doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023377

Caputo-Hadamard 型分数阶隐式微分方程周期边值问题解的存在性

张　伟，张　禹，倪晋波
（安徽理工大学 数学与大数据学院，安徽 淮南 232001）

摘要：用连续性定理讨论一类 Caputo-Hadamard 型分数阶隐式微分方程周期边值问题，得出了解的存在性结果，并给出具体实例进行说明.

关键词：Caputo-Hadamard 型分数阶微分；分数阶隐式微分方程；周期边值问题；连续性定理；存在性

中图分类号：O175.8　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5489(2024)04-0851-07

Existence of Solutions for Periodic Boundary Value Problems of Caputo-Hadamard Type Fractional Implicit Differential Equations

ZHANG Wei, ZHANG Yu, NI Jinbo
(*School of Mathematics and Big Data*, *Anhui University of Science and Technology*,
Huainan 232001, *Anhui Province*, *China*)

Abstract: By using the continuation theorem, we discussed a class of periodic boundary value problems for Caputo-Hadamard type fractional implicit differential equations, obtained the existence result of solutions, and provided specific example for explanation.

Keywords: Caputo-Hadamard type fractional differential; fractional implicit differential equation; periodic boundary value problem; continuation theorem; existence

1　引言与预备知识

分数阶微分方程在物理学、金融学、黏弹性材料、生物医学、控制理论和信号分析等领域应用广泛[1-3]. 研究微分方程边值问题解的存在性具有重要的理论和实际意义[4]. 近年来，随着分数阶微积分理论的发展，对分数阶微分方程边值问题的研究已取得了许多成果[5-7]. 根据不同的边值条件，分数阶微分方程边值问题可划分为两点边值问题和非局部边值问题. 经典的分数阶微分方程两点边值问题包括 Dirichlet 边值问题、Robin 边值问题、Neumann 边值问题、Sturm-Liouville 边值问题、周期边值问题以及反周期边值问题等. 目前，研究分数阶微分方程边值问题采用的主要方法有：不动点理论、上下解方法、单调迭代方法、迭合度理论以及临界点理论.

收稿日期：2023-09-14.　**网络首发日期**：2024-04-17.

第一作者简介：张　伟(1990—)，男，汉族，博士，副教授，从事分数阶微分方程及其应用的研究，E-mail：zhangwei_azyw@163.com.

基金项目：国家自然科学基金(批准号：11601007)、安徽省自然科学基金(批准号：2208085QA05)和安徽理工大学研究生创新基金(批准号：2023cx2146).

网络首发地址：https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20240412.1751.001.

近年来，关于分数阶微分方程周期边值问题的研究备受关注[8-14]. 例如：Benchohra 等[9]讨论了如下Caputo 型分数阶隐式微分方程周期边值问题：

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0+}^{\alpha}y(t)=f(t,y(t),{}^{C}D_{0+}^{\alpha}y(t)), \quad \text{a.e. } t\in J=[0,T], \quad T>0, \quad 0<\alpha\leqslant 1, \\ y(0)=y(T), \end{cases}$$

用连续性定理得到了其解的存在性结果，其中${}^{C}D_{0+}^{\alpha}$是 α 阶 Caputo 分数阶微分算子，$f: J\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数. Staněk[10]讨论了如下多项 Caputo 型分数阶微分方程周期边值问题：

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0+}^{\alpha}u(t)+q(t,u(t))\,{}^{C}D_{0+}^{\beta}u(t)=f(t,u(t)), \\ u(0)=u(T), \end{cases}$$

利用 Schauder 不动点定理得出了其解的存在性结果，其中 $0<\beta<\alpha\leqslant 1$，${}^{C}D_{0+}^{(\cdot)}$是 Caputo 分数阶微分算子，记 $J=[0,T]$，$q\in C(J\times\mathbb{R})$且非负，$f\in C(J\times\mathbb{R})$并且存在常数 $D,H(D<H)$，满足 $f(t,D)\geqslant 0$，$f(t,H)\leqslant 0$，$t\in J$. Benchohra 等[12]讨论了如下分数阶隐式微分方程周期边值问题：

$$\begin{cases} {}^{H}D_{1+}^{\alpha}y(t)=f(t,y(t),{}^{H}D_{1+}^{\alpha}y(t)), \quad t\in J=[1,T], \quad T>1, \quad 0<\alpha\leqslant 1, \\ y(1)=y(T), \end{cases}$$

