

# 耦合 Rulkov 神经元的复杂动力学行为

薛睿<sup>1</sup>, 张莉<sup>2</sup>, 安新磊<sup>1</sup>

(1. 兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070; 2. 兰州工业学院 基础科学部, 兰州 730050)

**摘要:** 基于混沌的 Rulkov 神经元模型, 考虑 2 个相同神经元在电耦合下的情形, 通过数值计算对耦合 Rulkov 神经元模型进行双参数分岔分析, 并借助单参数分岔图以及最大 Lyapunov 指数图进一步验证其分岔模式. 结果表明: 耦合 Rulkov 神经元模型呈倍周期分岔道路、拟周期道路以及阵发性道路 3 条典型的混沌路径; 该模型具有伴有混沌的加周期分岔现象; 随着耦合强度的增加, 耦合 Rulkov 模型呈更复杂的动力学行为.

**关键词:** Rulkov 神经元; 电耦合; 双参数分岔分析; 最大 Lyapunov 指数; 混沌道路

**中图分类号:** O415.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)04-0971-09

## Complex Dynamic Behavior of Coupled Rulkov Neurons

XUE Rui<sup>1</sup>, ZHANG Li<sup>2</sup>, AN Xinlei<sup>1</sup>

(1. School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

2. Department of the Basic Courses, Lanzhou Institute of Technology, Lanzhou 730050, China)

**Abstract:** Based on the chaotic Rulkov neuron model, the two-parameter bifurcation analysis of the coupled Rulkov neuron model was carried out through numerical calculations by considering the situation of two identical neurons under electrical coupling, and the bifurcation mode was further validated by using the one-parameter bifurcation diagrams and the maximum Lyapunov exponent diagrams. The results show that the coupled Rulkov neuron model exhibits three classic chaotic paths: period-doubling bifurcation path, quasi-periodic bifurcation path, and intermittency path. The model presents a period-adding bifurcation phenomena accompanied by chaos. The coupled Rulkov neurons model exhibits more complex dynamical behavior as the coupling strength increases.

**Keywords:** Rulkov neuron; electrical coupling; two-parameter bifurcation analysis; the maximum Lyapunov exponent; chaotic path

神经元是神经系统的基本组成部分和功能单位, 是信息产生、编码、传输以及整合的主要载体, 具有许多复杂的非线性动力学现象. 人们对神经元的基本构成和生理活动进行了大量研究, 根据其生理行为建立了相应的数学模型, 其中生物神经元模型大多为非线性微分方程组描述连续模型, 计算要求较高<sup>[1]</sup>, 而离散模型将微分方程组转化为映射, 与连续模型相比, 具有简单和便于计算的优点. 此外, 离散模型能有效模拟神经元的生理活动, 对研究大规模的神经网络具有重要意义. 因此, 离散神经元模型广泛应用于计算神经科学中. Rulkov 等<sup>[2-4]</sup>通过二维离散模型模拟神经元的簇放电, 分别提出了非混沌 Rulkov 模型、超临界 Rulkov 模型和混沌 Rulkov 模型; Izhikevich<sup>[5]</sup>通过 Euler 法将

收稿日期: 2023-09-14.

第一作者简介: 薛睿(1998—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事非线性动力学的研究, E-mail: 417254177@qq.com.

基金项目: 甘肃省自然科学基金重点项目(批准号: 23JRR A861)和兰州工业学院青年科技创新项目(批准号: 2021KJ-08).

二维常微分方程构成的神经元模型离散化为映射形式;文献[6-7]在经典神经元模型的基础上,改进并提出了新的离散神经元模型,基于其良好的混沌性能和迭代迅速的特点,进一步研究了离散神经元模型在保密通信中的应用.

研究表明,混沌的 Rulkov 神经元模型能有效模拟神经元的簇放电活动,具有丰富的动力学行为. Wang 等<sup>[8]</sup>通过对单个混沌 Rulkov 神经元模型的定性分析,根据不动点的类型及稳定性对二维参数平面进行了划分;孙慧静<sup>[9]</sup>根据中心流形理论研究了 Rulkov 模型存在的分岔;吴艳果<sup>[10]</sup>通过快慢分解技术研究了单个 Rulkov 神经元模型的分岔类型,分析了神经元产生簇放电和峰放电的分岔机理.

由于只有较少的神经元能独立完成大脑信息的处理,因此,多个神经元构成的复杂神经网络的集体行为已引起人们广泛关注. 2 个耦合神经元可构成最小的神经元集群,混沌的 Rulkov 神经元模型形式简单,计算便捷. 在电耦合情况下,文献[11-13]讨论了相同 Rulkov 神经元耦合模型中不动点的存在性和稳定性,并通过主稳定函数分析方法进一步研究了该模型的同步问题;Cheng 等<sup>[14]</sup>分析了异质 Rulkov 神经网络模型的同步现象及同步转迁行为,并通过中心流形定理讨论了系统的分岔行为. 在化学突触耦合情况下, Rakshit 等<sup>[15]</sup>考虑内部耦合函数,分析了不动点的存在性和稳定性,并借助主稳定函数推导了完全同步的必要条件;Bashkirtseva 等<sup>[16-17]</sup>分别考虑了 2 个 Rulkov 神经元耦合及 3 个 Rulkov 神经元耦合的情形,分析了该模型的多稳态现象以及同步问题. 此外,由于忆阻器可模拟神经元突触并刻画电磁感应效应,因此离散忆阻器可与 Rulkov 神经元模型结合,通过数值方法研究系统的状态转换机制、同步问题以及多稳态现象<sup>[18-20]</sup>.

在此基础上,本文从混沌 Rulkov 神经元模型出发,基于电突触具有信号传输速度快和不易受外界干扰等特点,考虑 2 个相同 Rulkov 神经元在电耦合情形下的动力学行为,通过数值计算得到该模型在不同耦合强度下的双参数分岔图,根据双参数分岔图分析其分岔模式,并通过单参数分岔图和最大 Lyapunov 指数图验证其通往混沌的路径,为进一步理解神经元集群的复杂动力学行为提供一定的理论依据.

