模同步, 在定理 1 中设计的是传统滑模面, 通过设计 3 个控制器将误差系统驱动到坐标原点, 定理 2 和定理 3 设计的是新型滑模面, 仅需 2 个控制器即可使分数阶 Rikitake 混沌系统取得滑模同步. 用 MATLAB 仿真程序绘制误差曲线和控制曲线, 并对 3 个定理进行了对比和分析. 结果表明: 在一定的假设条件下, 分数阶 Rikitake 不确定混沌系统可取得滑模同步.

参 考 文 献

[1] LORENZ E N. Deterministic Nonperiodic Flow [J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1963, 20(2): 130-141.
 [2] CHEN C, LI L, PENG H, et al. Finite-Time Synchronization of Memristor-Based Neural Networks with Mixed Delays [J]. Neurocomputing, 2017, 235(16): 83-89.
 [3] LÜ J H, CHEN G R. A New Chaotic Attractor Coined [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12(3): 659-661.
 [4] 孙美美, 胡云安, 韦建明. 一种新型不确定分数阶混沌系统滑模同步控制方式 [J]. 电子科技大学学报, 2017, 46(3): 555-561. (SUN M M, HU Y A, WEI J M. A Novel Sliding Mode Synchronization Method of Uncertain Fractional-Order Chaotic Systems [J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2017,

- 46(3): 555-561.)
- [5] SONG S, ZHANG B Y, SONG X N, et al. Fractional-Order Adaptive Neuro-Fuzzy Sliding Mode H_∞ Control for Fuzzy Singularly Perturbed Systems [J]. Journal of Franklin Institute, 2019, 356(10): 5027-5048.
- [6] 毛北行, 王东晓. 不确定分数阶 Rucklidge 系统自适应滑模同步 [J]. 南开大学学报(自然科学版), 2020, 53(6): 59-64. (MAO B X, WANG D X. Self-adaptive Sliding Mode Synchronization of Uncertain Fractional-Order Rucklidge Systems [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis, 2020, 53(6): 59-64.)
- [7] 毛北行, 王东晓. 不确定分数阶高维混沌系统的自适应滑模同步 [J]. 电子学报, 2021, 49(4): 775-780. (MAO B X, WANG D X. Self-adaptive Sliding Mode Synchronization of Uncertain Fractional-Order High-Dimension Chaotic Systems [J]. Acta Electronica Sinica, 2021, 49(4): 775-780.)
- [8] 周卫光, 章安, 郑永爱. 不相称分数阶 Genesio-Tesi 系统的有限时间自适应滑模同步 [J]. 扬州大学学报(自然科学版), 2023, 26(3): 50-55. (ZHOU W G, ZHANG A, ZHENG Y A. Finite Time Adaptive Sliding Mode Synchronization of Incommensurate Fractional Order Genesio-Tesi Systems [J]. Journal of Yangzhou University (Natural Science Edition), 2023, 26(3): 50-55.)
- [9] 毛北行, 王东晓. 分数阶永磁同步电机混沌系统自适应滑模同步 [J]. 浙江大学学报(理学版), 2023, 50(5): 564-568. (MAO B X, WANG D X. Self-adaptive Sliding Mode Synchronization of Fractional-Order Permanent Magnet Synchronization Motor Chaotic Systems [J]. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2023, 50(5): 564-568.)
- [10] 毛北行, 李德奎, 王东晓, 等. Sprott-D 不确定分数阶混沌系统的自适应滑模同步 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2024, 62(5): 1235-1240. (MAO B X, LI D K, WANG D X, et al. Adaptive Sliding Mode Synchronization of Sprott-D Uncertain Fractional-Order Chaotic Systems [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2024, 62(5): 1235-1240.)
- [11] 姚齐国, 李林, 刘玉良, 等. Rikitake 双圆盘耦合发电机系统的动力学行为仿真与分析 [J]. 郑州大学学报(工学版), 2012, 33(4): 46-49. (YAO Q G, LI L, LIU Y L, et al. Dynamic Behavior Simulation and Analysis of the Rikitake Two-Disk Dynamo System [J]. Journal of Zhengzhou University (Engineering Science), 2012, 33(4): 46-49.)
- [12] 刘晓君, 李险峰, 何万生, 等. 带摩擦的 Rikitake 双盘发电机模型的混沌与同步 [J]. 东北师大学报(自然科学版), 2009, 41(3): 59-63. (LIU X J, LI X F, HE W S, et al. Chaos and Chaos Synchronization of the Rikitake Two-Disk Dynamo with Friction [J]. Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition), 2009, 41(3): 59-63.)
- [13] 张济仕, 史蕊. 分数阶 Rikitake 系统中的混沌及其控制 [J]. 河南大学学报(自然科学版), 2009, 39(1): 81-86. (ZHANG J S, SHI R. Chaos in the Fractional Order Rikitake System and Its Control [J]. Journal of Henan University (Natural Science), 2009, 39(1): 81-86.)
- [14] 王晓东, 毛北行, 陈灿. 分数阶不确定 Rikitake 系统的滑模同步 [J]. 扬州大学学报(自然科学版), 2021, 24(2): 7-10. (WANG X D, MAO B X, CHEN C. Sliding Mode Synchronization of Fractional-Order Rikitake Systems [J]. Journal of Yangzhou University (Natural Science Edition), 2021, 24(2): 7-10.)
- [15] PODLUBNY I. Fractional Differential Equations [M]. New York: Academic Press, 1999: 1-340.
- [16] 吴强, 黄建华. 分数阶微积分 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2016: 12-15. (WU Q, HUANG J H. Fractional Calculus [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2016: 12-15.)
- [17] 刘恒, 李生刚, 孙业国, 等. 带有未知非对称控制增益的不确定分数阶混沌系统自适应模糊同步控制 [J]. 物理学报, 2015, 64(7): 070503-1-070503-9. (LIU H, LI S G, SUN Y G, et al. Adaptive Fuzzy Synchronization for Uncertain Fractional-Order Chaotic Systems with Unknown Non-symmetrical Control Gain [J]. Acta Physica Sinica, 2015, 64(7): 070503-1-070503-9.)

(责任编辑: 王 健)