doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023393

等完全 p-部图的点被多重集可区别的一般全染色

王　萱，陈祥恩
(西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070)

摘要：利用反证法、色集合事先分配法和构造染色法，讨论等完全 p-部图的顶点被多重集可区别的一般全染色，给出最优染色方案，并确定相应染色的色数.

关键词：等完全 p-部图；一般全染色；多重集；色集合；可区别
中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5489(2024)03-0503-12

General Total Colorings of Complete p-Partite Graphs Which Are Vertex-Distinguished by Multiple Sets

WANG Xuan, CHEN Xiang'en
(*College of Mathematics and Statistics*, *Northwest Normal University*, *Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: By using the method of proof by contradiction, the method of pre-assignment of color sets and the method of constructing coloring, we discussed the general total coloring of complete p-partite graphs which were vertex-distinguished by multiple sets, gave the coloring scheme for optimal coloring and determined the chormatic numbers of the corresponding colorings.

Keywords: general p-partite graph; general total coloring; multiple set; color set; distinguishing

目前，关于图的一般全染色问题研究已有很多成果. 例如：Harary 等[1]提出了图的点可区别一般边染色问题；文献[2]引入了图的点可区别一般全染色，并研究了路、圈、星(即 $K_{1,n}$)、双星、三星、轮、扇和完全图的一般点可区别全染色，确定了它们的一般点可区别全色数；文献[3]研究了部分完全三部图的点(被非多重集)可区别的 IE-全染色；文献[4]提出了点被多重集可区别的 IE-全染色及一般全染色，并研究了完全二部图的点被多重集可区别的 IE-全染色及一般全染色，其中包括等完全二部图的染色；文献[5]研究了完全四部图 K_{n_1,n_2,n_3,n_4} ($n_1 \leqslant n_2 = n_3 < n_4$ 或 $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$)的点被多重集可区别的一般全染色，给出了染色方案并确定相应的点被多重集可区别的一般全色数，其中包括等完全四部图的染色方案及点被多重集可区别的一般全色数；文献[6]研究了完全三部图的点被多重集可区别的一般全染色；文献[7]综述了关于某些顶点对被非多重色集合所区别的未必正常染色问题. 本文考虑等完全多部图的点被多重集可区别的一般全染色，给出染色方案并确定等完全多部图的点被多重集可区别的一般全色数.

1　预备知识

图 G 的一般全染色是指用若干种元素对图 G 的全体顶点及边的一个分配，通常进行染色时，所用

收稿日期：2023-09-25.
第一作者简介：王　萱(1999—)，女，汉族，硕士研究生，从事图论及其应用的研究，E-mail：wangxuan20220901@163.com. **通信作者简介**：陈祥恩(1965—)，男，汉族，硕士，教授，从事图论及其应用的研究，E-mail：chenxe@nwnu.edu.cn.
基金项目：国家自然科学基金(批准号：11761064).

的 k 种颜色用 $1,2,\cdots,k$ 表示，且数字代表的颜色之间有大小关系．图 G 使用 k 种颜色的一般全染色称为图 G 的 k-一般全染色．设 f 为图 G 的一般全染色，对任意的 $x\in V(G)$，用 $\widetilde{C}_f(x)$ 或 $\widetilde{C}(x)$ 表示点 x 的色以及与 x 关联的边的颜色构成的多重集．$\widetilde{C}_f(x)$ 称为 x 的多重色集合或色集合．显然 $|\widetilde{C}_f(x)|=d_G(x)+1$，其中 $d_G(x)$ 表示图 G 中点 x 的度．若对任意的 $u,v\in V(G)$，$u\neq v$，总有 $\widetilde{C}_f(u)\neq\widetilde{C}_f(v)$，则称 f 是点被多重集可区别的．

令 $\tilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(G)=\min\{k\,|\,G$ 存在点被多重集可区别的 k-一般全染色$\}$，$\tilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(G)$ 称为点被多重集可区别的一般全色数．用 $K(p\times q)$ 表示每个部中顶点数目均为 q 的等完全 p-部图，第 i 个部的第 j 个顶点为 $x_j^{(i)}$，第 i 个部为 $X_i=\{x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_q^{(i)}\}$，$|X_i|=q$，$1\leqslant i\leqslant p$，$1\leqslant j\leqslant q$．设 X,Y 是图 G 顶点集的两个非空子集，用 (X,Y) 表示一个顶点在 X 中，另一个顶点在 Y 中的所有边构成的集合．

引理 1[8]　从 n 个互不相同元素中取出 r 个构成的重复组合数为 $\dbinom{n+r-1}{r}$ 个．

从 n 个互不相同元素中取出 r 个构成的重复组合称为 r-组合．r-组合也是上述 n 个互不相同元素构成的集合含有 r 个元素的多重子集合，所以 r-组合也称为 r-多重子集或简称 r-子集．本文若无特殊说明，r-子集中的颜色按不减顺序排列．

2　主要结果

定理 1　当 $p\geqslant 2$，$q=1$ 时，$\tilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(G)=2$．

证明：当 $p\geqslant 2$，$q=1$ 时，图 G 为 p 阶完全图 K_p，构造一个 p 阶对称矩阵 $\boldsymbol{M}_p$，使得次对角线及其上方的元素均为 1，而次对角线下方的元素均为 2．

将 $\boldsymbol{M}_p$ 的 (i,i)-元素（颜色）染给顶点 $x_1^{(i)}$，$i=1,2,\cdots,p$；将 $\boldsymbol{M}_p$ 的 (i,j)-元素染给边 $x_1^{(i)}x_1^{(j)}$，$i\neq j$，且 $i,j\in\{1,2,\cdots,p\}$．

下面说明在上述染色方案下的一般全染色是点被多重集可区别的．因为 $\boldsymbol{M}_p$ 的第 i 行元素构成的多重集恰好是 $x_1^{(i)}$ 的色集合，且当 $i<j$ 时，$\widetilde{C}(x_1^{(i)})$ 含 1 的数目比 $\widetilde{C}(x_1^{(j)})$ 含 1 的数目多，故 $\widetilde{C}(x_1^{(i)})\neq\widetilde{C}(x_1^{(j)})$，即点被多重集可区别．

例如，K_6 使用 2 种颜色的点被多重集可区别的一般全染色如图 1 所示（其中颜色为 1 的边未画出，颜色为 2 的边已画出），对应的染色方案如下：图 G 为 6 阶完全图 K_6，构造一个 6 阶对称矩阵 $\boldsymbol{M}_6$，使得次对角线及其上方的元素均为 1，而次对角线下方的元素均为 2，

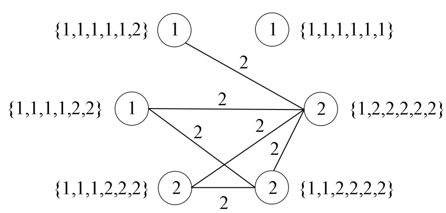

图 1　K_6 使用两种颜色的点可区别一般全染色

Fig. 1　Vertex-distinguishing general total colorings with two colors of K_6

$$\boldsymbol{M}_6=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&2\\1&1&1&1&2&2\\1&1&1&2&2&2\\1&1&2&2&2&2\\1&2&2&2&2&2\end{pmatrix}.$$

将 $\boldsymbol{M}_6$ 的 (i,i)-元素（颜色）染顶点 $x_1^{(i)}$，$i=1,2,\cdots,6$；将 $\boldsymbol{M}_6$ 的 (i,j)-元素染边 $x_1^{(i)}x_1^{(j)}$，$i\neq j$，且 $i,j\in\{1,2,\cdots,6\}$．于是，所有的点及边已染色．下面列举 $X_j(j=1,2,\cdots,6)$ 中点的色集合：

$$X_1:\widetilde{C}(x_1^{(1)})=\{1,1,1,1,1,1\},$$
$$X_2:\widetilde{C}(x_1^{(2)})=\{1,1,1,1,1,2\},$$
$$X_3:\widetilde{C}(x_1^{(3)})=\{1,1,1,1,2,2\},$$
$$X_4:\widetilde{C}(x_1^{(4)})=\{1,1,1,2,2,2\},$$
$$X_5:\widetilde{C}(x_1^{(5)})=\{1,1,2,2,2,2\},$$

$$X_6: \widetilde{C}(x_1^{(6)})=\{1,2,2,2,2,2\},$$

$\widetilde{\chi}_{gvt}(K_6)=2$.