## 1 模型描述

混沌 Rulkov 神经元模型能模拟生物神经元实际的放电活动,仅通过 2 个变量即可刻画神经元的动力学行为,单个混沌 Rulkov 神经元模型的表达式为

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{\alpha}{1+x(n)^2} + y(n), \\ y(n+1) = y(n) - \eta[x(n) - \sigma], \end{cases} \quad (1)$$

其中  $n$  表示离散时间尺度,  $x$  表示神经元的跨膜电压,  $y$  表示神经元离子通道的门控离子浓度,  $\eta, \alpha, \sigma$  为神经元的控制参数,满足  $0 < \eta < 1$ , 且  $\alpha$  和  $\sigma$  为  $O(1)$ .

在整个神经系统中,单个神经元可视为一个非线性动力系统,神经元之间耦合可形成神经网络,进而可视为一个复杂的高维非线性动力系统. 其中,2 个神经元可构成最小的神经集群. 研究形式简单的神经元耦合模型可为分析大规模神经网络提供一定的理论基础. 基于电突触具有信号传递速度快和传递过程不易受外界影响等特点,在电耦合情况下考虑 2 个混沌 Rulkov 神经元构成的简单神经网络模型,其形式为

$$\begin{cases} x_1(n+1) = \frac{\alpha}{1+x_1(n)^2} + y_1(n) + D[x_2(n) - x_1(n)], \\ y_1(n+1) = y_1(n) - \eta[x_1(n) - \sigma], \\ x_2(n+1) = \frac{\alpha}{1+x_2(n)^2} + y_2(n) + D[x_1(n) - x_2(n)], \\ y_2(n+1) = y_2(n) - \eta[x_2(n) - \sigma], \end{cases} \quad (2)$$

其中  $x_i (i=1,2)$  为第  $i$  个神经元的跨膜电压,  $y_i (i=1,2)$  为第  $i$  个神经元的离子通道变化过程,  $\alpha$  决定神经元的放电模式,  $D$  为 2 个神经元的电耦合强度.

对于模型(2), 可解得其不动点  $(x_1, y_1, x_2, y_2) = \left(\sigma, \sigma - \frac{\alpha}{1 + \sigma^2}, \sigma, \sigma - \frac{\alpha}{1 + \sigma^2}\right)$ , 并且不动点位置与耦合强度  $D$  无关. Wang 等<sup>[11]</sup> 讨论了控制参数  $\eta, \alpha, \sigma$  和耦合强度  $D$  对不动点稳定性的影响. 当  $\sigma = -0.2, \eta = 0.001, D = 0.2$  时, 分别取  $\alpha = 1.8, 2.712, 2.98, 4.2$ , 该模型呈现几种典型的放电模式, 其相图和时间响应图如图 1 所示. 其中, 图 1(A), (B) 表示耦合 Rulkov 神经元模型处于静息状态, 图 1(C), (D) 表示耦合 Rulkov 神经元模型处于方波簇放电状态, 图 1(E), (F) 表示耦合 Rulkov 神经元模型处于双方波簇放电状态, 图 1(G), (H) 表示耦合 Rulkov 神经元模型处于混沌放电状态.

