doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023413

一类树的邻接矩阵的 Moore-Penrose 广义逆

王玉浩[1], 刘奋进[1], 徐剑锋[2]
(1. 长安大学 理学院, 西安 710064;
2. 中国移动通信集团浙江有限公司 杭州分公司, 杭州 310005)

摘要: 根据矩阵结构性质, 利用分块矩阵技巧给出任意点数、任意长直径的毛毛虫树邻接矩阵的 Moore-Penrose 广义逆的具体形式, 为进一步研究毛毛虫树的代数性质提供理论支撑.

关键词: 树; 邻接矩阵; 分块矩阵; Moore-Penrose 广义逆
中图分类号: O157.5 **文献标志码**: A **文章编号**: 1671-5489(2024)04-0759-06

Moore-Penrose Generalized Inverse of Adjacency Matrix of a Class of Trees

WANG Yuhao[1], LIU Fenjin[1], XU Jianfeng[2]
(1. *School of Science, Chang'an University, Xi'an* 710064, *China*;
2. *China Mobile Communications Group Zhejiang Co., Ltd. Hangzhou Branch, Hangzhou* 310005, *China*)

Abstract: Based on the properties of the matrix structure, we used the block matrix techniques to give the specific form for the Moore-Penrose generalized inverse of the adjacency matrix of caterpillar trees with any number of vertices and any diameter length, which provided theoretical support for further study of the algebraic properties of caterpillar trees.

Keywords: tree; adjacency matrix; block matrix; Moore-Penrose generalized inverse

0 引 言

设图 G 是一个无向简单图, 其顶点集为 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, 图 G 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)=(a_{ij})_{n\times n}$, 其中: 当顶点 v_i 与 v_j 相邻时, $a_{ij}=1$; 反之 $a_{ij}=0$. 对任意的 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 如果存在 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n\times m}$, 满足下面 4 个条件:

$$\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{X},\quad (\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AX},\quad (\boldsymbol{XA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{XA},$$

则称 $\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 广义逆矩阵[1], 记为 $\boldsymbol{A}^{+}$. 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则易得 $\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{A}^{-1}$, 反之可使用满秩分解和奇异值分解去求解 $\boldsymbol{A}^{+}$. 但事实上, 使用上述两种方法得到的广义逆的表示形式可能非常复杂, 图的相关矩阵对研究图的性质至关重要, 因此给出图矩阵广义逆的简便计算公式具有重要意义.

收稿日期: 2023-10-07. **网络首发日期**: 2024-07-02.

第一作者简介: 王玉浩(1999—), 男, 汉族, 硕士研究生, 从事图谱与代数图论的研究, E-mail: wyh_991103@163.com. **通信作者简介**: 刘奋进(1982—), 男, 汉族, 博士, 副教授, 从事图论及其应用的研究, E-mail: fenjinliu@163.com.

基金项目: 陕西省自然科学基金(批准号: 2021JM-149; 2021JQ-219; 2022JM-019)和中央高校基本科研业务费专项基金(批准号: 300102123102).

网络首发地址: https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20240701.1120.001.

目前,关于图矩阵广义逆的研究受到广泛关注:文献[2-4]给出了距离正则图和完全多部图关联矩阵的 Moore-Penrose 广义逆,并得到了偶数个顶点的轮图的距离矩阵的求逆公式;Hessert 等[5-6]给出了图的无符号 Laplace 矩阵和边 Laplace 矩阵的 Moore-Penrose 广义逆,并给出了单圈图关联矩阵的逆. 但关于图的邻接矩阵的广义逆的研究结果目前报道较少,本文证明对于一个对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,如果它的某些行(列)相同,则 $\boldsymbol{A}^{+}$ 的那些行(列)也相同,并进一步利用分块矩阵给出任意点数、任意长直径毛毛虫树的邻接矩阵的 Moore-Penrose 广义逆的具体形式. 毛毛虫树在网络重构和基尼指数方面应用广泛[7-8],矩阵的广义逆在概率统计、数学规划、数值计算以及网络理论等领域有重要应用[9]. 因此,给出毛毛虫树邻接矩阵的 Moore-Penrose 广义逆结果的具体形式有一定的理论意义.