定理 2　当 $p\geqslant 2$，$q=2$ 时，$\widetilde{\chi}_{gvt}(G)=2$.

证明：当 $q=2$ 时，图 G 共有 $2p$ 个顶点，每个顶点的色集合对应一个$(2p-1)$-子集(为方便，证明过程中$(2p-1)$-子集的颜色未按不减顺序排列). 将$\{1,2\}$两种色的$(2p-1)$-子集(多重集)分为两类.

第一类：设$\{1,2\}$两种色的所有$(2p-1)$-子集多重集中 1 的数目比 2 的数目多的多重集为 A_i，A_i 中所含元素 2 的个数等于 i. 第一项从 A_0 起，最后一项到 A_{p-1} 止，多重集 A_i 所含 2 的数目严格递增，A_i 中元素按从大到小的顺序排列，$1\leqslant i\leqslant p-1$. 例如，当 $p=6$ 时，

$$A_0=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\},\qquad A_1=\{2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\},$$
$$A_2=\{2,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1\},\qquad A_3=\{2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1\},$$
$$A_4=\{2,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1\},\qquad A_5=\{2,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1\}.$$

第二类：将 A_i 对应的$(2p-1)$-子集(多重集)中的元素 1,2 对调，所得新的多重集记为 $du(A_i)$，$du(A_i)$中含元素 1 的个数等于 $i(i=0,1,\cdots,p-1)$. 多重集 $du(A_0),du(A_1),\cdots,du(A_{p-1})$中所含元素 1 的数目严格递增，$du(A_i)$中元素按从小到大的顺序排列，$0\leqslant i\leqslant p-1$. 例如，当 $p=6$ 时，

$$du(A_0)=\{2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\},\qquad du(A_1)=\{1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\},$$
$$du(A_2)=\{1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2\},\qquad du(A_3)=\{1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2\},$$
$$du(A_4)=\{1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2\},\qquad du(A_5)=\{1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2\}.$$

将 $A_0,A_1,A_2,\cdots,A_{p-1}$ 依次分别对应到 $x_1^{(1)},x_1^{(2)},x_1^{(3)},\cdots,x_1^{(p)}$，将 $du(A_0),du(A_1),du(A_2),\cdots,du(A_{p-1})$依次分别对应到 $x_1^{(2)},x_2^{(2)},x_2^{(3)},\cdots,x_2^{(p)}$. 于是 $x_1^{(i)}$ 和 $x_2^{(i)}$ 对应的子集是互为对偶的，$1\leqslant i\leqslant p$.

下面对 $K(p\times 2)$的点、边进行染色，使得 $x_1^{(i)}$ 接受颜色 1，$x_2^{(i)}$ 接受颜色 2，$1\leqslant i\leqslant p$. 将 $x_1^{(1)}$ 的关联边都染颜色 1，$x_2^{(1)}$ 的关联边都染颜色 2. 将 $x_1^{(2)}$ 未被染色的关联边都染颜色 1，$x_2^{(2)}$ 未被染色的关联边都染颜色 2. 将 $x_1^{(3)}$ 未被染色的关联边都染颜色 1，$x_2^{(3)}$ 未被染色的关联边都染颜色 2. 依次类推，直到最后将 $x_1^{(p-1)}$ 未被染色的关联边都染颜色 1，将 $x_2^{(p-1)}$ 未被染色的关联边都染颜色 2. 最终得到 $K(p\times 2)$的 2-一般全染色. 该 2-一般全染色是点被多重集可区别的. 因为每个顶点的色集合刚好是染色前对应该顶点的集合，从而保证了不同点的色集合不同.

例如，$K(6\times 2)$的点被多重集可区别的 2-一般全染色如图 2 所示(其中颜色为 1 的边未画出，颜色为 2 的边已画出). 图 2 中位置靠近的两个顶点属于同一部，并给出了每个顶点的色集合.

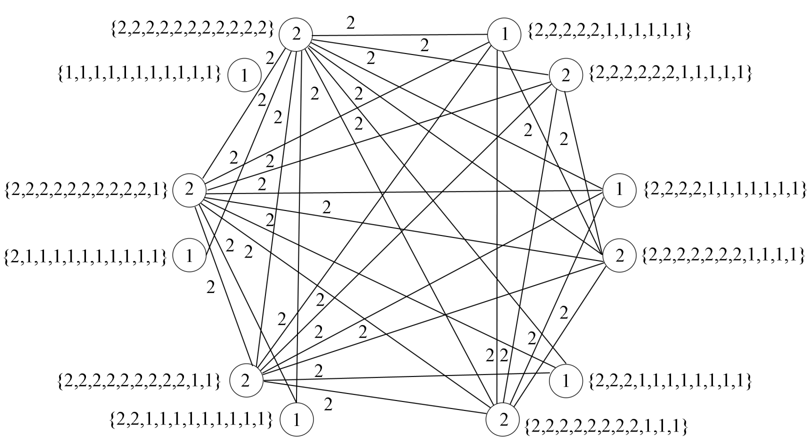

图 2　$K(6\times 2)$的点被多重集可区别的 2-一般全染色

Fig. 2　2-General total colorings of $K(6\times 2)$ which are vertex-distinguished by multiple sets

下面列举 $X_j(j=1,2,\cdots,6)$中点的色集合：

$$X_1: \widetilde{C}(x_1^{(1)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\},\qquad \widetilde{C}(x_2^{(1)})=\{2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\},$$
$$X_2: \widetilde{C}(x_1^{(2)})=\{2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\},\qquad \widetilde{C}(x_2^{(2)})=\{1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\},$$

$X_3: \widetilde{C}(x_1^{(3)})=\{2,2,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$, $\widetilde{C}(x_2^{(3)})=\{1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2\}$,

$X_4: \widetilde{C}(x_1^{(4)})=\{2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1\}$, $\widetilde{C}(x_2^{(4)})=\{1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2\}$,

$X_5: \widetilde{C}(x_1^{(5)})=\{2,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1\}$, $\widetilde{C}(x_2^{(5)})=\{1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2\}$,

$X_6: \widetilde{C}(x_1^{(6)})=\{2,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1\}$, $\widetilde{C}(x_2^{(6)})=\{1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2\}$.

定理3 当 $p\geqslant 2$，$q=3$ 时，$\widetilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(G)=3$.

证明：当 $q=3$ 时，图 G 共有 $3p$ 个顶点，每个顶点的色集合对应一个 $(3p-2)$-子集. 首先证明图 G 不存在使用2种色的点被多重集可区别的一般全染色. 用反证法. 假设图 G 存在使用2种色的点被多重集可区别的一般全染色，则由引理1可知，2种色的 $(3p-2)$-子集共有 $(3p-1)$ 个. 若要使2种色可染，则需满足 $(3p-2)$-子集数大于图 G 所含顶点数. 显然 $(3p-1)<3p$，矛盾. 下面构造使用3种色的点被多重集可区别的一般全染色.

将 $\{1,2,3\}$ 3种色的 $(3p-2)$-子集(多重集)分为3类.

第一类：在对应部的3个顶点对应的3个多重集中，1的数目比2,3的数目多，第一项从 $\widetilde{C}(x_1^{(1)})$ 起，最后一项到 $\widetilde{C}(x_1^{(p)})$ 止，多重集中1的数目随上标的增大逐次递减. 例如，当 $p=3$ 时，

$$\widetilde{C}(x_1^{(1)})=\{1,1,1,1,1,1,1\},$$
$$\widetilde{C}(x_1^{(2)})=\{1,1,1,1,1,2,3\},$$
$$\widetilde{C}(x_1^{(3)})=\{1,1,1,2,2,3,3\}$$

均是对应部所有多重集中含1数目最多的色集.