用连续性定理得到了其解的存在性结果，其中${}^{H}D_{1+}^{\alpha}$是 α 阶 Hadamard 分数阶微分算子，$f: J\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数. 特别地，文献[12]定义了如下 Banach 空间：

$$X=\{y\in C(J,\mathbb{R}):\ y(t)={}^{H}I_{1+}^{\alpha}u(t),\ u\in C(J,\mathbb{R})\},$$

赋予范数 $\|y\|_X=\max\{\|y\|_\infty, \|{}^{H}D_{1+}^{\alpha}y\|_\infty\}$，以及 $Y=C(J,\mathbb{R})$赋予范数 $\|u\|_Y=\sup\{|u(t)|: t\in J\}$. 定义线性算子 L：$\operatorname{dom} L\subset X\to Y$，$Ly={}^{H}D_{1+}^{\alpha}y$，其中 $\operatorname{dom} L=\{y\in X: {}^{H}D_{1+}^{\alpha}y\in Y, y(1)=y(T)\}$.

引理 1[12] 算子 L 满足如下性质：

$$\operatorname{Ker} L=0, \qquad \operatorname{Im} L=\left\{y\in Y: \int_0^T\left(\ln\frac{T}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{y(s)}{s}\mathrm{d}s=0\right\}.$$

引理 2[12] 算子 L 是一个零指标的 Fredholm 算子.

但根据引理1可知，引理2不可能成立. 这是因为 $0=\dim\operatorname{Ker} L\neq\dim\operatorname{Im} L=1$，即 L 不是零指标的 Fredholm 算子. 导致该错误的原因是 $\operatorname{Ker} L\neq 0$. 事实上，对于方程${}^{H}D_{1+}^{\alpha}y(t)=0$，有如下形式的解：

$$y(t)=c(\ln t)^{\alpha-1}, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

注意到 $0<\alpha\leqslant 1$，所以$(\ln t)^{\alpha-1}$在 $t=1$ 处爆破. 因此，根据周期边值条件 $y(1)=y(T)$推不出 $c=0$，即 $\operatorname{Ker} L\neq 0$. 解决该问题的方法有两种，第一种方法：修正边值条件. 例如，将原边值条件修正为

$$(\ln t)^{1-\alpha}y(t)\big|_{t=1}=(\ln t)^{1-\alpha}y(t)\big|_{t=T}.$$

第二种方法：替换分数阶微分算子，将 Hadamard 分数阶微分算子替换成 Caputo-Hadamard 型分数阶微分算子. 基于第二种方法，本文讨论如下分数阶隐式微分方程周期边值问题：

$$\begin{cases} {}^{C}_{H}D_{1+}^{\alpha}x(t)=f(t,x(t),{}^{C}_{H}D_{1+}^{\alpha}x(t)), \ \text{a.e. } t\in J=[1,T], \quad T>1, \quad 0<\alpha\leqslant 1, \\ x(1)=x(T), \end{cases} \tag{1}$$

其中${}^{C}_{H}D_{1+}^{\alpha}$是 Caputo-Hadamard 分数阶微分算子，$f: J\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数.

研究表明，对于材料疲劳断裂、Lomnitz 对数蠕变律等现象的精确描述，需要引入 Caputo-Hadamard 分数阶导数，从而得到的数学模型表现为 Caputo-Hadamard 分数阶微分方程[15]. 但目前关于 Caputo-Hadamard 分数阶微分方程边值问题解的存在性研究报道较少，尤其是针对问题(1)的讨论目前尚未见文献报道. 因此，本文工作不仅修正了文献[12]中的错误，而且还有一定的创新性.

令 $x(t)$是定义在(a,b)上的连续函数，$0<a<b<\infty$. 定义空间 $AC_\delta^n[a,b]$为

$$AC_\delta^n[a,b]=\left\{x: [a,b]\mapsto\mathbb{R}\ \middle|\ \delta^{n-1}x(t)\in AC[a,b],\ \delta=t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right\},$$

其中 $AC[a,b]$表示$[a,b]$上绝对连续函数全体.

定义 1[16] 函数 $x: [1,T]\to\mathbb{R}$ 的 $\alpha(\alpha>0)$阶 Hadamard 分数阶积分定义为

$$ {}^{\mathrm{H}}I_{a+}^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}x(s)\frac{\mathrm{d}s}{s},\qquad t\in[1,T], $$

其中假设右端积分存在.