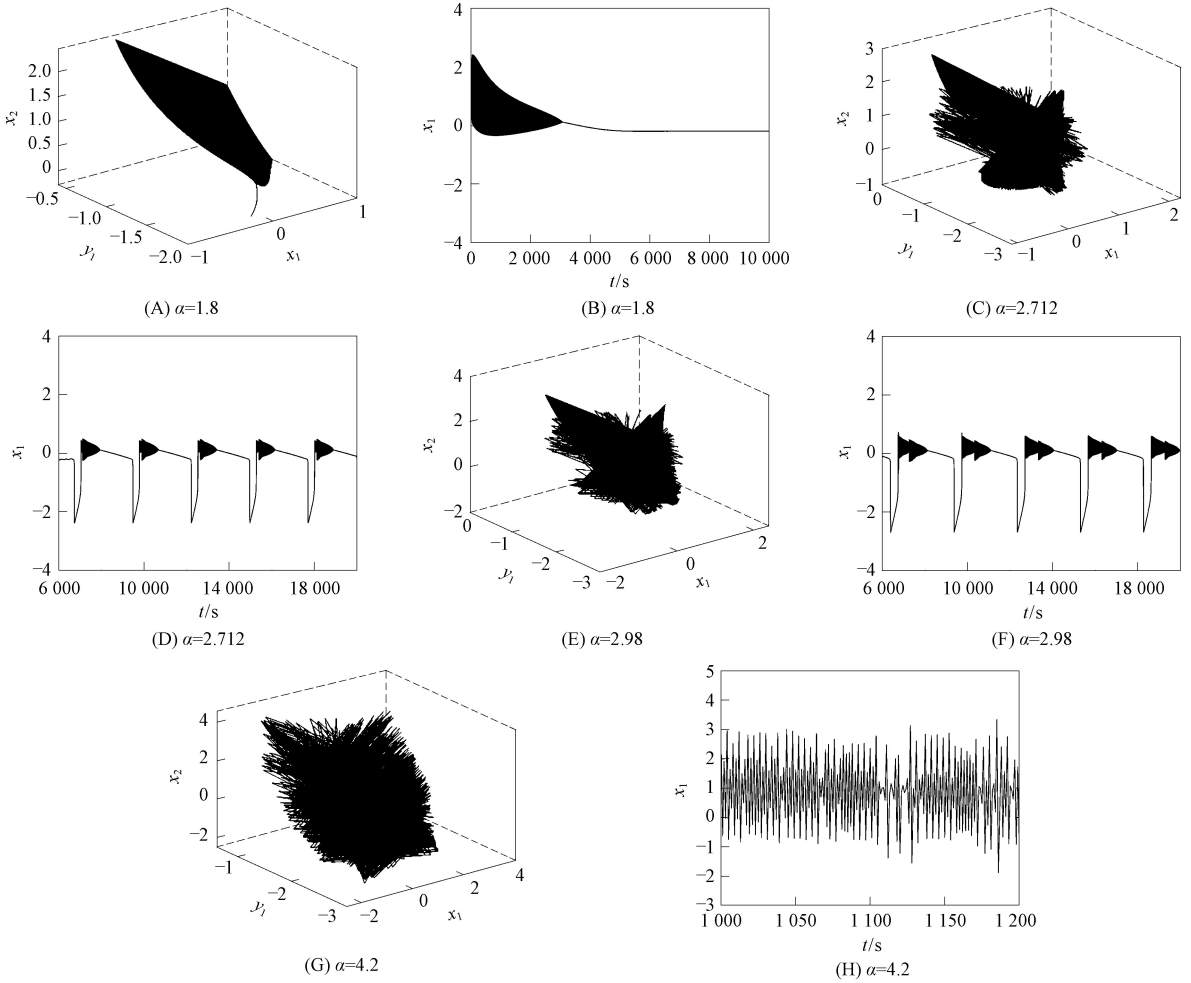


图 1 系统(2)的相图和时间响应图

Fig. 1 Phase diagrams and time response diagrams of system (2)

## 2 双参数分岔分析

由于在神经元放电过程中通常是多个系统参数同时变化, 仅依靠单个参数的分岔分析不能反映神经元真实的生理活动. 因此, 在电耦合情形下, 本文借助双参数分岔图进一步研究在不同耦合强度下参数变化对耦合 Rulkov 神经元模型的影响.

固定  $\eta = 0.001$ , 分别取耦合强度  $D = 0, 0.1, 0.3, 0.5$ , 并同时变换参数  $\sigma$  和  $\alpha$ , 通过数值计算得到不同耦合强度下的双参数分岔图, 结果如图 2 所示, 其中不同颜色代表不同的周期放电行为, 黄色代表神经元处于静息状态, 绿色代表神经元呈现周期 1 放电, ..., 白色代表神经元处于大于或等于周期 20 的放电或混沌状态. 由图 2(A) 可见, 当  $D = 0$  时, 双参数分岔图关于原点中心对称. 随着耦合强度  $D$  的增加, 分岔图的对称性逐渐被破坏, 并且绿色区域的面积逐渐增大, 表明随着耦合强度的增加, 神经元模型呈周期 2 放电行为的参数区域逐渐增大. 同时, 耦合强度的增加导致出现更高周期放电态, 使神经元模型呈更复杂的分岔结构. 此外, 双参数分岔图不仅给出了神经元呈不同放电模式的

参数区间,也包含多个单参数分岔图.由图 2 可见:在 $(\sigma,\alpha)\in[0,2]\times[0,6]$ 和 $(\sigma,\alpha)\in[-2,0]\times[-6,0]$ 区域中,耦合 Rulkov 神经元模型呈倍周期分岔;在 $(\sigma,\alpha)\in[-2,0]\times[0,6]$ 和 $(\sigma,\alpha)\in[0,2]\times[-6,0]$ 区域中,该模型通过拟周期道路通往混沌;在白色混沌区域内该模型出现阵发间歇混沌.下面通过单参数分岔图和最大 Lyapunov 指数图进一步验证系统通往混沌的路径,并展示不同耦合强度下耦合 Rulkov 神经元模型的复杂动力学行为.

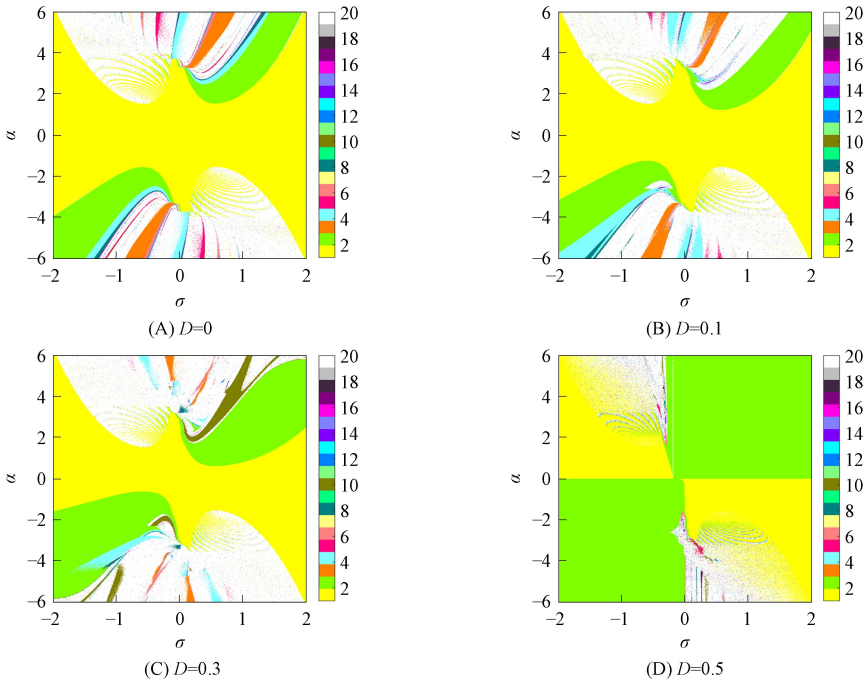


图 2 不同耦合强度下的双参数分岔图

Fig. 2 Two-parameter bifurcation diagrams under different coupling strengths

## 2.1 倍周期分岔通往混沌

由双参数分岔分析可知,当耦合强度较小时,在 $(\sigma,\alpha)\in[0,2]\times[0,6]$ 和 $(\sigma,\alpha)\in[-2,0]\times[-6,0]$ 区域中,系统通过倍周期分岔(逆倍周期分岔)通往混沌.在离散动力系统中,倍周期分岔是通往混沌的典型路径.在分岔过程中,不动点失去稳定性,依次呈周期 2,周期 4,周期 8, ..., 周期  $2^n$ ,经周期加倍后系统最终陷入混沌.