第二类：在对应部的3个顶点对应的3个多重集中，2的数目比1,3的数目多，第一项从 $\widetilde{C}(x_2^{(1)})$ 起，最后一项到 $\widetilde{C}(x_2^{(p)})$ 止，多重集中2的数目随上标的增大逐次递减. 例如，当 $p=3$ 时，

$$\widetilde{C}(x_2^{(1)})=\{2,2,2,2,2,2,2\},$$
$$\widetilde{C}(x_2^{(2)})=\{1,2,2,2,2,2,3\},$$
$$\widetilde{C}(x_2^{(3)})=\{1,1,2,2,2,3,3\}$$

均是对应部所有多重集中含2数目最多的色集合.

第三类：在对应部的3个顶点对应的3个多重集中，3的数目比1,2的数目多，第一项从 $\widetilde{C}(x_3^{(1)})$ 起，最后一项到 $\widetilde{C}(x_3^{(p)})$ 止，多重集中3的数目随上标的增大逐次递减. 例如，当 $p=3$ 时，

$$\widetilde{C}(x_3^{(1)})=\{3,3,3,3,3,3,3\},$$
$$\widetilde{C}(x_3^{(2)})=\{1,2,3,3,3,3,3\},$$
$$\widetilde{C}(x_3^{(3)})=\{1,1,2,2,3,3,3\}$$

均是对应部所有多重集中含3数目最多的色集合.

将 $\widetilde{C}(x_1^{(1)}),\widetilde{C}(x_1^{(2)}),\cdots,\widetilde{C}(x_1^{(p)})$ 对应到顶点 $x_1^{(1)},x_1^{(2)},\cdots,x_1^{(p)}$，将 $\widetilde{C}(x_2^{(1)}),\widetilde{C}(x_2^{(2)}),\cdots,\widetilde{C}(x_2^{(p)})$ 对应到顶点 $x_2^{(1)},x_2^{(2)},\cdots,x_2^{(p)}$，将 $\widetilde{C}(x_3^{(1)}),\widetilde{C}(x_3^{(2)}),\cdots,\widetilde{C}(x_3^{(p)})$ 对应到顶点 $x_3^{(1)},x_3^{(2)},\cdots,x_3^{(p)}$. 即将顶点与色集合一一对应.

下面对 $K(p\times 3)$ 的点、边进行染色. 将 $x_1^{(i)}$ 染颜色1，$x_2^{(i)}$ 染颜色2，$x_3^{(i)}$ 染颜色3. 令 $x_1^{(1)}$ 的所有关联边均染颜色1，$x_2^{(1)}$ 的所有关联边均染颜色2，$x_3^{(1)}$ 的所有关联边均染颜色3. 令 $x_1^{(2)}$ 未被染色的关联边均染颜色1，$x_2^{(2)}$ 未被染色的关联边均染颜色2，$x_3^{(2)}$ 未被染色的关联边均染颜色3. 依次类推，直到最后令 $x_1^{(p-1)}$ 未被染色的关联边均染颜色1，$x_2^{(p-1)}$ 未被染色的关联边均染颜色2，$x_3^{(p-1)}$ 未被染色的关联边均染颜色3. 最后所有的顶点和边均已完成染色，得到 $K(p\times 3)$ 的3-一般全染色. 因为每个顶点的色集合刚好是染色前对应该顶点的集合，从而保证了不同点的色集合不同. 下面说明在这种染色方案下顶点的色集合各不相同.

1) 同一部中点的色集合各不相同.

由于 $\widetilde{C}(x_1^{(i)})$ 中含1的数目比 $\widetilde{C}(x_2^{(i)}),\widetilde{C}(x_3^{(i)})$ 中含1的数目多，$\widetilde{C}(x_2^{(i)})$ 中含2的数目比 $\widetilde{C}(x_1^{(i)})$，$\widetilde{C}(x_3^{(i)})$ 中含2的数目多，$\widetilde{C}(x_3^{(i)})$ 中含3的数目比 $\widetilde{C}(x_1^{(i)}),\widetilde{C}(x_2^{(i)})$ 中含3的数目多，$i=1,2,\cdots,p$，故同一部中顶点的色集合各不相同.

2）若两个顶点属于不同部，则这两个点的色集合不同.

当 $1\leqslant i<j-1\leqslant p$ 时，$X_1\cup\cdots\cup X_{i-1}\cup X_{j+1}\cup\cdots\cup X_p$ 中点与 $x_1^{(i)}$ 所连色为 1 的边的条数等于 $X_1\cup\cdots\cup X_{i-1}\cup X_{j+1}\cup\cdots\cup X_p$ 中点与 $x_1^{(j)}$ 所连色为 1 的边的条数. $x_1^{(i)}$ 与 $X_{i+1}\cup\cdots\cup X_{j-1}$ 中点所连边的色均为 1，而 $x_1^{(j)}$ 与 $X_{i+1}\cup\cdots\cup X_{j-1}$ 中点所连边中仅有边的$\dfrac{1}{3}$的色为 1，其余$\dfrac{2}{3}$的边的色为 2 或 3. 所以 $x_1^{(i)}$ 与 $X_{i+1}\cup\cdots\cup X_{j-1}$ 中点所连色为 1 的边的条数比 $x_1^{(j)}$ 与 $X_{i+1}\cup\cdots\cup X_{j-1}$ 中点所连色为 1 的边的条数多，$x_1^{(i)}$ 与 X_j 中各点连边的色均为 1(共 3 条)，$x_1^{(j)}$ 与 X_i 中点所连边只有 1 条色为 1. 即 $\widetilde{C}(x_1^{(i)})$含 1 的数目比 $\widetilde{C}(x_1^{(j)})$含 1 的数目多. 同理可得 $\widetilde{C}(x_2^{(i)})$含 2 的数目比 $\widetilde{C}(x_2^{(j)})$含 2 的数目多，$\widetilde{C}(x_3^{(i)})$含 3 的数目比 $\widetilde{C}(x_3^{(j)})$含 3 的数目多.

对 $\forall\,1\leqslant i<j\leqslant p$，$\widetilde{C}(x_1^{(i)})$含 1 的数目多于$\widetilde{C}(x_1^{(j)})$含 1 的数目，即 $x_1^{(i)}$ 与 $x_1^{(j)}$ 可区别，而$\widetilde{C}(x_1^{(j)})$含 1 的数目比 $\widetilde{C}(x_2^{(j)})$,$\widetilde{C}(x_3^{(j)})$含 1 的数目多，故 $\widetilde{C}(x_1^{(i)})$含 1 的数目比 $\widetilde{C}(x_2^{(j)})$,$\widetilde{C}(x_3^{(j)})$含 1 的数目多. 从而$x_2^{(i)}$ 与 $x_1^{(j)}$,$x_3^{(j)}$ 可区别. $\widetilde{C}(x_3^{(i)})$含 3 的数目多于 $\widetilde{C}(x_3^{(j)})$含 3 的数目，即 $x_3^{(i)}$ 与 $x_3^{(j)}$ 可区别,而 $\widetilde{C}(x_3^{(j)})$含 3 的数目比$\widetilde{C}(x_1^{(j)})$,$\widetilde{C}(x_2^{(j)})$含 3 的数目多，故 $\widetilde{C}(x_3^{(i)})$含 3 的数目比($\widetilde{C}(x_1^{(j)})$,$\widetilde{C}(x_2^{(j)})$含 3 的数目多. 从而 $x_3^{(i)}$ 与 $x_1^{(j)}$,$x_2^{(j)}$ 可区别. 即若两个顶点属于不同部，则这两个点的色集合不同.

例如，$K(3\times3)$的点被多重集可区别的 3-一般全染色如图 3 所示(其中颜色为 3 的边未画出，颜色为 1,2 的边已画出). 图 3 中位置靠近的 3 个顶点属于同一部，并给出了每个顶点的色集合.