1 预备知识

引理 1[9] 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$,且有满秩分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}$,其中 $\boldsymbol{F}\in\mathbb{R}^{m\times r}$,$\boldsymbol{G}\in\mathbb{R}^{r\times n}$,$r=r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{F})=r(\boldsymbol{G})$. 则有 $\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$.

引理 2[1] 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$,则有:

1) 若 $\boldsymbol{A}$ 行满秩,则 $\boldsymbol{A}$ 有右逆,且 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{R}}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$;

2) 若 $\boldsymbol{A}$ 列满秩,则 $\boldsymbol{A}$ 有左逆,且 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

易证当一个矩阵行(列)满秩时,它的右(左)逆即为它的 Moore-Penrose 广义逆.

引理 3[10] 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$,$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=r$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在一个满秩分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}$,其中 $\boldsymbol{F}\in\mathbb{R}^{m\times r}$,$\boldsymbol{G}\in\mathbb{R}^{r\times n}$,矩阵 $\boldsymbol{G}$ 为对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换后得到的行最简形矩阵的前 r 行,令 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 表示 $\boldsymbol{G}$ 每一行第一个 1 所在的列数,矩阵 $\boldsymbol{F}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 个列向量所构成的矩阵.

下面用 $\boldsymbol{j}_k$ 表示长度为 k 的全 1 列向量,$\boldsymbol{J}_{m\times n}$ 表示阶数为 $m\times n$ 的全 1 矩阵,$\boldsymbol{I}_k$ 表示阶数为 k 的单位矩阵,$\boldsymbol{O}$ 表示全零矩阵.

2 主要结果

命题 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是实数域上的 n 阶对称矩阵,如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某些行(列)完全相同,即 $a_{it}=a_{jt}=\cdots=a_{mt}$,其中 $i,j,\cdots,m\in\{1,2,\cdots,n\}$,$t=1,2,\cdots,n$,则 $\boldsymbol{A}^{+}$ 的那些行(列)对应也完全相同.

证明:由引理 3 知,实数域上的 n 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在一个满秩分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}$,其中矩阵 $\boldsymbol{G}$ 为对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换后得到的行最简形矩阵的前 r 行. 假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 j 行相等,对任意的 $1\leqslant k\leqslant n$,由于 $\boldsymbol{A}_{ik}=\boldsymbol{A}_{jk}$ 且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,则有 $\boldsymbol{A}_{ki}=\boldsymbol{A}_{kj}$. 又因 $\boldsymbol{G}$ 为对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换后得到,故有 $(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}})_{ik}=(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}})_{jk}$. 由引理 1 知,对任意的 $1\leqslant t\leqslant n$,$\boldsymbol{A}^{+}$ 的第 i 行和第 j 行元素为

$$(\boldsymbol{A}^{+})_{it}=\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}})_{ik}((\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})_{kt}=\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}})_{jk}((\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})_{kt}=(\boldsymbol{A}^{+})_{jt}.$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{+}$ 的第 i 行和第 j 行元素对应相等. 证毕.

命题 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-penrose 广义逆矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{+}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{+}\\ \boldsymbol{B}^{+} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{+}$,$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{+}$.

证明:对任意的矩阵 $\boldsymbol{B}$,有 $(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{+}=(\boldsymbol{B}^{+})^{\mathrm{T}}$. 其余证明可由 Moore-penrose 广义逆的定义直接验证.

定理 1 设 G 是一个直径为 $2k+1$ 的毛毛虫树,主干是一条具有 $2k$ 个顶点的路,每个顶点悬挂的叶子数为 $m_1,m_2,\cdots,m_{2k}$,且有 $m_i\geqslant 1(i=1,2,\cdots,2k)$,则其邻接矩阵的 Moore-Penrose 广义逆为 $\boldsymbol{A}^{+}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{O}_{k\times k}$,