定义 2[16]　令 $\alpha>0$，$n=[\alpha]+1$，函数 x：$[1,T]\to\mathbb{R}$ 的 $\alpha(\alpha>0)$阶 Hadamard 分数阶导数定义为

$$ {}^{\mathrm{H}}D_{1+}^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1}x(s)\frac{\mathrm{d}s}{s},\qquad t\in[1,T]. $$

定义 3[17]　令 $\alpha>0$，$n=[\alpha]+1$，函数 $x(t)\in AC_{\delta}^{n}[1,T]$的 $\alpha(\alpha>0)$阶 Caputo-Hadamard 分数阶导数定义为

$$ {}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}x(t)=({}^{\mathrm{H}}I_{1+}^{n-\alpha}\delta^n x)(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1}\delta^n x(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}. $$

引理 3[16]　设 $\alpha,\beta>0$，Hadamard 分数阶积分满足半群性质：$({}^{\mathrm{H}}I_{1+}^{\alpha}\,{}^{\mathrm{H}}I_{1+}^{\beta}x)(t)=({}^{\mathrm{H}}I_{1+}^{\alpha+\beta}x)(t)$.

引理 4[17]　设 $\alpha>0$，$n=[\alpha]+1$，$x(t)\in AC_{\delta}^{n}[1,T]$，则

$$ ({}^{\mathrm{H}}I_{1+}^{\alpha}\,{}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}x)(t)=x(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^k x(1)}{k!}(\ln t)^k. $$

引理 5[16]　令 $\alpha>0$. 设 $x\in C[1,\infty)\cap L^1[1,\infty)$，则

$$ {}^{\mathrm{H}}I_{1+}^{\alpha}\,{}^{\mathrm{H}}D_{1+}^{\alpha}x(t)=x(t)+\sum_{i=1}^{n}c_i(\ln t)^{\alpha-i}, $$

其中 $c_i\in\mathbb{R}$，$i=1,2,\cdots,n$，$n-1<\alpha<n$.

定义 4[18]　设$(X,\|\cdot\|_X)$和$(Y,\|\cdot\|_Y)$是实的 Banach 空间，L：$\mathrm{dom}\,L\subset X\to Y$ 是线性算子，如果 $\mathrm{Im}\,L$ 是 Y 的闭子空间，并且 $\dim\mathrm{Ker}\,L=\mathrm{co}\dim\mathrm{Im}\,L<\infty$，则称 L 是零指标的 Fredholm 算子.

设 L：$\mathrm{dom}\,L\subset X\to Y$ 是零指标的 Fredholm 算子，则存在投影算子 P：$X\to X$ 和 Q：$Y\to Y$，使得

$$ \mathrm{Im}\,P=\mathrm{Ker}\,L,\quad \mathrm{Im}\,L=\mathrm{Ker}\,Q,\quad X=\mathrm{Ker}\,L\oplus\mathrm{Ker}\,P,\quad Y=\mathrm{Im}\,L\oplus\mathrm{Im}\,Q, $$

从而 $L|_{\mathrm{dom}\,L\cap\mathrm{Ker}\,P}$：$\mathrm{dom}\,L\to\mathrm{Im}\,L$ 是可逆的，记 $K_P=(L|_{\mathrm{dom}\,L\cap\mathrm{Ker}\,P})^{-1}$. 令 Ω 是 X 上的非空有界开集，满足 $\mathrm{dom}\,L\cap\bar{\Omega}\neq\varnothing$. 如果 $QN(\bar{\Omega})$有界，$K_P(I-Q)N$：$\bar{\Omega}\to X$ 是紧的，则称映射 N：$X\to Y$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的.

定理 1[18]　设 L：$\mathrm{dom}\,L\subset X\to Y$ 是零指标的 Fredholm 算子，$\Omega\subset X$ 是关于 $\theta\in\Omega$ 对称的有界开集，且 N：$\bar{\Omega}\to Y$ 是 L-紧的. 如果对任意的$(\lambda,x)\in(0,1]\times\mathrm{dom}\,L\cap\partial\Omega$，有 $Lx-Nx\neq\lambda(-Lx-N(-x))$，则方程 $Lx=Nx$ 在 $\mathrm{dom}\,L\cap\bar{\Omega}$ 中至少有一个解.