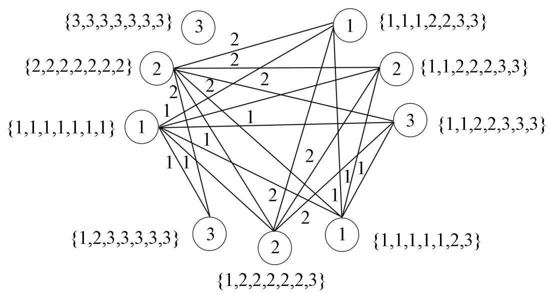

图 3　$K(3\times3)$的点被多重集可区别的 3-一般全染色

Fig. 3　3-General total colorings of $K(3\times3)$ which are vertex-distinguished by multiple sets

下面列举 $X_j(j=1,2,3)$中点的色集合：

X_1：$\widetilde{C}(x_1^{(1)})=\{1,1,1,1,1,1,1\}$，　$\widetilde{C}(x_2^{(1)})=\{2,2,2,2,2,2,2\}$，　$\widetilde{C}(x_3^{(1)})=\{3,3,3,3,3,3,3\}$，

X_2：$\widetilde{C}(x_1^{(2)})=\{1,1,1,1,1,2,3\}$，　$\widetilde{C}(x_2^{(2)})=\{1,2,2,2,2,2,3\}$，　$\widetilde{C}(x_3^{(2)})=\{1,2,3,3,3,3,3\}$，

X_3：$\widetilde{C}(x_1^{(3)})=\{1,1,1,2,2,3,3\}$，　$\widetilde{C}(x_2^{(3)})=\{1,1,2,2,2,3,3\}$，　$\widetilde{C}(x_3^{(3)})=\{1,1,2,2,3,3,3\}$.

定理 4　当 $p\geqslant5$，$q\geqslant4$ 时，$\tilde{\chi}_{\rm gvt}(G)=3$.

证明：对于等完全 p-部图 $K(p\times q)$，其第 i 个部全体顶点构成的集合为 X_i，$i=1,2,\cdots,p$. 设 $\boldsymbol{I}_q$ 为 q 阶单位矩阵；$\boldsymbol{U}_q(i,j)$表示次对角线上方元素均为 i，而次对角线及其下方的元素均为 j 的 $q\times q$ 阶矩阵；$\boldsymbol{L}_q(i,j)$表示次对角线及其上方元素均为 i，而次对角线下方的元素均为 j 的 $q\times q$ 阶矩阵，$1\leqslant i<j\leqslant3$；$\boldsymbol{R}_q(i)$表示元素均为 i 的 q 阶方阵，$1\leqslant i\leqslant3$；$\boldsymbol{N}$ 表示元素均为 3 的 $q\times1$ 阶矩阵.

一个元素或者是 0 或者是颜色的对称矩阵 $\boldsymbol{A}(n\times n)$称为 G 的一个全染色(方案)矩阵，$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$\boldsymbol{A}$ 的(i,j)-元素$(i\neq j)$是连接第 i 个顶点和第 j 个顶点的边的颜色，当 v_i 与 $v_j(i\neq j)$间无边时，$\boldsymbol{A}$ 的(i,j)-元素为 0，当 v_i 与 v_j 间有边$(i\neq j)$时，(i,j)-元素为边的颜色，且(i,i)-元素为顶点的颜色.

下面分别证明当 $p=5$，$p=6$，$p\geqslant7$ 时，$\tilde{\chi}_{\rm gvt}(G)=3$.

1）当 $p=5$，$q\geqslant4$ 时，图 G 共有 $5q$ 个顶点，每个顶点的色集合对应一个$(4q+1)$-子集.

先证明图 G 不存在使用 2 种色的点被多重集可区别的一般全染色. 用反证法，假设图 G 存在使用 2 种色的点被多重集可区别的一般全染色，则由引理 1 可知，2 种色的$(4q+1)$-子集共有$(4q+2)$个. 若使 2 种色可染，则需满足$(4q+1)$-子集数大于顶点数. 显然当 $q\geqslant4$ 时，$(4q+2)<5q$，矛盾. 下面构造使用 3 种色的点被多重集可区别的一般全染色. 令

$$\boldsymbol{A}(5\times q)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{L}_q(1,2) \\ \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2) & \boldsymbol{L}_q(1,2) \\ \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{L}_q(2,3) & \boldsymbol{R}_q(3) \\ \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2) & \boldsymbol{L}_q(2,3) & \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(3) \\ \boldsymbol{L}_q(1,2) & \boldsymbol{L}_q(1,2) & \boldsymbol{R}_q(3) & \boldsymbol{R}_q(3) & \boldsymbol{I}_q \end{pmatrix}, \tag{1}$$

用 $\boldsymbol{i/j}$ 表示 $\boldsymbol{L}_q(i,j)$，$i,j\in\{1,2,3\}$，$\boldsymbol{k}$ 表示 $\boldsymbol{R}_q(k)$. 矩阵(1)的简易写法如下：

$$\boldsymbol{A}(5\times q)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_q & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1/2} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{I}_q & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1/2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{I}_q & \mathbf{2/3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2/3} & \boldsymbol{I}_q & \mathbf{3} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{1/2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \boldsymbol{I}_q \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}(5\times q)$是 $5q\times 5q$ 阶矩阵，将其分块，使得每块都是 q 阶方阵，则分块后的 $\boldsymbol{A}(5\times q)$的主对角线的5 块都是 $\boldsymbol{I}_q$，次对角线上的 5 块从右上角到左下角分别是 $\boldsymbol{L}_q(1,2)$，$\boldsymbol{R}_q(2)$，$\boldsymbol{I}_q$，$\boldsymbol{R}_q(2)$，$\boldsymbol{L}_q(1,2)$，分块后的 $\boldsymbol{A}(5\times q)$次对角线上方且不在主对角线上的块均为 $\boldsymbol{R}_q(1)$，分块后的 $\boldsymbol{A}(5\times q)$位于第 3 行、第 4 列相交处的块为 $\boldsymbol{U}_q(2,3)$，位于第 4 行、第 3 列相交处的块为 $\boldsymbol{U}_q(2,3)$，剩余块均为 $\boldsymbol{R}_q(3)$.

分块后的 $5q$ 个行向量依次对应到 $X_1\cup X_2\cup X_3\cup X_4\cup X_5$ 的 $5q$ 个顶点上，使得不同顶点对应不同的行，这些行是对应顶点的色集合. 注意到，当 $k\in\{1,2,3,4,5\}$，$l\in\{1,2,\cdots,q\}$时，$\boldsymbol{A}(5\times q)$的第$((k-1)q+l)$列除 0 外的各元素构成的多重集刚好是顶点 $x_l^{(k)}$ 在 $f_{5\times q}$下的多重色集合. $\boldsymbol{A}(5\times q)$对应$K(5\times q)$的一个一般全染色 $f_{5\times q}$. 下证该全染色是点可区别的.

① 同一部中点的色集合各不相同.

当 $k\in\{1,2,5\}$时，X_k 中各顶点 $x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_q^{(k)}$ 的色集合(随下标的增大)含 1 的数目减少，故 X_k 中任意两个顶点可区别. 当 $k\in\{3,4\}$时，X_k 中各顶点 $x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_q^{(k)}$ 的色集合(随下标的增大)含 2 的数目减少，故 X_k 中任意两个顶点可区别.

② 若两个顶点属于不同部，则这两个点的色集合不同.

$X_1\cup X_2$ 中各顶点的色集合不含 3，而 $X_3\cup X_4\cup X_5$ 中各顶点的色集合均含 3，故 $X_1\cup X_2$ 中各顶点与 $X_3\cup X_4\cup X_5$ 中各顶点可区别.

对 $1\leqslant k<l\leqslant 2$，$X_l$ 中各顶点的色集合含 2 的数目至少为 q，X_k 中各顶点的色集合含 2 的数目至多为$(q-1)$，且$(q-1)<q$，故 X_k 中各顶点与 X_l 中各顶点可区别. 对 $3\leqslant k<l\leqslant 4$，$X_l$ 中各顶点的色集合含 2 的数目至少为$(q+1)$，X_k 中各顶点的色集合含 2 的数目至多为 q，且 $q<(q+1)$，故 X_k 中各顶点与 X_l 中各顶点可区别. 当 $k=5$ 时，X_k 中各顶点的色集合包含最少 $2q$ 个 3，$X_3\cup X_4$ 中各顶点的色集合包含最多$(2q-1)$个 3，故 X_5 中顶点与 $X_3\cup X_4$ 中顶点可区别. 即若两个顶点属于不同部，则这两个点的色集合不同.