以 $\sigma=0.7$ 为例,当 $\alpha$ 从 0 变到 5 时,系统呈倍周期分岔,图 3 为系统在不同耦合强度下的单参数分岔图以及最大 Lyapunov 指数图.当 $D=0$ 时,系统经由倍周期分岔通往混沌.由图 3(A)可见,当 $\alpha=1.588$ 时,系统由周期 1 分岔为周期 2,在 $\alpha=2.988$ 处周期加倍为周期 4.随着 $\alpha$ 的增加,系统最终进入混沌,其对应的最大 Lyapunov 指数图如图 3(B)所示.最大 Lyapunov 指数(简称为 LE)是判别混沌的有效数值指标:若至少存在一个 Lyapunov 指数为正,则系统处于混沌状态.与图 3(A)对应,由图 3(B)可见,系统处于周期时 $LE<0$ ,处于混沌状态时 $LE>0$ .由图 3(C)可见,当 $D=0.1$ 时,系统在 $\alpha=1.27$ 处由周期 1 分岔为周期 2,并在 $\alpha=2.748$ 处直接进入混沌状态.

以 $\sigma=-0.7$ 为例,当 $\alpha$ 从 $-5$ 变到 $0$ 时,系统在不同耦合强度下的单参数分岔图以及最大 Lyapunov 指数图如图 4 所示.当 $D=0$ 时,系统通过逆倍周期分岔通往混沌.由图 4(A)可见,当 $\alpha=-1.585$ 时,系统由周期 1 分岔为周期 2.随着 $\alpha$ 逐渐减小,系统依次呈周期 4,周期 8, ..., 周期  $2^n$ ,最终系统进入混沌,其对应的最大 Lyapunov 指数图如图 4(B)所示.由图 4(C)可见,当 $D=0.3$ 时,系统在 $\alpha=-0.635$ 处由周期 1 分岔为周期 2,并在 $\alpha=-2.9175$ 处周期加倍为周期 4 后陷入混沌,其对应的最大 Lyapunov 指数图如图 4(D)所示.因此,随着耦合强度的增加,系统呈更复杂的动力学行为.

## 2.2 拟周期道路通往混沌

在 $(\sigma,\alpha)\in[0,2]\times[-6,0]$ 和 $(\sigma,\alpha)\in[-2,0]\times[0,6]$ 区域中,系统经由拟周期道路通往混沌.拟

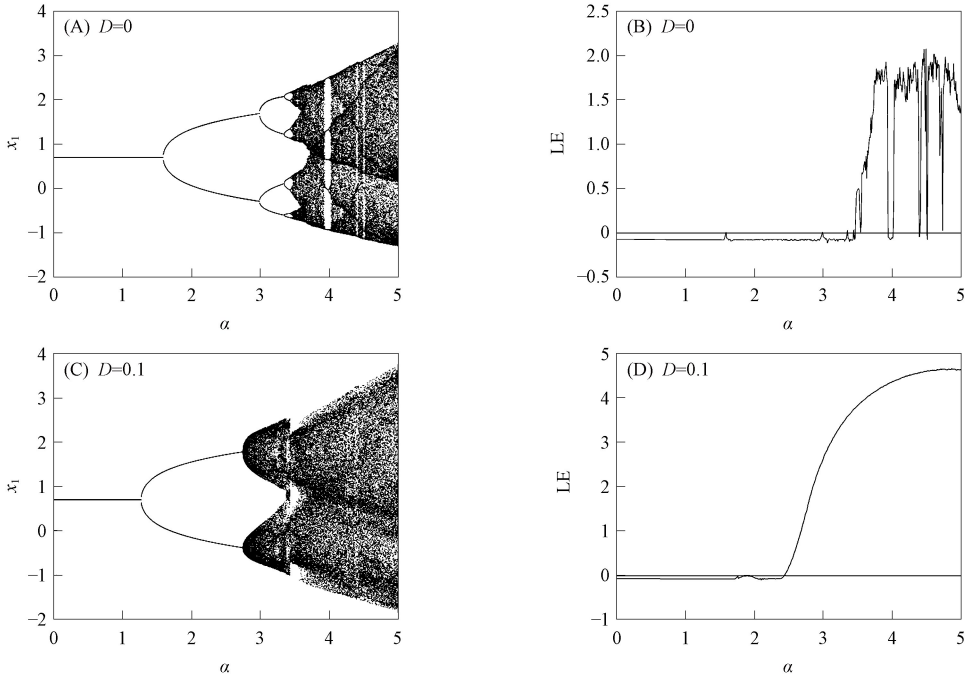


图 3  $\sigma=0.7$  时系统 (2) 在不同耦合强度下的单参数分岔图及最大 Lyapunov 指数图

Fig. 3 One-parameter bifurcation diagrams and the maximum Lyapunov exponent diagrams of system (2) at  $\sigma=0.7$  under different coupling strengths