2　主要结果

定义 Banach 空间 $Y=C[0,1]$，赋予范数 $\|y\|_Y=\max\limits_{t\in[1,T]}|y(t)|$. 定义空间 $X=\{x(t)$：$x(t)$，${}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}x(t)\in C[1,T]\}$，赋予范数 $\|x\|_X=\|x\|_\infty+\|{}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}x\|_\infty$，则$(X,\|\cdot\|_X)$是 Banach 空间.

定义线性算子 L：$\mathrm{dom}\,L\subset X\to Y$ 和非线性算子 N：$X\to Y$ 分别为

$$ Lx(t)={}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}x(t),\qquad x(t)\in\mathrm{dom}\,L, $$

$$ Nx(t)=f(t,x(t),{}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}x(t)),\qquad x(t)\in X, $$

其中 $\mathrm{dom}\,L=\{x\in X$：$x(1)=x(T)\}$，则边值问题(1)等价于算子方程 $Lx=Nx$，$x\in\mathrm{dom}\,L$.

引理 6　算子 L：$\mathrm{dom}\,L\subset X\to Y$ 是零指标的 Fredholm 算子.

证明：首先，证明 L 满足

$$ \mathrm{Ker}\,L=\{x\in\mathrm{dom}\,L\text{：}x(t)=c,\ c\in\mathbb{R}\}\cong\mathbb{R}, \tag{2} $$

$$ \mathrm{Im}\,L=\left\{y\in Y\text{：}\int_1^T\left(\ln\frac{T}{s}\right)^{\alpha-1}y(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}=0\right\}. \tag{3} $$

事实上，由引理 4 易证式(2)成立. 对 $\forall\,y\in\mathrm{Im}\,L$，存在 $x\in\mathrm{dom}\,L$，使得 $Lx={}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}x(t)=y(t)$. 应用引理 4，得

$$ x(t)=I_{1+}^{\alpha}y(t)+c_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}y(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}+c_1,\qquad c_1\in\mathbb{R}. $$

结合边值条件 $x(1)=x(T)$，得

$$\int_1^T \left(\ln \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} y(s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s}=0, \tag{4}$$

即

$$\operatorname{Im} L \subset \left\{y \in Y: \int_1^T \left(\ln \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} y(s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s}=0\right\}.$$

另一方面，对满足式(4)的 $\forall\, y\in Y$，取 $x(t)={}^{\mathrm{H}}I_{1+}^{\alpha} y(t)$，则有

$$0=x(1)=x(T)={}^{\mathrm{H}}I_{1+}^{\alpha} x(t)\big|_{t=T}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^T \left(\ln \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} y(s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s},$$

$$Lx(t)={}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}\,{}^{\mathrm{H}}I_{1+}^{\alpha} y(t)=y(t),$$

即

$$\left\{y \in Y: \int_1^T \left(\ln \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} y(s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s}=0\right\} \subset \operatorname{Im} L,$$

从而式(3)成立.

下面证明 L 是零指标的. 为此，定义线性算子 Q：$Y\to Y$，

$$Qy=\frac{\alpha}{(\ln T)^{\alpha}}\int_1^T \left(\ln \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} y(s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

易知 Q 是连续算子且 $\operatorname{Im} L=\operatorname{Ker} Q$. 对 $\forall\, y\in Y$，有

$$Q^2 y=Q(Qy)=Qy\ \frac{\alpha}{(\operatorname{Im} T)^{\alpha}}\int_1^T \left(\ln \frac{T}{s}\right)^{\alpha-1}\ \frac{\mathrm{d}s}{s}=Qy,$$

即 Q 是投影算子. 对 $\forall\, y\in Y$，令 $\tilde{y}=y-Qy$，则 $Q\tilde{y}=0$，即 $\tilde{y}\in \operatorname{Ker} Q=\operatorname{Im} L$，从而 $Y=\operatorname{Im} L+\operatorname{Im} Q$.

另一方面，对 $\forall\, y\in \operatorname{Im} L\cap \operatorname{Im} Q$，有 $y=Qy=0$，从而 $Y=\operatorname{Im} L\oplus \operatorname{Im} Q$. 注意到 $\dim \operatorname{Ker} L=\dim \operatorname{Im} Q=\operatorname{co}\dim \operatorname{Im} L=1$. 综上可知，$L$ 是零指标的 Fredholm 算子.