$$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} \frac{1}{m_1}\boldsymbol{j}_{m_1}^{\mathrm{T}} & & & \\ & \frac{1}{m_3}\boldsymbol{j}_{m_3}^{\mathrm{T}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{m_{2k-1}}\boldsymbol{j}_{m_{2k-1}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{m_2}\boldsymbol{j}_{m_2} & & & \\ & \frac{1}{m_4}\boldsymbol{j}_{m_4} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{m_{2k}}\boldsymbol{j}_{m_{2k}} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{m_2m_1}\boldsymbol{J}_{m_2\times m_1} & -\frac{1}{m_2m_3}\boldsymbol{J}_{m_2\times m_3} & & \\ & -\frac{1}{m_4m_3}\boldsymbol{J}_{m_4\times m_3} & \ddots & \\ & & \ddots & -\frac{1}{m_{2k-2}m_{2k-1}}\boldsymbol{J}_{m_{2k-2}\times m_{2k-1}} \\ & & & -\frac{1}{m_{2k}m_{2k-1}}\boldsymbol{J}_{m_{2k}\times m_{2k-1}} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

证明：根据二部划分对图 G 的顶点进行标号，其邻接矩阵可分块表示为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，其中，

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_{k\times k} & \boldsymbol{E}_{k\times(m_2+m_4+\cdots+m_{2k})} \\ \boldsymbol{F}_{(m_1+m_3+\cdots+m_{2k-1})\times k} & \boldsymbol{O}_{(m_1+m_3+\cdots+m_{2k-1})\times(m_2+m_4+\cdots+m_{2k})} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{j}_{m_2}^{\mathrm{T}} & & & \\ & \boldsymbol{j}_{m_4}^{\mathrm{T}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{j}_{m_{2k}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{j}_{m_1} & & & \\ & \boldsymbol{j}_{m_3} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{j}_{m_{2k-1}} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

由命题 2，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 广义逆矩阵为式(1)，其中 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{+}$. 由于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 既不行满秩也不列满秩，因此令 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$，则有

$$\boldsymbol{BB}^{+}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{DMD}+\boldsymbol{EPD}+\boldsymbol{DNF}+\boldsymbol{EQF} & \boldsymbol{DME}+\boldsymbol{EPE} \\ \boldsymbol{FMD}+\boldsymbol{FNF} & \boldsymbol{FME} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

于是

$$\boldsymbol{DMD}+\boldsymbol{EPD}+\boldsymbol{DNF}+\boldsymbol{EQF}=\boldsymbol{D}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{DME}+\boldsymbol{EPE}=\boldsymbol{E}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{FMD}+\boldsymbol{FNF}=\boldsymbol{F}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{FME}=\boldsymbol{O}. \tag{10}$$

对于式(10)，由于矩阵 $\boldsymbol{F}$ 列满秩有左逆，矩阵 $\boldsymbol{E}$ 行满秩有右逆，因此在式(10)两端左乘 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}}^{-1}$，右乘 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}^{-1}$，得 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{O}$. 将 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{O}$ 代入式(9)得 $\boldsymbol{FNF}=\boldsymbol{F}$，对 $\boldsymbol{FNF}=\boldsymbol{F}$ 两端同时左乘 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}}^{-1}$ 得 $\boldsymbol{NF}=\boldsymbol{I}_k$，由于分块矩阵 $\boldsymbol{N}$ 所对应的某些列在原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中完全相同，因此由命题 1 知，$\boldsymbol{N}$ 中那些列的元素也相同，令

$$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} n_{11}\boldsymbol{j}_{m_1}^{\mathrm{T}} & n_{12}\boldsymbol{j}_{m_3}^{\mathrm{T}} & \cdots & n_{1k}\boldsymbol{j}_{m_{2k-1}}^{\mathrm{T}} \\ n_{21}\boldsymbol{j}_{m_1}^{\mathrm{T}} & n_{22}\boldsymbol{j}_{m_3}^{\mathrm{T}} & \cdots & n_{2k}\boldsymbol{j}_{m_{2k-1}}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{k1}\boldsymbol{j}_{m_1}^{\mathrm{T}} & n_{k2}\boldsymbol{j}_{m_3}^{\mathrm{T}} & \cdots & n_{kk}\boldsymbol{j}_{m_{2k-1}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{NF}=\begin{pmatrix} m_1n_{11} & m_3n_{12} & \cdots & m_{2k-1}n_{1k} \\ m_1n_{21} & m_3n_{22} & \cdots & m_{2k-1}n_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1n_{k1} & m_3n_{k2} & \cdots & m_{2k-1}n_{kk} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{I}_k,$$