2) 当 $p=6$，$q\geqslant 4$ 时，图 G 共有 $6q$ 个顶点，每个顶点的色集合对应一个$(5q+1)$-子集.

首先证明图 G 不存在使用 2 种色的点被多重集可区别的一般全染色. 用反证法，假设图 G 存在使用 2 种色的点被多重集可区别的一般全染色，则由引理 1 可知，2 种色的$(5q+1)$-子集共有$(5q+2)$个. 若使 2 种色可染，则需满足$(5q+1)$-子集数大于顶点数. 显然当 $q\geqslant 4$ 时，$(5q+2)<6q$，矛盾. 下面构造使用 3 种色的点被多重集可区别的一般全染色.

令 $\boldsymbol{M}_1=(\boldsymbol{R}_q(1),\boldsymbol{L}_q(1,2),\boldsymbol{R}_q(2),\boldsymbol{L}_q(2,3),\boldsymbol{R}_q(3))$，该矩阵可写成如下形式：

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 & \cdots & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ⋰ & 2 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ⋰ & 3 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \underbrace{1 & \cdots & 1}_{q个} & \underbrace{1 & 2 & 2}_{q个} & \underbrace{2 & \cdots & 2}_{q个} & \underbrace{2 & 3 & 3}_{q个} & \underbrace{3 & \cdots & 3}_{q个} & 3 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{M}_1$ 是 $q\times(5q+1)$阶矩阵，将其分块，使得分块后的 q 个行向量依次对应到 X_6 的 q 个顶点上，且不同顶点对应不同的行，这些行是对应顶点的色集合.

下面对色集合进行分配，当 $l\in\{1,2,3,4,5\}$ 时，第 l 个块中的 (i,j)-元素(颜色)染边 $x_i^{(6)}x_j^{(l)}$，$i,j\in\{1,2,\cdots,q\}$，最后一列的 q 种颜色依次染 X_6 中的 q 个顶点 $x_1^{(6)},x_2^{(6)},\cdots,x_q^{(6)}$. 于是 X_6 中的全体顶点和 X_6 与 $X_1\cup X_2\cup X_3\cup X_4\cup X_5$ 中所有顶点的连边已染完色.

令 $\boldsymbol{M}_2=(\boldsymbol{L}_q(1,2),\boldsymbol{R}_q(2),\boldsymbol{L}_q(2,3),\boldsymbol{R}_q(3),\boldsymbol{N})$，该矩阵可写成如下形式：

$$\boldsymbol{M}_2=\left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}1&\cdots&1\\ \vdots&\iddots&2\\ 1&2&2\end{matrix}}_{q\text{个}} & \underbrace{\begin{matrix}2&\cdots&2\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 2&\cdots&2\end{matrix}}_{q\text{个}} & \underbrace{\begin{matrix}2&\cdots&2\\ \vdots&\iddots&3\\ 2&3&3\end{matrix}}_{q\text{个}} & \underbrace{\begin{matrix}3&\cdots&3\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 3&\cdots&3\end{matrix}}_{q\text{个}} & \begin{matrix}3\\ \vdots\\ 3\end{matrix}\end{matrix}\right).$$

$\boldsymbol{M}_2$ 是 $q\times(4q+1)$ 阶矩阵，将其分块，使得分块后的 q 个行向量依次对应到 X_5 的 q 个顶点上，且不同顶点对应不同的行，这些行是对应顶点的色集合除 (X_5,X_6) 外的其他元素组成的色集合.

下面对色集合进行分配，当 $l\in\{1,2,3,4\}$ 时，第 l 块中的 (i,j)-元素(颜色)染边 $x_i^{(5)}x_j^{(l)}$，$i,j\in\{1,2,\cdots,q\}$，最后一列的 q 种颜色依次染 X_5 中的 q 个顶点 $x_1^{(5)},x_2^{(5)},\cdots,x_q^{(5)}$. 于是 X_5 中的全体顶点和 X_5 与 $X_1\cup X_2\cup X_3\cup X_4$ 中所有顶点的连边已染完色.

令 $\boldsymbol{M}_3=(\boldsymbol{L}_q(1,2),\boldsymbol{R}_q(2),\boldsymbol{L}_q(2,3),\boldsymbol{N})$，该矩阵可写成如下形式：

$$\boldsymbol{M}_3=\left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}1&\cdots&1\\ \vdots&\iddots&2\\ 1&2&2\end{matrix}}_{q\text{个}} & \underbrace{\begin{matrix}2&\cdots&2\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 2&\cdots&2\end{matrix}}_{q\text{个}} & \underbrace{\begin{matrix}2&\cdots&2\\ \vdots&\iddots&3\\ 2&3&3\end{matrix}}_{q\text{个}} & \begin{matrix}3\\ \vdots\\ 3\end{matrix}\end{matrix}\right).$$

$\boldsymbol{M}_3$ 是 $q\times(3q+1)$ 阶矩阵，将其分块，使得分块后的 q 个行向量依次对应到 X_4 的 q 个顶点上，且不同顶点对应不同的行，这些行是对应顶点的色集合除 (X_4,X_5) 和 (X_4,X_6) 外的其他元素组成的色集合.

下面对色集合进行分配，当 $l\in\{1,2,3\}$ 时，第 l 块中的 (i,j)-元素(颜色)染边 $x_i^{(4)}x_j^{(l)}$，$i,j\in\{1,2,\cdots,q\}$，最后一列的 q 种颜色依次染 X_4 中的 q 个顶点 $x_1^{(4)},x_2^{(4)},\cdots,x_q^{(4)}$. 于是 X_4 中的全体顶点和 X_4 与 $X_1\cup X_2\cup X_3$ 中所有顶点的连边已染完色.

令 $\boldsymbol{M}_4=(\boldsymbol{R}_q(1),\boldsymbol{L}_q(1,2),\boldsymbol{N})$，该矩阵可写成如下形式：

$$\boldsymbol{M}_4=\left(\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}1&\cdots&1\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 1&\cdots&1\end{matrix}}_{q\text{个}} & \underbrace{\begin{matrix}1&\cdots&1\\ \vdots&\iddots&2\\ 1&2&2\end{matrix}}_{q\text{个}} & \begin{matrix}3\\ \vdots\\ 3\end{matrix}\end{matrix}\right).$$

$\boldsymbol{M}_4$ 是 $q\times(2q+1)$ 阶矩阵，将其分块，使得分块后的 q 个行向量依次对应到 X_3 的 q 个顶点上，且不同顶点对应不同的行，这些行是对应顶点的色集合除 (X_3,X_4)，(X_3,X_5)，(X_3,X_6) 外的其他元素组成的色集合.

下面对色集合进行分配，当 $l\in\{1,2\}$ 时，第 l 块中的 (i,j)-元素(颜色)染边 $x_i^{(3)}x_j^{(l)}$，$i,j\in\{1,2,\cdots,q\}$，最后一列的 q 种颜色依次染 X_3 中的 q 个顶点 $x_1^{(3)},x_2^{(3)},\cdots,x_q^{(3)}$. 于是 X_3 中的全体顶点和 X_3 与 $X_1\cup X_2$ 中所有顶点的连边已染完色.

最后将 (X_1,X_2) 的所有边染色 2，将 X_1 中全体顶点染色 1，X_2 中全体顶点染色 2. 于是图 G 的全体顶点和边已染完色. 下面说明在这种染色方案下点被多重色集合可区别.

① 同一部中点的色集合各不相同.

当 $k\in\{1,2,3,4,5,6\}$ 时，X_k 中各顶点 $x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_q^{(k)}$ 的色集合(随下标的增大)含 1 的数目减少，故 X_k 中任意两个顶点可区别.

② 若两个顶点属于不同部，则这两个点的色集合不同.

X_6 中各顶点的色集合包含 3 的数目最大值为 $2n$(在 $\widetilde{C}(x_q^{(6)})$ 取得)，X_5 中各顶点的色集合包含 3 的数目最小值为 $2n+1$(在 $\widetilde{C}(x_1^{(5)})$ 取得)，故 X_5 中点与 X_6 中点可区别. $X_5\cup X_6$ 中顶点的色集合含 2

的最大值为 $2n$($X_5\cup X_6$ 中顶点的色集合含 2 的数目相同)，$X_3\cup X_4$ 中顶点的色集合含 2 的最小值为 $2n+1$(在 $\widetilde{C}(x_q^{(3)})$或 $\widetilde{C}(x_q^{(4)})$取得)，故 $X_3\cup X_4$ 中点与 $X_5\cup X_6$ 中点可区别.