引理 7 定义算子 K_P：$\operatorname{Im} L\to \operatorname{dom} L\cap \widetilde{X}$ 为

$$K_P y={}^{\mathrm{H}}I_{1+}^{\alpha} y=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} y(s)\ \frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

则 K_P 是算子 $L|_{\operatorname{dom} L\cap \widetilde{X}}$ 的逆，其中 $\widetilde{X}=\{x\in X: x(1)=0\}$.

证明：定义线性算子 P：$X\to X$ 为 $Px(t)=x(1)$. 显然，P 是一个投影算子，且有 $\operatorname{Im} P=\operatorname{Ker} L$，$\widetilde{X}=\operatorname{Ker} P$.

下面证明 $K_P=(L|_{\operatorname{dom} L\cap \operatorname{Ker} P})^{-1}$. 事实上，对 $\forall\, y\in \operatorname{Im} L$，由 K_P 的定义易证 $K_P y\in \operatorname{dom} L\cap \operatorname{Ker} P$. 即 K_P 的定义是合理的. 对 $\forall\, x\in \operatorname{dom} L\cap \operatorname{Ker} P$，由引理 4 可得

$$(K_P Lx)(t)={}^{\mathrm{H}}I_{1+}^{\alpha}\,{}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha} x(t)=x(t)-c_2,\qquad c_2\in \mathbb{R}.$$

注意到 $(K_P Lx)(t)\in \operatorname{Ker} P$ 以及 $c_2\in \operatorname{Ker} L=\operatorname{Im} P$，可推出

$$0=P(K_P Lx)(t)=Px(t)-c_2=-c_2,$$

即 $(K_P Lx)(t)=x(t)$.

另一方面，对 $\forall\, y\in \operatorname{Im} L$，有 $(LK_P y)(t)={}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}\,{}^{\mathrm{H}}I_{1+}^{\alpha}\, y(t)=y(t)$. 综上，$K_P$ 是算子 $L|_{\operatorname{dom} L\cap \operatorname{Ker} P}$ 的逆.

假设如下条件成立：

(H) 存在非负连续函数 $p(t),q(t)$，使得对 $\forall\, t\in[1,T]$，$u_i,v_i\in \mathbb{R}\ (i=1,2)$，有

$$|f(t,u_1,v_1)-f(t,u_2,v_2)|\leqslant p(t)|u_1-u_2|+q(t)|v_1-v_2|.$$

并记 $p=\max\limits_{t\in J} p(t)$，$q=\max\limits_{t\in J} q(t)$.

引理 8 假设(H)成立，$\Omega\subset X$ 是有界开集满足 $\operatorname{dom} L\cap \bar{\Omega}\neq\varnothing$，则 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的.

证明：因为 f：$[1,T]\times \mathbb{R}^2$ 连续且满足条件(H)，因此可断言 $QN(\bar{\Omega})$ 与 $(I-Q)N(\bar{\Omega})$ 均一致有界. 事实上，由 $\Omega\subset X$ 有界知，存在常数 $r>0$，使得 $\|x\|_X\leqslant r$，$\forall\, x\in \bar{\Omega}$. 由假设条件(H)，得

$$|Nx(t)|\leqslant|f(t,x(t),{}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}x(t))-f(t,0,0)|+|f(t,0,0)|\leqslant$$

$$\sigma + p(t)\,|x(t)| + q(t)\,|{}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}D^{\alpha}_{1+}x(t)| \leqslant \sigma + (p+q)r := r_1,$$

$$|QNx(t)| \leqslant \frac{\alpha}{(\ln T)^{\alpha}}\int_1^T \left(\ln\frac{T}{s}\right)^{\alpha-1} |Nx(s)|\,\frac{\mathrm{d}s}{s} \leqslant \frac{\alpha r_1}{(\ln T)^{\alpha}}\int_1^T \left(\ln\frac{T}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}s}{s} = r_1,$$

这里 $\sigma = \max\limits_{t\in[1,T]}|f(t,0,0)|$，$p = \max\limits_{t\in[1,T]} p(t)$，$q = \max\limits_{t\in[1,T]} q(t)$. 从而可得

$$\|QNx\|_Y \leqslant r_1, \qquad \|(I-Q)Nx\|_Y \leqslant \|Nx\|_Y + \|QNx\|_Y \leqslant 2r_1.$$