解得 $n_{ii}=\dfrac{1}{m_{2i-1}}(i=1,2,\cdots,k)$，$n_{ij}=0(i\neq j)$，即 $\boldsymbol{N}$ 为式(2)．将 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{O}$ 代入式(8)得 $\boldsymbol{EPE}=\boldsymbol{E}$，对 $\boldsymbol{EPE}=\boldsymbol{E}$ 两端同时右乘 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}^{-1}$ 得 $\boldsymbol{EP}=\boldsymbol{I}_k$，同理可得 $\boldsymbol{P}$ 为式(3)．

将 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{P}$ 代入式(7)得 $\boldsymbol{EQF}=-\boldsymbol{D}$，由于分块矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 所对应的某些行和列在原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中完全对应相同，因此由命题1知 $\boldsymbol{Q}$ 中那些行和列的元素也对应相同，令

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} q_{11}\boldsymbol{J}_{m_2\times m_1} & q_{12}\boldsymbol{J}_{m_2\times m_3} & \cdots & q_{1k}\boldsymbol{J}_{m_2\times m_{2k-1}} \\ q_{21}\boldsymbol{J}_{m_4\times m_1} & q_{22}\boldsymbol{J}_{m_4\times m_3} & \cdots & q_{2k}\boldsymbol{J}_{m_4\times m_{2k-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{k1}\boldsymbol{J}_{m_{2k}\times m_1} & q_{k2}\boldsymbol{J}_{m_{2k}\times m_3} & \cdots & q_{kk}\boldsymbol{J}_{m_{2k}\times m_{2k-1}} \end{pmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{EQF}=\begin{pmatrix} m_2m_1q_{11} & m_2m_3q_{12} & \cdots & m_2m_{2k-1}q_{1k} \\ m_4m_1q_{21} & m_4m_3q_{22} & \cdots & m_4m_{2k-1}q_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{2k}m_1q_{k1} & m_{2k}m_3q_{k2} & \cdots & m_{2k}m_{2k-1}q_{kk} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}=-\boldsymbol{D},$$

解得 $q_{ii}=-\dfrac{1}{m_{2i}m_{2i-1}}(i=1,2,\cdots,k)$，$q_{i,i+1}=-\dfrac{1}{m_{2i}m_{2i+1}}(i=1,2,\cdots,k-1)$，其余均为0，即 $\boldsymbol{Q}$ 为式(4)．易证 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{+}$ 也同时满足 $\boldsymbol{B}$ 的Moore-Penrose广义逆的其他条件．证毕．

当毛毛虫树 G 的直径为 $2k+2$ 时，结合定理1的证明，仅需考虑根据二部划分对 G 的顶点进行标号后邻接矩阵的分块表示．此时，有 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，其中，

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_{k\times(k+1)} & \boldsymbol{E}_{k\times(m_2+m_4+\cdots+m_{2k})} \\ \boldsymbol{F}_{(m_1+m_3+\cdots+m_{2k+1})\times(k+1)} & \boldsymbol{O}_{(m_1+m_3+\cdots+m_{2k+1})\times(m_2+m_4+\cdots+m_{2k})} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{j}_{m_2}^{\mathrm{T}} & & & \\ & \boldsymbol{j}_{m_4}^{\mathrm{T}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{j}_{m_{2k}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{j}_{m_1} & & & \\ & \boldsymbol{j}_{m_3} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{j}_{m_{2k+1}} \end{pmatrix}.$$