X_3 中顶点的色集合含 1 的数目最小值为 $n+1$(在 $\widetilde{C}(x_q^{(3)})$取得)，X_4 中顶点的色集合含 1 的数目最大值为 n(在 $\widetilde{C}(x_1^{(4)})$取得)，故 X_3 中点与 X_4 中点可区别. $X_1\cup X_2$ 中每个点的色集合不含颜色 3，而 $X_3\cup X_4\cup X_5\cup X_6$ 中每个点的色集合均包含颜色 3，故 $X_1\cup X_2$ 中点与 $X_3\cup X_4\cup X_5\cup X_6$ 中点可区别. X_1 中顶点的色集合含 1 的数目最小值为 $2n+3$(在 $\widetilde{C}(x_q^{(1)})$取得)，X_2 中顶点的色集合含 1 的数目最大值为 $2n$(在 $\widetilde{C}(x_1^{(2)})$取得)，故 X_1 中点与 X_2 中点可区别. 即若两个顶点属于不同部，则这两个点的色集合不同.

3) 当 $p\geqslant 7$，$q\geqslant 4$ 时，图 G 共有 pq 个顶点，每个顶点的色集合对应一个($(p-1)q+1$)-子集.

首先证明图 G 不存在使用 2 种色的点被多重集可区别的一般全染色. 用反证法，假设图 G 存在使用 2 种色的点被多重集可区别的一般全染色，则由引理 1 可知，2 种色的($(p-1)q+1$)-子集共有($(p-1)q+2$)个. 若使 2 种色可染，则需满足($(p-1)q+1$)-子集数大于顶点数. 显然当 $q\geqslant 4$ 时，$(p-1)q+2<pq$，矛盾. 下面构造使用 3 种色的点被多重集可区别的一般全染色.

情形① $q\equiv 1 \pmod 2$.

构造一个 $pq\times pq$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}(p\times q)=(\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2)$，其中

$$\boldsymbol{M}_1=\underbrace{\begin{pmatrix}
\boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(1) & \cdots & \cdots & \boldsymbol{R}_q(1)\\
\boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(1) & \cdots & \boldsymbol{R}_q(1)\\
\vdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \ddots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(1)\\
\vdots & \vdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(1)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{I}_q\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \boldsymbol{R}_q(1)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2)\\
\vdots & \vdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2) & \boldsymbol{R}_q(2)\\
\vdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2) & \cdots & \boldsymbol{R}_q(2)\\
\boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2) & \cdots & \cdots & \boldsymbol{R}_q(2)\\
\boldsymbol{U}_q(1,2) & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{U}_q(1,2)
\end{pmatrix}}_{(p-1)/2\text{个}},$$

$$\boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix}
\boldsymbol{R}_q(1) & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{U}_q(1,2)\\
\boldsymbol{R}_q(1) & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{R}_q(2) & \vdots\\
\boldsymbol{R}_q(1) & \cdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2) & \vdots & \vdots\\
\boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2) & \vdots & \vdots & \vdots\\
\boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2) & \vdots & \vdots & \vdots & \boldsymbol{U}_q(1,2)\\
\boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(2) & \vdots & \vdots & \vdots & \boldsymbol{U}_q(2,3)\\
\boldsymbol{R}_q(2) & \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(2) & \vdots & \vdots & \vdots\\
\boldsymbol{R}_q(2) & \boldsymbol{R}_q(2) & \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(2) & \boldsymbol{R}_q(2) & \boldsymbol{U}_q(2,3)\\
\boldsymbol{R}_q(2) & \cdots & \boldsymbol{R}_q(2) & \ddots & \boldsymbol{U}_q(2,3) & \boldsymbol{R}_q(3)\\
\boldsymbol{R}_q(2) & \cdots & \boldsymbol{R}_q(2) & \boldsymbol{U}_q(2,3) & \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(3)\\
\underbrace{\boldsymbol{U}_q(2,3) \quad \cdots \quad \boldsymbol{U}_q(2,3)}_{(p-5)/2\text{个}} & & & \boldsymbol{R}_q(3) & \boldsymbol{R}_q(3) & \boldsymbol{I}_q
\end{pmatrix}.$$

用 $\boldsymbol{I}_q$ 表示 q 阶单位阵，为方便，在简易写法中用 $\boldsymbol{i}/\boldsymbol{j}$ 表示 $\boldsymbol{U}_q(i,j)$，$i,j\in\{1,2,3\}$，用 $\boldsymbol{k}$ 表示 $\boldsymbol{R}_q(k)$，$k\in\{1,2,3\}$，从而矩阵 $\boldsymbol{A}(p\times q)$的简易写法为

$$
\boldsymbol{A}(p\times q)=\begin{pmatrix}
\boldsymbol{I}_q & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1/2\\
1 & \boldsymbol{I}_q & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 1/2\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots\\
1 & 1 & \cdots & \boldsymbol{I}_q & 1 & \cdots & 2 & 2 & 1/2\\
1 & 1 & \cdots & 1 & \boldsymbol{I}_q & \cdots & 2 & 2 & 2/3\\
\vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
1 & 1 & \cdots & 2 & 2 & \cdots & \boldsymbol{I}_q & 2/3 & 3\\
1 & 2 & \cdots & 2 & 2 & \cdots & 2/3 & \boldsymbol{I}_q & 3\\
\underbrace{1/2\quad 1/2\quad \cdots\quad 1/2}_{(p-1)/2\text{个}} & & & & \underbrace{2/3\quad \cdots\quad 3}_{(p-5)/2\text{个}} & & & 3 & \boldsymbol{I}_q
\end{pmatrix}.
$$

$\boldsymbol{A}(p\times q)$是 $pq\times pq$ 阶方阵，将其分块，使得分块后的每块都是 q 阶方阵，则分块后的 $\boldsymbol{A}(p\times q)$次对角线上的 p 个块从右上角到左下角分别是 $\boldsymbol{U}_q(1,2),\underbrace{\boldsymbol{R}_q(2),\cdots,\boldsymbol{R}_q(2)}_{(p-3)/2\text{个}},\boldsymbol{I}_q,\underbrace{\boldsymbol{R}_q(2),\cdots,\boldsymbol{R}_q(2)}_{(p-3)/2\text{个}},\boldsymbol{U}_q(1,2)$.

$\boldsymbol{A}(p\times q)$主对角线的 p 个块都是 $\boldsymbol{I}_q$，分块后的第 p 行（最后 1 行）的 p 个块依次是 $\underbrace{\boldsymbol{U}_q(1,2),\cdots,\boldsymbol{U}_q(1,2)}_{(p-1)/2\text{个}},\underbrace{\boldsymbol{U}_q(2,3),\cdots,\boldsymbol{U}_q(2,3)}_{(p-5)/2\text{个}},\boldsymbol{R}_q(3),\boldsymbol{R}_q(3),\boldsymbol{I}_q$.

分块后的 $\boldsymbol{A}(p\times q)$次对角线上方的不在主对角线上的块均为 $\boldsymbol{R}_q(1)$，分块后位于第$(p-1)$行、第$(p-2)$列相交处的块为 $\boldsymbol{U}_q(2,3)$，位于第$(p-2)$行、第$(p-1)$列相交处的块为 $\boldsymbol{U}_q(2,3)$，分块后 $\boldsymbol{A}(p\times q)$中其他位于次对角线下方，但不在主对角线上，且不在第 p 行和第 p 列，不是第$(p-1)$行、第$(p-2)$列相交处的块，也不是第$(p-2)$行、第$(p-1)$列相交处的块均为 $\boldsymbol{R}_q(2)$. 例如，$\boldsymbol{A}(11\times q)$为如下方阵(这里给出简易写法)：

$$
\boldsymbol{A}(11\times q)=\begin{pmatrix}
\boldsymbol{I}_q & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1/2\\
1 & \boldsymbol{I}_q & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1/2\\
1 & 1 & \boldsymbol{I}_q & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1/2\\
1 & 1 & 1 & \boldsymbol{I}_q & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1/2\\
1 & 1 & 1 & 1 & \boldsymbol{I}_q & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1/2\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boldsymbol{I}_q & 2 & 2 & 2 & 2 & 2/3\\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & \boldsymbol{I}_q & 2 & 2 & 2 & 2/3\\
1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \boldsymbol{I}_q & 2 & 2 & 2/3\\
1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \boldsymbol{I}_q & 2/3 & 3\\
1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2/3 & \boldsymbol{I}_q & 3\\
1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 3 & 3 & \boldsymbol{I}_q
\end{pmatrix}.
$$

$\boldsymbol{A}(p\times q)$对应 $K(p\times q)$的一个一般全染色 $f_{p\times q}$. 下证该全染色是点可区别的.