另一方面，有

$$\begin{aligned}\|K_P(I-Q)Nx\|_X &= \|{}^{\mathrm{H}}I^{\alpha}_{1+}(I-Q)Nx(t)\|_X = \\ &\|{}^{\mathrm{H}}I^{\alpha}_{1+}(I-Q)Nx(t)\|_{\infty} + \|{}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}D^{\alpha}_{1+}{}^{\mathrm{H}}I^{\alpha}_{1+}(I-Q)Nx(t)\|_{\infty} \leqslant \\ &2\,\frac{(\ln T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}r_1 + 2r_1 = 2r_1\left[1+\frac{(\ln T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right].\end{aligned}$$

即 $QN(\bar{\Omega})$ 与 $K_P(I-Q)N(\bar{\Omega})$ 一致有界.

下面证明 $K_P(I-Q)N(\cdot)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上等度连续. 事实上，对 $\forall\, x\in\bar{\Omega}$，$1\leqslant t_1<t_2\leqslant T$. 由 $(\ln t)^{\alpha}$, $\ln t$ 在 $[t_1,t_2]$ 上一致连续以及 $f(t,u,v)$ 在 $[t_1,t_2]\times[-r,r]^2$ 上一致连续，有

$$\begin{aligned}&\left|{}^{\mathrm{H}}I^{\alpha}_{1+}(I-Q)Nx(t)\big|_{t=t_1} - {}^{\mathrm{H}}I^{\alpha}_{1+}(I-Q)Nx(t)\big|_{t=t_2}\right| = \\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_1^{t_1}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha-1}(I-Q)Nx(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s} - \int_1^{t_2}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}(I-Q)Nx(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}\right| \leqslant \\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_1^{t_1}\left[\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha-1} - \left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}\right](I-Q)Nx(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}\right| + \\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}(I-Q)Nx(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}\right]\right| \leqslant \\ &\frac{2r_1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{t_1}\left[\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha-1} - \left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{\mathrm{d}s}{s} + \frac{2r_1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}s}{s} = \\ &\frac{2r_1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\left(\ln\frac{t_2}{t_1}\right)^{\alpha} + (\ln t_1)^{\alpha} - (\ln t_2)^{\alpha}\right] \to 0, \quad t_1\to t_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|{}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}D^{\alpha}_{1+}{}^{\mathrm{H}}I^{\alpha}_{1+}(I-Q)Nx(t)\big|_{t=t_1} - {}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}D^{\alpha}_{1+}{}^{\mathrm{H}}I^{\alpha}_{1+}(I-Q)Nx(t)\big|_{t=t_2}\right| = \\ &\left|f(t_1,x(t_1),{}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}D^{\alpha}_{1+}x(t_1)) - f(t_2,x(t_2),{}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}D^{\alpha}_{1+}x(t_2))\right| \to 0, \quad t_1\to t_2.\end{aligned}$$

综上，$K_P(I-Q)N(\cdot)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上等度连续. 根据 Ascoli-Arzelà 定理，$K_P(I-Q)N:\bar{\Omega}\to X$ 是紧的，故 N 在 $\bar{\Omega}$ 是 L-紧的.

引理 9　假设(H)成立，令

$$\Omega = \{x\in \operatorname{dom} L\backslash \operatorname{Ker} L: Lx - Nx = -\lambda[Lx + N(-x)],\ \lambda\in(0,1]\},$$

则当 $(1-q)\Gamma(\alpha+1) > (\ln T)^{\alpha}p$ 时，Ω 有界.

证明：对 $\forall\, x\in\Omega$，有 $Lx = \frac{1}{1+\lambda}Nx - \frac{\lambda}{1+\lambda}N(-x)$. 从而对 $\forall\, t\in[1,T]$，有