类似地，可以证明：

定理2 设 G 是一个直径为 $2k+2$ 的毛毛虫树，主干是一条具有 $(2k+1)$ 个顶点的路，每个顶点悬挂的叶子数为 $m_1,m_2,\cdots,m_{2k+1}$，且有 $m_i\geqslant 1(i=1,2,\cdots,2k+1)$，则其邻接矩阵的Moore-Penrose广义逆为 $\boldsymbol{A}^{+}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，其中，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{O}_{(k+1)\times k}$，$\boldsymbol{P}$ 如式(3)，

$$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{m_1}\boldsymbol{j}_{m_1}^{\mathrm{T}} & & & \\ & \dfrac{1}{m_3}\boldsymbol{j}_{m_3}^{\mathrm{T}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dfrac{1}{m_{2k+1}}\boldsymbol{j}_{m_{2k+1}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{m_2m_1}J_{m_2\times m_1} & -\frac{1}{m_2m_3}J_{m_2\times m_3} & & & & \\ & -\frac{1}{m_4m_3}J_{m_4\times m_3} & -\frac{1}{m_4m_5}J_{m_4\times m_5} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & -\frac{1}{m_{2k}m_{2k-1}}J_{m_{2k}\times m_{2k-1}} & -\frac{1}{m_{2k}m_{2k+1}}J_{m_{2k}\times m_{2k+1}} \end{pmatrix}.$$

例 1　设图 G_1 是一个直径为 7 的毛毛虫树，主干是一条具有 6 个顶点的路，每个顶点悬挂的叶子数为 2,3,4,4,3,3，如图 1 所示.

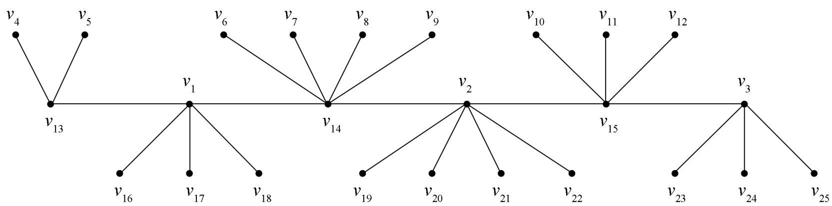

图 1　直径为 7 的毛毛虫树 G_1

Fig. 1　Caterpillar tree G_1 with diameter of 7

根据二部划分对其顶点标号后，其邻接矩阵可分块表示为 $A=\begin{pmatrix} O & B \\ B^{\mathrm{T}} & O\end{pmatrix}$，其中，

$$B=\begin{pmatrix} D_{3\times 3} & E_{3\times 10} \\ F_{9\times 3} & O_{9\times 10}\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} j_3^{\mathrm{T}} & O & O \\ O & j_4^{\mathrm{T}} & O \\ O & O & j_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix} j_2 & O & O \\ O & j_4 & O \\ O & O & j_3\end{pmatrix}.$$

由定理 1，其邻接矩阵的 Moore-Penrose 广义逆为 $A^{+}=\begin{pmatrix} O & C \\ C^{\mathrm{T}} & O\end{pmatrix}$，其中，$C^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q\end{pmatrix}$，$M=O_{3\times 3}$，

$$N=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}j_2^{\mathrm{T}} & O & O \\ O & \frac{1}{4}j_4^{\mathrm{T}} & O \\ O & O & \frac{1}{3}j_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}j_3 & O & O \\ O & \frac{1}{4}j_4 & O \\ O & O & \frac{1}{3}j_3\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{6}J_{3\times 2} & -\frac{1}{12}J_{3\times 4} & O \\ O & -\frac{1}{16}J_{4\times 4} & -\frac{1}{12}J_{4\times 3} \\ O & O & -\frac{1}{9}J_{3\times 3}\end{pmatrix}.$$

例 2　设图 G_2 是一个直径为 8 的毛毛虫树，主干是一条具有 7 个顶点的路，每个顶点悬挂的叶子数为 2,2,3,3,3,4,4，如图 2 所示.