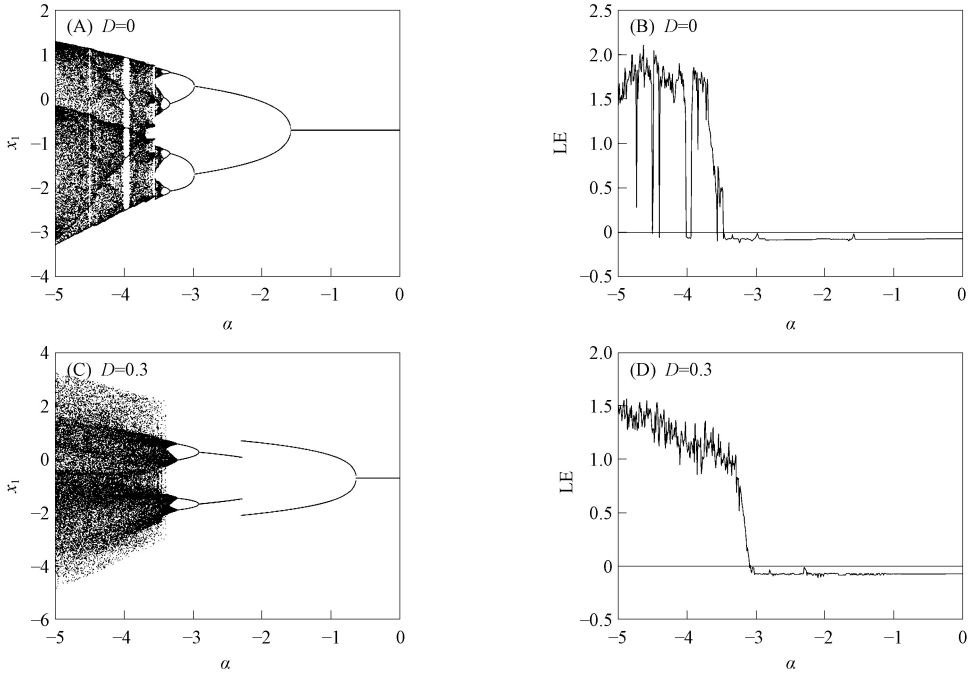


图 4  $\sigma=-0.7$  时系统 (2) 在不同耦合强度下的单参数分岔图及最大 Lyapunov 指数图

Fig. 4 One-parameter bifurcation diagrams and the maximum Lyapunov exponent diagrams of system (2) at  $\sigma=-0.7$  under different coupling strengths

周期道路也是一种典型的通往混沌的道路, 此时系统发生 Neimark-Sacker 分岔使不动点失去稳定性, 变为准周期轨道, 进而轨道破裂产生混沌。

以  $\sigma=-1$  为例, 图 5 为系统在不同耦合强度下的单参数分岔图以及最大 Lyapunov 指数图。当  $D=0$  时, 系统呈典型的拟周期道路通往混沌。由图 5(A) 可见, 当  $\alpha < 1.995$  时, 系统存在唯一一个不动点。由图 5(B) 可见: 当  $\alpha \in (1.995, 3.065)$  时, 最大 Lyapunov 指数值在 0 处附近浮动, 对应系统呈拟周期状态; 当  $\alpha > 3.065$  时, 系统陷入混沌。随着耦合强度的增加, 呈周期解和拟周期解交替变化的

参数区间不断减小. 由图 5(C),(D)可见, 当  $D=0.1$  时, 系统在  $\alpha=1.995$  处由周期 1 直接进入拟周期状态, 并在  $\alpha \in (1.995, 3.032)$  时呈周期解和拟周期解交替变化. 由图 5(E)~(H)可见, 当  $D=0.3, 0.5$  时, 对应周期解和拟周期解交替变化的范围分别减小为  $(1.995, 2.725)$  和  $(1.995, 2.48)$ . 因此随着耦合强度的增加, 系统呈拟周期状态的范围减小, 呈混沌状态的范围不断扩大.