注意到当 $k\in\{1,2,\cdots,p\}$，$l\in\{1,2,\cdots,q\}$时，$\boldsymbol{A}(p\times q)$的第$((k-1)q+l)$列除 0 外的各元素构成的多重集刚好是顶点 $x_l^{(k)}$ 在 $f_{p\times q}$下的多重色集合.

(i) 同一部中点的色集合各不相同.

当 $k\in\left\{1,2,\cdots,\dfrac{p-1}{2}\right\}$时，$X_k$ 中各顶点 $x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_q^{(k)}$ 的色集合(随下标的增大)含 1 的数目减少，故 X_k 中任意两个顶点可区别. 当 $k\in\left\{\dfrac{p+1}{2},\dfrac{p+3}{2},\cdots,p\right\}$时，$X_k$ 中各顶点 $x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_q^{(k)}$ 的色集合(随下标的增大)含 2 的数目减少，故 X_k 中任意两个顶点可区别.

(ii) 若两个顶点属于不同部，则这两个点的色集合不同.

$X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_{(p-1)/2}$ 中各顶点的色集合不含 3，而 $X_{(p+1)/2}\cup X_{(p+3)/2}\cup\cdots\cup X_p$ 中各顶点的色集

合均含 3，故 $X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_{(p-1)/2}$ 中各顶点与 $X_{(p+1)/2}\cup X_{(p+3)/2}\cup\cdots\cup X_p$ 中各顶点可区别.

对 $1\leqslant k<l\leqslant\dfrac{p-1}{2}$，$X_l$ 中各顶点的色集合含 2 的数目比 X_k 中各顶点的色集合含 2 的数目多，且差值至少为 q（X_k 与 X_l 为相邻递增部时取得），故 X_k 中各顶点与 X_l 中各顶点可区别. 对 $\dfrac{p+1}{2}\leqslant k<l\leqslant p-1$，$X_l$ 中各顶点的色集合含 1 的数目比 X_k 中各顶点的色集合含 1 的数目少，且差值至少为 q（X_k 与 X_l 为相邻递增部时取得），故 X_k 中各顶点与 X_l 中各顶点可区别. 当 $k\in\left\{\dfrac{p+1}{2},\dfrac{p+3}{2},\cdots,p-1\right\}$时，$X_k$ 中各顶点的色集合包含最多 $2q$ 个 3，X_p 中各顶点的色集合包含最少 $(2q+1)$ 个 3，故 X_k 中的点与 X_p 中的点可区别. 即若两个顶点属于不同部，则这两个点的色集合不同.

情形② $q\equiv 0(\bmod 2)$.

构造一个 $pq\times pq$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}(p\times q)=(\boldsymbol{M}_3,\boldsymbol{M}_4)$，其中

$$\boldsymbol{M}_3=\underbrace{\begin{pmatrix}
\boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(1) & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{R}_q(1)\\
\boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(1) & \cdots & \cdots & \boldsymbol{R}_q(1)\\
\vdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(1) & \cdots & \boldsymbol{R}_q(1)\\
\vdots & \vdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(1)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(1)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{I}_q\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2) & \boldsymbol{R}_q(2)\\
\vdots & \vdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2) & \cdots & \boldsymbol{R}_q(2)\\
\vdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2) & \cdots & \cdots & \boldsymbol{R}_q(2)\\
\boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2) & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{R}_q(2)\\
\boldsymbol{U}_q(1,2) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{U}_q(1,2)
\end{pmatrix}}_{p/2\text{个}},$$

$$\boldsymbol{M}_4=\begin{pmatrix}
\boldsymbol{R}_q(1) & \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{U}_q(1,2)\\
\boldsymbol{R}_q(1) & \cdots & \cdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2) & \vdots\\
\boldsymbol{R}_q(1) & \cdots & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2) & \vdots & \vdots\\
\boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2) & \vdots & \vdots & \vdots\\
\boldsymbol{R}_q(1) & \boldsymbol{R}_q(2) & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\boldsymbol{R}_q(2) & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \boldsymbol{U}_q(1,2)\\
\boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(2) & \vdots & \vdots & \vdots & \boldsymbol{U}_q(2,3)\\
\boldsymbol{R}_q(2) & \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(2) & \vdots & \vdots & \vdots\\
\boldsymbol{R}_q(2) & \boldsymbol{R}_q(2) & \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(2) & \boldsymbol{R}_q(2) & \boldsymbol{U}_q(2,3)\\
\boldsymbol{R}_q(2) & \cdots & \boldsymbol{R}_q(2) & \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{U}_q(2,3) & \boldsymbol{R}_q(3)\\
\boldsymbol{R}_q(2) & \cdots & \boldsymbol{R}_q(2) & \boldsymbol{U}_q(2,3) & \boldsymbol{I}_q & \boldsymbol{R}_q(3)\\
\underbrace{\boldsymbol{U}_q(2,3) \quad \cdots \quad \boldsymbol{U}_q(2,3)}_{(p-6)/2\text{个}} & & & \boldsymbol{R}_q(3) & \boldsymbol{R}_q(3) & \boldsymbol{I}_q
\end{pmatrix}.$$

用 $\boldsymbol{I}_q$ 表示 q 阶单位阵，用 $\boldsymbol{i}/\boldsymbol{j}$ 表示 $\boldsymbol{U}_q(i,j)$，$i,j\in\{1,2,3\}$，$\boldsymbol{k}$ 表示 $\boldsymbol{R}_q(k)$，$k\in\{1,2,3\}$. 矩阵$\boldsymbol{A}(p\times q)$的简易写法为

$$
\boldsymbol{A}(p\times q)=\begin{pmatrix}
\boldsymbol{I}_q & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1/2\\
1 & \boldsymbol{I}_q & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 & 1/2\\
1 & 1 & \boldsymbol{I}_q & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 2 & 1/2\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
1 & 1 & 1 & \cdots & \boldsymbol{I}_q & 1 & 1 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 1/2\\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \boldsymbol{I}_q & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 1/2\\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & \boldsymbol{I}_q & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2/3\\
\vdots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 2 & 2 & \cdots & \boldsymbol{I}_q & 2 & 2 & 2/3\\
1 & 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & \boldsymbol{I}_q & 2 & 3\\
1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2/3 & \boldsymbol{I}_q & 3\\
\multicolumn{6}{c}{\underbrace{1/2\quad 1/2\quad 1/2\quad \cdots\quad 1/2\quad 1/2}_{p/2个}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{2/3\quad \cdots\quad 2/3}_{(p-6)/2个}} & 3 & 3 & \boldsymbol{I}_q
\end{pmatrix}.
$$