$$\begin{aligned}|Lx| = |{}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}D^{\alpha}_{1+}x| &\leqslant \frac{1}{1+\lambda}|Nx| + \frac{\lambda}{1+\lambda}|N(-x)| \leqslant \\ &\frac{1}{1+\lambda}[\,|f(t,x(t),{}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}D^{\alpha}_{1+}x(t)) - f(t,0,0)| + \sigma] + \\ &\frac{\lambda}{1+\lambda}[\,|f(t,-x(t),-{}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}D^{\alpha}_{1+}x(t)) - f(t,0,0)| + \sigma] \leqslant \\ &\sigma + p\,|x(t)| + q\,|{}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}D^{\alpha}_{1+}x(t)| \leqslant \sigma + p\,\|x\|_{\infty} + q\,\|{}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}D^{\alpha}_{1+}x\|_{\infty},\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}|x(t)| = \frac{1}{1+\lambda}&|{}^{\mathrm{H}}I^{\alpha}_{1+}Nx - \lambda\,{}^{\mathrm{H}}I^{\alpha}_{1+}N(-x)| \leqslant \\ &\frac{\sigma(\ln T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{(1+\lambda)\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}|f(s,x(s)),{}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}D^{\alpha}_{1+}x(s) - f(s,0,0)|\,\frac{\mathrm{d}s}{s} + \\ &\frac{\lambda}{(1+\lambda)\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}|f(s,-x(s),-{}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{H}}D^{\alpha}_{1+}x(s)) - f(s,0,0)|\,\frac{\mathrm{d}s}{s} \leqslant\end{aligned}$$

$$\frac{(\ln T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}[p\|x\|_{\infty}+q\|{}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}x\|_{\infty}]+\frac{\sigma(\ln T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{6}$$

由式(5)和式(6)得

$$\|{}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}x\|_{\infty}\leqslant\sigma+p\|x\|_{\infty}+q\|{}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}x\|_{\infty}, \tag{7}$$

$$\|x\|_{\infty}\leqslant\frac{(\ln T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}[p\|x\|_{\infty}+q\|{}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}x\|_{\infty}]+\frac{\sigma(\ln T)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{8}$$

解不等式组(7)-(8)，得

$$\|x\|_{\infty}\leqslant\frac{(\ln T)^{\alpha}\sigma}{(1-q)\Gamma(\alpha+1)-(\ln T)^{\alpha}p}=: m_1,$$

$$\|{}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}x\|_{\infty}\leqslant\frac{1}{1-q}\left[\sigma+\frac{(\ln T)^{\alpha}p\sigma}{(1-q)\Gamma(\alpha+1)-(\ln T)^{\alpha}p}\right]=: m_2.$$

于是有

$$\|x\|_X=\|x\|_{\infty}+\|{}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}x\|_{\infty}\leqslant m_1+m_2,$$

即Ω有界.

定理2 假设(H)成立，则当$(1-q)\Gamma(\alpha+1)>(\ln T)^{\alpha}p$时，边值问题(1)至少存在一个解.

证明：令$\Omega'=\{x\in X:\ \|x\|_X<m_1+m_2+1\}$，则$\Omega'\subset X$是有界开集并关于$0\in\Omega'$对称，且$X\cap\overline{\Omega}'\neq\varnothing$. 由引理8知，$N$在$\overline{\Omega}'$上是$L$-紧的. 由引理9知，对$\forall x\in\partial\Omega'$和$\lambda\in(0,1]$，有$Lx-Nx\neq-\lambda[Lx+N(-x)]$. 根据定理1知，边值问题(1)在$X$中至少有一个解.

3 应用实例

例1 考虑如下分数阶微分方程周期边值问题：

$$\begin{cases}{}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{4/5}x(t)=t+\dfrac{1}{3}\dfrac{x(t)}{1+|x(t)|}+\dfrac{1}{2}\sin|{}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}x(t)|, & \text{a. e. } t\in J=[1,\mathrm{e}],\\ x(1)=x(\mathrm{e}),\end{cases} \tag{9}$$

对应边值问题(1)，这里$\alpha=4/5$，$T=\mathrm{e}$，

$$f(t,x(t),{}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}x(t))=1+\frac{1}{3}\frac{x(t)}{1+|x(t)|}+\frac{1}{2}\sin|{}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{C}}D_{1+}^{\alpha}x(t)|,\qquad t\in[1,\mathrm{e}].$$

取$p(t)=\dfrac{1}{3}$，$q(t)=\dfrac{1}{2}$，则有

$$p=\frac{1}{3},\quad q=\frac{1}{2},\quad |f(t,u_1,v_1)-f(t,u_2,v_2)|\leqslant p(t)|u_1-u_2|+q(t)|v_1-v_2|,$$

此外，

$$(1-q)\Gamma(\alpha+1)-(\ln T)^{\alpha}p=\frac{1}{2}\Gamma(1.8)-\frac{1}{3}\approx 0.132\,3>0.$$

故定理2的条件成立，从而边值问题(9)至少存在一个解.