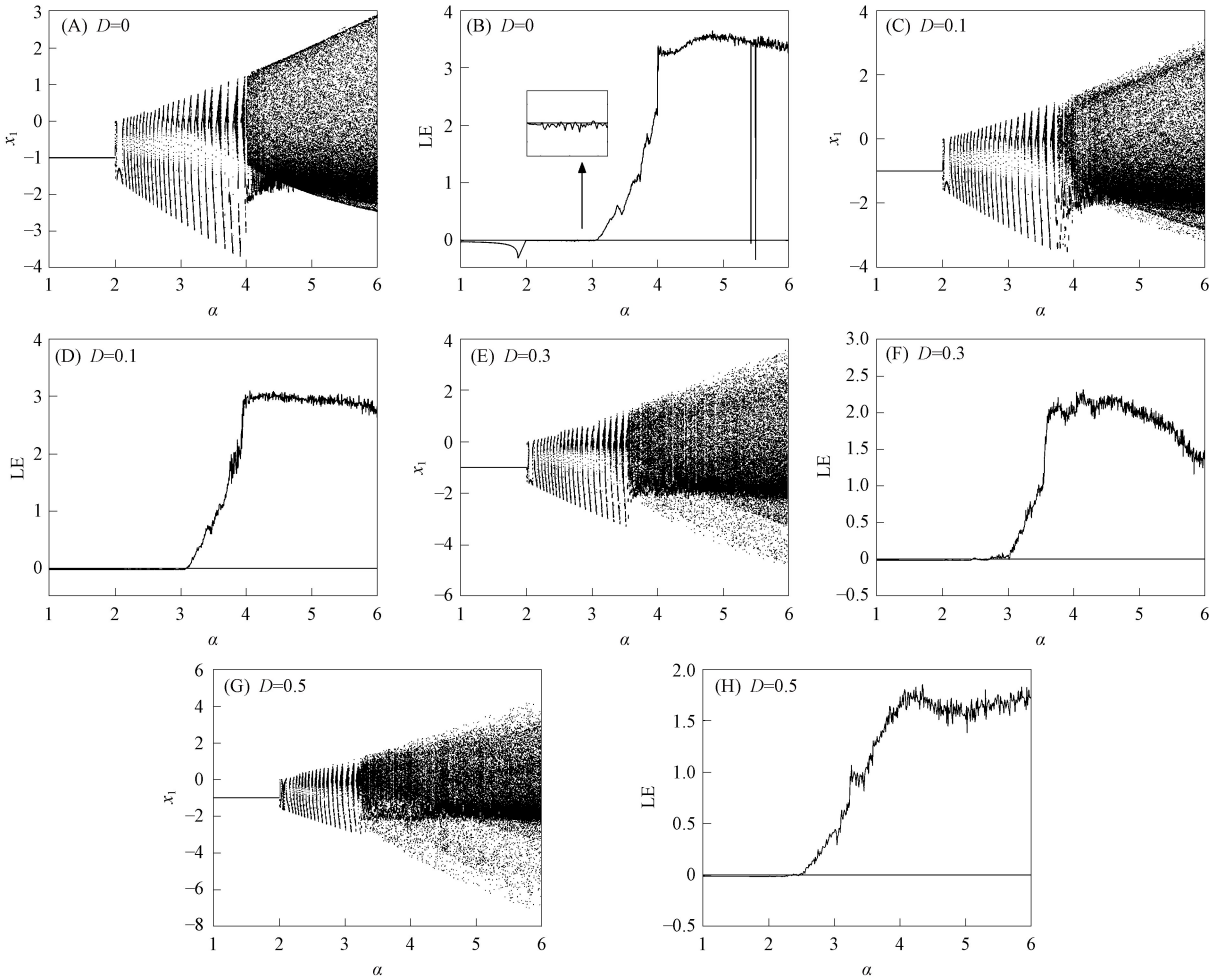


图 5  $\sigma = -1$  时系统 (2) 在不同耦合强度下的单参数分岔图及最大 Lyapunov 指数图

Fig. 5 One-parameter bifurcation diagrams and the maximum Lyapunov exponent diagrams of system (2) at  $\sigma = -1$  under different coupling strengths

### 2.3 阵发混沌

阵发性道路也是常见的通往混沌的道路. 阵发混沌现象称为间歇混沌, 其主要表现为混沌状态和周期状态随机交替出现. 间歇混沌通常有 5 种类型<sup>[21]</sup>: 由鞍结分岔导致的 PM-I 型间歇混沌; 由亚临界 Neimark-Sacker 分岔导致的 PM-II 型间歇混沌; 由亚临界 Flip 分岔导致的 PM-III 型间歇混沌; 与混沌吸引子个数及稳定性有关的 On-off 和 In-off 型间歇混沌; 与混沌吸引子扩大、缩小及合并有关的诱发激变间歇混沌.

在耦合 Rulkov 神经元模型对应的双参数分岔图中, 可多次观察到阵发性道路通往混沌. 图 6 为  $\sigma=0.5$  时系统 (2) 在不同耦合强度下的单参数分岔图及最大 Lyapunov 指数图. 由图 6(A)可见: 当  $\alpha=4.313 29$  时, 系统出现 PM-I 型间歇混沌, 其对应的最大 Lyapunov 指数值突然下降; 当  $\alpha=4.313 350 > 4.313 29$  时, 系统处于周期运动; 当  $\alpha=4.313 281 < 4.313 29$  时, 系统由规则的周期放电状态转变为不规则的混沌放电状态, 周期 3 吸引子经由阵发性道路变为混沌. 此外, 时间响应序列图可更直观展示阵发混沌现象, 结果如图 7 所示. 由图 7(A)可见, 随着时间的变化, 代表周期运动的层流态随机被代表混沌运动的爆发态打破. 由图 7(B)可见, 分岔后系统经历短暂的混沌状态, 最终

呈周期 3 的运动状态.

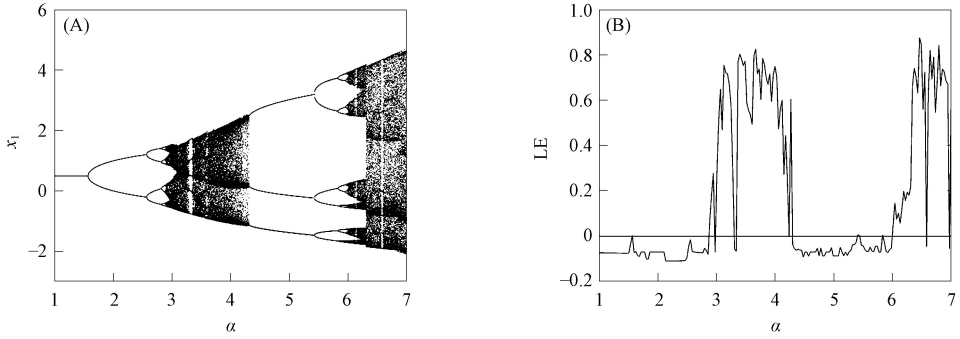


图 6  $\sigma=0.5$  时系统 (2) 在不同耦合强度下的单参数分岔图及最大 Lyapunov 指数图

Fig. 6 One-parameter bifurcation diagrams and the maximum Lyapunov exponent diagrams of system (2) at  $\sigma=0.5$  under coupling strengths