$\boldsymbol{A}(p\times q)$是 $pq\times pq$ 阶方阵，将其分块，使得分块后的每块都是 q 阶方阵，且分块后的 $\boldsymbol{A}(p\times q)$次对角线上的 p 个块从右上角到左下角分别是 $\boldsymbol{U}_q(1,2)$，$\underbrace{\boldsymbol{R}_q(2),\cdots,\boldsymbol{R}_q(2)}_{(p-2)/2个}$，$\underbrace{\boldsymbol{R}_q(2),\cdots,\boldsymbol{R}_q(2)}_{(p-2)/2个}$，$\boldsymbol{U}_q(1,2)$. $\boldsymbol{A}(p\times q)$的主对角线上 p 个块都是 $\boldsymbol{I}_q$，分块后第 p 行（最后 1 行）的 p 个块依次是 $\underbrace{\boldsymbol{U}_q(1,2),\cdots,\boldsymbol{U}_q(1,2)}_{p/2个}$，$\underbrace{\boldsymbol{U}_q(2,3),\cdots,\boldsymbol{U}_q(2,3)}_{(p-6)/2个}$，$\boldsymbol{R}_q(3)$，$\boldsymbol{R}_q(3)$，$\boldsymbol{I}_q$. 分块后的 $\boldsymbol{A}(p\times q)$次对角线上方不在主对角线上的块均为 $\boldsymbol{R}_q(1)$，分块后的 $\boldsymbol{A}(p\times q)$中位于第$(p-1)$行、第$(p-2)$列相交处的块为 $\boldsymbol{U}_q(2,3)$，位于第$(p-2)$行、第$(p-1)$列相交处的块为 $\boldsymbol{U}_q(2,3)$，分块后 $\boldsymbol{A}(p\times q)$中其他位于次对角线下方，但不在主对角线上，且不在第 p 行和第 p 列，不是第$(p-1)$行、第$(p-2)$列相交处的块，也不是第$(p-2)$行、第$(p-1)$列相交处的块均为 $\boldsymbol{R}_q(2)$. 例如，$\boldsymbol{A}(12\times q)$即为如下方阵(简易写法)：

$$
\boldsymbol{A}(12\times q)=\begin{pmatrix}
\boldsymbol{I}_q & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1/2\\
1 & \boldsymbol{I}_q & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1/2\\
1 & 1 & \boldsymbol{I}_q & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1/2\\
1 & 1 & 1 & \boldsymbol{I}_q & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1/2\\
1 & 1 & 1 & 1 & \boldsymbol{I}_q & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1/2\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boldsymbol{I}_q & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1/2\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boldsymbol{I}_q & 2 & 2 & 2 & 2 & 2/3\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & \boldsymbol{I}_q & 2 & 2 & 2 & 2/3\\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \boldsymbol{I}_q & 2 & 2 & 2/3\\
1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \boldsymbol{I}_q & 2/3 & 3\\
1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2/3 & \boldsymbol{I}_q & 3\\
1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 2/3 & 2/3 & 2/3 & 3 & 3 & \boldsymbol{I}_q
\end{pmatrix}.
$$

$\boldsymbol{A}(p\times q)$对应 $K(p\times q)$的一个一般全染色 $f_{p\times q}$. 下证该全染色是点可区别的.

注意到当 $k\in\{1,2,\cdots,p\}$，$l\in\{1,2,\cdots,q\}$时，$\boldsymbol{A}(p\times q)$的第$((k-1)q+l)$列中除 0 外的各元素构成的多重集刚好是顶点 $x_l^{(k)}$ 在 $f_{p\times q}$下的多重色集合.

(i) 同一部中点的色集合各不相同.

当 $k\in\left\{1,2,\cdots,\dfrac{p}{2}\right\}$时，$X_k$ 中各顶点 $x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_q^{(k)}$ 的色集合(随下标的增大)含 1 的数目减少，故 X_k 中任意两个顶点可区别. 当 $k\in\left\{\dfrac{p+2}{2},\dfrac{p+4}{2},\cdots,p\right\}$时，$X_k$ 中各顶点 $x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_q^{(k)}$ 的色集合(随下标的增大)含 2 的数目减少，故 X_k 中任意两个顶点可区别.

(ii) 若两个顶点属于不同部，则这两个点的色集合不同.

$X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_{p/2}$中各顶点的色集合不含3，而$X_{(p+2)/2}\cup X_{(p+4)/2}\cup\cdots\cup X_p$中各顶点的色集合均含3，故$X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_{p/2}$中各顶点与$X_{(p+2)/2}\cup X_{(p+4)/2}\cup\cdots\cup X_p$中各顶点可区别.

当$1\leqslant k<l\leqslant\dfrac{p}{2}$时，$X_l$中各顶点的色集合含2的数目比$X_k$中各顶点的色集合含2的数目多，且差值至少为$q$($X_k$与$X_l$为相邻递增部时取得)，故$X_k$中各顶点与$X_l$中各顶点可区别. 当$\dfrac{p+2}{2}\leqslant k<l\leqslant p-1$时，$X_l$中各顶点的色集合含1的数目比$X_k$中各顶点的色集合含1的数目少，且差值至少为$q$($X_k$与$X_l$为相邻递增部时取得)，故$X_k$中各顶点与$X_l$中各顶点可区别. 当$k\in\left\{\dfrac{p+2}{2},\dfrac{p+4}{2},\cdots,p-1\right\}$时，$X_k$中各顶点的色集合包含最多$2q$个3，$X_k$中各顶点的色集合包含最少$(2q+1)$个3，故$X_k$中各顶点与$X_p$中各顶点可区别. 即若两个顶点属于不同部，则这两个点的色集合不同.

参 考 文 献

[1] HARARY F，PLANTHOLT M. The Point-Distinguishing Chromatic Index [C]//Graphs and Application，Proceedings of the First Colorado Symposium on Graph Theory. New York：Wiley Interscience，1985：147-162.

[2] LIU C J，ZHU E Q. General Vertex-Distinguishing Total Coloring of Graphs [J/OL]. Journal of Applied Mathematics，(2014-08-03)[2023-03-21]. http://doi.org/10.1155/2014/849748.

[3] 陈祥恩，张爽，李泽鹏. $K_{2,4,p}$的点可区别IE-全染色[J]. 电子与信息学报，2020，42(12)：2999-3004. (CHEN X E，ZHANG S，LI Z P. Vertex Distinguished IE-Total Coloring of $K_{2,4,p}$ [J]. Journal of Electronics & Information Technology，2020，42(12)：2999-3004.)

[4] 陈祥恩，王勇军. 完全二部图的点被多重集可区别的IE-全染色及一般全染色[J]. 吉林大学学报(理学版)，2022，60(4)：838-844. (CHEN X E，WANG Y J. IE-Total Coloring and General Total Coloring of Complete Bipartite Graph Which Are Vertex-Distinguished by Multiple Sets [J]. Journal of Jilin University (Science Edition)，2022，60(4)：838-844.)

[5] 王勇军，陈祥恩. 完全四部图K_{n_1,n_2,n_3,n_4}的点被多重集可区别的一般全染色($n_1\leqslant n_2=n_3<n_4$或$n_1=n_2=n_3=n_4$)[J]. 吉林大学学报(理学版)，2023，61(5)：1037-1041. (WANG Y J，CHEN X E. Vertex Distinguishing General Total Colorings of Complete 4-Partite Graphs K_{n_1,n_2,n_3,n_4} by Multisets ($n_1\leqslant n_2=n_3<n_4$ or $n_1=n_2=n_3=n_4$) [J]. Journal of Jilin University (Science Edition)，2023，61(5)：1037-1041.)

[6] 王勇军，陈祥恩. 完全三部图的点被多重集可区别的一般全染色[J/OL]. 山东大学学报(理学版)，(2023-09-20)[2023-12-24]. doi:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2022.667. (WANG Y J，CHEN X E. Vertex Distinguishing General Total Colorings of Complete 3-Partite Graphs by Multisets [J/OL]. Journal of Shandong University (Science Edition)，(2023-09-20)[2023-12-24]. doi:10.6040/j.issn.1671-9352.0.2022.667.)

[7] 陈祥恩. 某些顶点对被非多重色集合所区别的未必正常染色的综述[J]. 广州大学学报(自然科学版)，2019，18(4)：50-59. (CHEN X E. A Survey on Not Necessarily Proper Colorings under Which Certain Pairs of Vertices Are Distinguished by Nonmultiple Color Sets [J]. Journal of Guangzhou University (Natural Science Edition)，2019，18(4)：50-59.)

[8] 邵嘉裕. 组合数学[M]. 上海：同济大学出版社，1991：5-14. (SHAO J Y. Combinatorial Mathematics [M]. Shanghai：Tongji University Press，1991：5-14.)

(责任编辑：李　琦)