综上所述，本文讨论了一类Caputo-Hadamard型分数阶隐式微分方程周期边值问题. 在非线性项满足Lipschitz条件下，利用连续性定理证明了该问题解的存在性，修正了文献[12]的相关结果.

参考文献

[1] 吴强，黄建华. 分数阶微积分[M]. 北京：清华大学出版社，2016：1-185. (WU Q, HUANG J H. Fractional Calculus [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2016: 1-185.)

[2] 史军，沙学军，张钦宇. 分数阶信号处理理论与方法[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017：1-231. (SHI J, SHA X J, ZHANG Q Y. Theory and Methods of Fractional Order Signal Processing [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2017: 1-231.)

[3] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations [M]. North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204. Amsterdam: Elsevier Science, 2006: 1-523.

[4] 葛渭高. 非线性常微分方程边值问题[M]. 北京：科学出版社，2007：1-455. (GE W G. Boundary Value

Problems of Nonlinear Ordinary Differential Equations [M]. Beijing：Science Press，2007：1-455.）

[5] ZHOU B B，ZHANG L L. α-(h,e)-Convex Operators and Applications for Riemann-Liouville Fractional Differential Equations [J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis，2023，61(2)：577-590.

[6] WANG Y，TIAN L X. Existence and Multiplicity of Solutions for (p,q)-Laplacian Kirchhoff-Type Fractional Differential Equations with Impulses [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences，2023，46(13)：14177-14199.

[7] ZHANG X Q，SHAO Z Y，ZHONG Q Y. Multiple Positive Solutions for Higher-Order Fractional Integral Boundary Value Problems with Singularity on Space Variable [J]. Fractional Calculus and Applied Analysis，2022，25(4)：1507-1526.

[8] XUE T T，FAN X L，CAO H，et al. A Periodic Boundary Value Problem of Fractional Differential Equation Involving $p(t)$-Laplacian Operator [J]. Mathematical Biosciences and Engineering，2023，20(3)：4421-4436.

[9] BENCHOHRA M，BOURIAH S，GRAEF J R. Nonlinear Implicit Differential Equations of Fractional Order at Resonance [J]. Electronic Journal of Differential Equations，2016，2016：324-1-324-10.

[10] STANĚK S. Periodic Problem for Two-Term Fractional Differential Equations [J]. Fractional Calculus and Applied Analysis，2017，20(3)：662-678.

[11] FEČKAN M，MARYNETS K，WANG J R. Existence of Solutions to the Generalized Periodic Fractional Boundary Value Problem [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences，2023，46(11)：11971-11982.

[12] BENCHOHRA M，BOURIAH S，NIETO J J. Existence of Periodic Solutions for Nonlinear Implicit Hadamard's Fractional Differential Equations [J]. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas，Físicas y Naturales，Serie A：Matematicas，2018，112(1)：25-35.

[13] SALIM A，BENCHOHRA M，LAZREG J E. On Implicit k-Generalized ψ-Hilfer Fractional Differential Coupled Systems with Periodic Conditions [J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems，2023，22(2)：75-1-75-46.

[14] ZHANG W，NI J B. Solvability for a Coupled System of Perturbed Implicit Fractional Differential Equations with Periodic and Anti-periodic Boundary Conditions [J]. Journal of Applied Analysis and Computation，2021，11(6)：2876-2894.

[15] GOHAR M. Caputo-Hadamard 分数阶微分方程的分析和计算 [D]. 上海：上海大学，2020.（GOHAR M. Analysis and Calculation of Caputo-Hadamard Fractional Differential Equations [D]. Shanghai：Shanghai University，2020.）

[16] AHMAD B，ALSAEDI A，NTOUYAS S K，et al. Hadamard-Type Fractional Differential Equations，Inclusions and Inequalities [M]. Cham：Springer，2017：1-420.

[17] JARAD F，ABDELJAWAD T，BALEANU D. Caputo-Type Modification of the Hadamard Fractional Derivatives [J/OL]. Advances in Difference Equations，(2012-08-10)[2023-08-20]. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2021-142.

[18] 郭大钧，孙经先，刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法 [M]. 济南：山东科学技术出版社，2005：1-415.（GUO D J，SUN J X，LIU Z L. Functional Methods of Nonlinear Ordinary Differential Equations [M]. Jinan：Shandong Science and Technology Press，2005：1-415.）

（责任编辑：赵立芹）