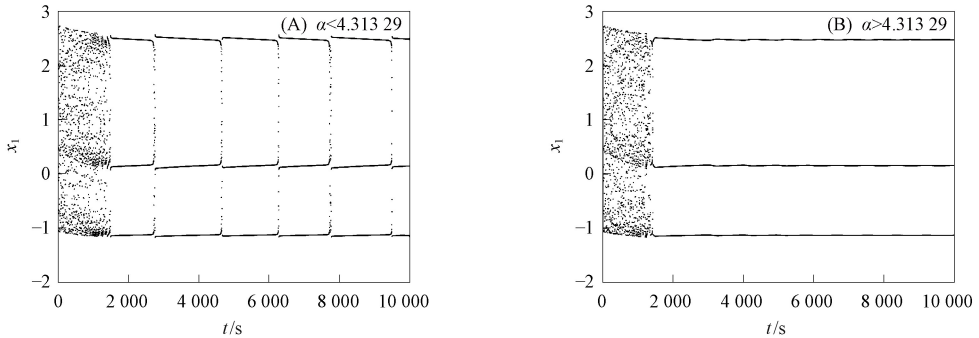


图 7 时间响应序列

Fig. 7 Time response series

在耦合 Rulkov 神经元模型中也出现了诱发激变导致的间歇混沌. 由图 6(A)可见, 当  $\alpha=6.313$  时, 混沌吸引子所在范围突然变大, 吸引子发生内部激变导致混沌吸引子尺寸扩大, 从而产生阵发混沌. 激变前后的吸引子如图 8 所示. 由图 8(A)可见, 当  $\alpha=6.308 < 6.313$  时, 系统存在 3 个混沌吸引子. 由图 8(B)可见, 当  $\alpha=6.338 > 6.313$  时, 混沌吸引子尺寸突然变大. 类似地, 由图 4(C)可见, 当  $D=0.3$  时, 在  $\alpha=-3.4975$  附近, 2 片混沌吸引子所在范围突然扩大, 也可观察到由吸引子内部激变产生的阵发混沌现象.

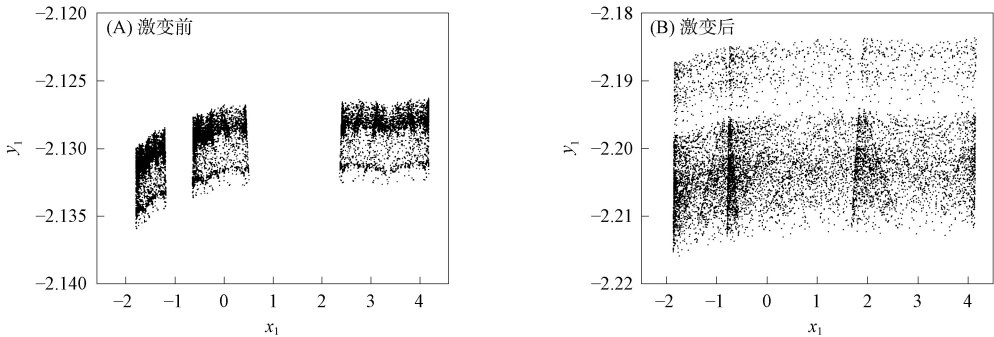


图 8 激变前后的吸引子

Fig. 8 Attractors before and after crisis

阵发混沌现象在神经元的实际生理活动中表明耦合神经元系统具有自身调节能力, 可随机在混沌和周期间变换. 因此, 耦合 Rulkov 神经元系统不能维持长期稳定.

### 2.4 伴随混沌的加周期现象

图 9 为系统 (2) 在不同耦合强度下的双参数分岔图及单参数分岔图. 由图 9(A)可见, 当  $D=0$ , 参数  $\sigma$  和  $\alpha$  同时变化时, 白色混沌区域将彩色的周期区域分隔. 固定参数  $\alpha$ , 当  $\sigma$  逐渐减小时, 耦合

Rulkov 神经元模型依次呈周期 2 放电, 混沌, 周期 3 放电, 混沌, ..., 即稳定的  $k$  周期结束后随即出现一个混沌区域, 之后出现  $(k+1)$  周期, 并在混沌区域中也可观察到一些周期窗口<sup>[22]</sup>. 图 9(C) 为对应图 9(A) 的单参数分岔图. 由图 9(C) 可见, 当  $\alpha=8.5$  时可观察到明显的加周期分岔现象. 由图 9(B), (D) 可见, 当  $D=0.1$ ,  $\alpha=8.5$ ,  $\sigma$  逐渐减小时, 随着耦合强度的增加, 系统呈更复杂的分岔现象.

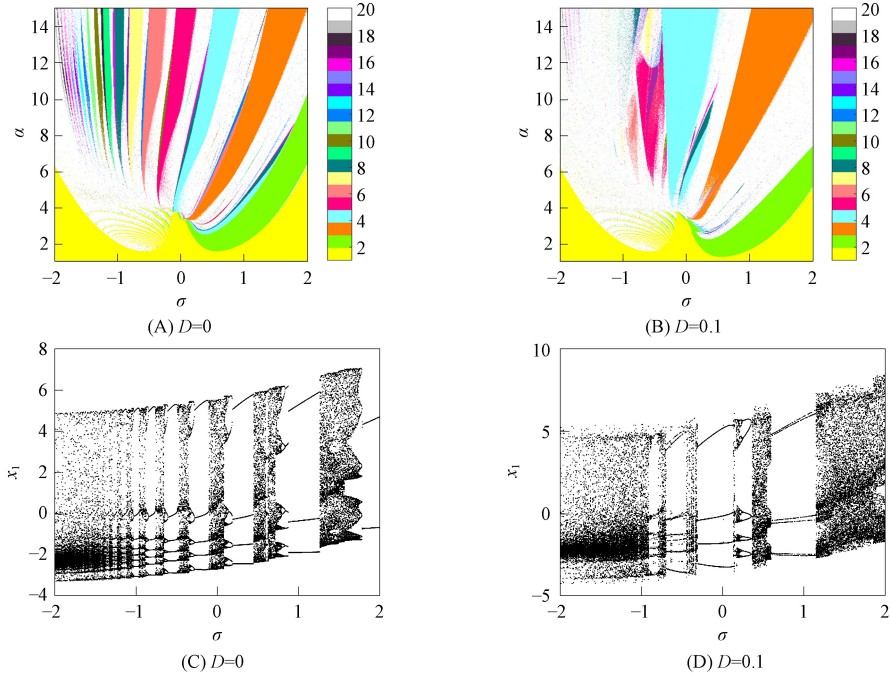


图 9 系统(2)在不同耦合强度下的双参数分岔图及单参数分岔图

Fig. 9 Two-parameter bifurcation diagrams and one-parameter bifurcation diagrams of system (2) under different coupling strengths

综上所述, 本文从混沌的 Rulkov 神经元模型出发, 基于电突触具有信号传输速度快和不易受外界干扰等特点, 研究了相同 Rulkov 神经元在电耦合情形下的动力学行为. 首先, 根据动力学分析求解耦合 Rulkov 模型的不动点, 并给出几种典型的放电模式. 其次, 由于在正常神经元的生理活动中通常是多个参数同时变化, 仅分析单个参数的变化不能全面理解神经元的放电活动. 因此, 通过数值计算给出该模型在不同耦合强度下的双参数分岔图, 并由此分析该模型的分岔模式和复杂动力学行为. 研究表明, 耦合 Rulkov 神经元模型通过 3 条路径通往混沌: 倍周期分岔道路、拟周期道路以及阵发混沌道路. 同时该模型具有伴随混沌的加周期分岔现象. 此外, 本文借助单参数分岔图以及最大 Lyapunov 指数图验证了该模型通往混沌的道路. 由以上分析可知, 随着耦合强度的增加, 耦合 Rulkov 神经元模型在电耦合情形下呈更复杂的动力学行为.

## 参 考 文 献

- [1] 胡三觉, 徐健学, 任维, 等. 神经元——非线性活动的探索 [M]. 北京: 科学出版社, 2017: 60-61. (HU S J, XU J X, REN W, et al. Neuron: The Exploration of Its Nonlinear Activities [M]. Beijing: Science Press, 2017: 60-61.)
- [2] RULKOV N F. Modeling of Spiking-Bursting Neural Behavior Using Two-Dimensional Map [J]. Physical Review E, 2002, 65(4): 1922.
- [3] SHILNIKOV A L, RULKOV N F. Subthreshold Oscillations in a Map-Based Neuron Model [J]. Physics Letters A, 2004, 328(2/3): 177-184.
- [4] RULKOV N F. Regularization of Synchronized Chaotic Bursts [J]. Physical Review Letters, 2001, 86(1): 183-1-183-4.
- [5] IZHIKEVICH E M. Simple Model of Spiking Neurons [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2003,

- 14(6): 1569-1572.
- [6] BAO H, HUA Z Y, LIU W B, et al. Discrete Memristive Neuron Model and Its Interspike Interval-Encoded Application in Image Encryption [J]. *Science China Technological Sciences*, 2021, 64(10): 2281-2291.
- [7] LAI Q, LAI C, ZHANG H, et al. Hidden Coexisting Hyperchaos of New Memristive Neuron Model and Its Application in Image Encryption [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2022, 158: 112017-1-112017-15.
- [8] WANG C X, CAO H J. Parameter Space of the Rulkov Chaotic Neuron Model [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, 19(6): 2060-2070.
- [9] 孙慧静. 离散神经元系统的动态分析及聚合行为研究 [D]. 北京: 北京交通大学, 2018. (SUN H J. Research on Dynamic Analysis and Collective Behavior of Map-Based Neuron System [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2018.)
- [10] 吴艳果. 基于映射的平均耦合神经元簇放电机理 [D]. 北京: 北京交通大学, 2011. (WU Y G. The Bursting Mechanism of Map-Based Mean Field Coupling Neurons [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2011.)
- [11] WANG C X, CAO H J. Stability and Chaos of Rulkov Map-Based Neuron Network with Electrical Synapse [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, 20(2): 536-545.
- [12] SUN H J, CAO H J. Synchronization of Two Identical and Non-identical Rulkov Models [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2016, 40: 15-27.
- [13] SUN H J, CAO H J. Complete Synchronization of Coupled Rulkov Neuron Networks [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 84: 2423-2434.
- [14] CHENG L F, CAO H J. Synchronization Dynamics of Two Heterogeneous Chaotic Rulkov Neurons with Electrical Synapses [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2017, 27(2): 1730009-1-1730009-15.
- [15] RAKSHIT S, RAY A, BERA B K, et al. Synchronization and Firing Patterns of Coupled Rulkov Neuronal Map [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 94: 785-805.
- [16] BASHKIRTSEVA I, PISARCHIK A N, RYASHKO L. Multistability and Stochastic Dynamics of Rulkov Neurons Coupled via a Chemical Synapse [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2023, 125: 107383-1-107383-10.
- [17] BASHKIRTSEVA I, PISARCHIK A N, RYASHKO L. Coexisting Attractors and Multistate Noise-Induced Intermittency in a Cycle Ring of Rulkov Neurons [J]. *Mathematics*, 2023, 11(3): 597-605.
- [18] LI K X, BAO H, LI H Z, et al. Memristive Rulkov Neuron Model with Magnetic Induction Effects [J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2021, 18(3): 1726-1736.
- [19] 刘丽君, 韦笃取. 忆阻 Rulkov 神经网络同步研究 [J]. *计算物理*, 2023, 40(3): 389-400. (LIU L J, WEI D Q. Synchronization of Memristive Rulkov Neural Networks [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2023, 40(3): 389-400.)
- [20] MA M L, LU Y P, LI Z J, et al. Multistability and Phase Synchronization of Rulkov Neurons Coupled with a Locally Active Discrete Memristor [J]. *Fractal and Fractional*, 2023, 7(1): 82-99.
- [21] 吴文娟. 复杂混沌系统的存在性及动力学特性分析 [D]. 天津: 南开大学, 2010. (WU W J. Dynamical Behaviour Analysis and Existence Verification for Chaos of Complex Chaotic Systems [D]. Tianjin: Nankai University, 2010.)
- [22] 邬开俊. Hindmarsh-Rose 神经元模型的双参数分岔特性及耦合同步研究 [D]. 兰州: 兰州交通大学, 2017. (WU K J. The Double Parameter Bifurcation Characteristic and Coupling Synchronization of Hindmarsh-Rose Neural Model [D]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2017.)

(责任编辑: 王 健)