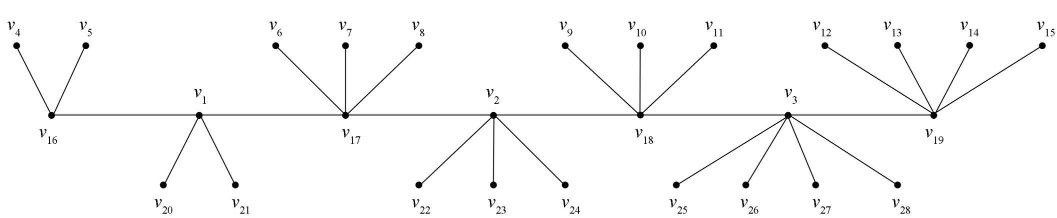

图 2　直径为 8 的毛毛虫树 G_2

Fig. 2　Caterpillar tree G_2 with diameter of 8

根据二部划分对其顶点标号后，其邻接矩阵可分块表示为 $A=\begin{pmatrix} O & B \\ B^{\mathrm{T}} & O\end{pmatrix}$，其中，

$$B=\begin{pmatrix} D_{3\times 4} & E_{3\times 9} \\ F_{12\times 4} & O_{12\times 9}\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{j}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{j}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{j}_4^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{j}_2 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{j}_3 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{j}_3 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{j}_4\end{pmatrix}.$$

由定理2知，其邻接矩阵的Moore-Penrose广义逆为$\boldsymbol{A}^{+}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，其中$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{O}_{4\times 3}$，

$$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\boldsymbol{j}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \frac{1}{3}\boldsymbol{j}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \frac{1}{3}\boldsymbol{j}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \frac{1}{4}\boldsymbol{j}_4^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\boldsymbol{j}_2 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \frac{1}{3}\boldsymbol{j}_3 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \frac{1}{4}\boldsymbol{j}_4\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\boldsymbol{J}_{2\times 2} & -\frac{1}{6}\boldsymbol{J}_{2\times 3} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\frac{1}{9}\boldsymbol{J}_{3\times 3} & -\frac{1}{9}\boldsymbol{J}_{3\times 3} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\frac{1}{12}\boldsymbol{J}_{4\times 3} & -\frac{1}{16}\boldsymbol{J}_{4\times 4}\end{pmatrix}.$$

参 考 文 献

[1] BEN-ISRAEL A，GREVILLE T N E. Generalized Inverses：Theory and Applications [M]. 2nd ed. New York：Springer，2003：40-51.

[2] AZIMI A，BAPAT R B. Moore-Penrose Inverse of the Incidence Matrix of a Distance Regular Graph [J]. Linear Algebra and Its Applications，2018，551：92-103.

[3] AZIMI A，BAPAT R B. The Moore-Penrose Inverse of the Incidence Matrix of Complete Multipartite and Bi-block Graphs [J]. Discrete Mathematics，2019，342(8)：2393-2401.

[4] BALAJI R，BAPAT R B，GOEL S. An Inverse Formula for the Distance Matrix of a Wheel Graph with an Even Number of Vertices [J]. Linear Algebra and Its Applications，2021，610：274-292.

[5] HESSERT R，MALLIK S. Moore-Penrose Inverses of the Signless Laplacian and Edge-Laplacian of Graphs [J]. Discrete Mathematics，2021，344(8)：112451-1-112451-15.

[6] HESSERT R，MALLIK S. The Inverse of the Incidence Matrix of a Unicyclic Graph [J]. Linear and Multilinear Algebra，2023，71(4)：513-527.

[7] LINZ S，SEMPLE C. Caterpillars on Three and Four Leaves Are Sufficient to Reconstruct Binary Normal Networks [J]. Journal of Mathematical Biology，2020，81(4/5)：961-980.

[8] ZHANG P P，DEY D K. The Degree Profile and Gini Index of Random Caterpillar Trees [J]. Probability in the Engineering and Informational Sciences，2019，33(4)：511-527.

[9] 王松桂，杨振海. 广义逆矩阵及其应用 [M]. 北京：北京工业大学出版社，1996：82-123.（WANG S G，YANG Z H. Generalized Inverse Matrix and Its Application [M]. Beijing：Beijing Polytechnic University Press，1996：82-123.）

[10] 程云鹏，张凯院，徐仲. 矩阵论 [M]. 西安：西北工业大学出版社，2006：220-225.（CHENG Y P，ZHANG K Y，XU Z. Matrix Theory [M]. Xi'an：Northwestern Polytechnical University Press，2006：220-225.）

（责任编辑：赵立芹）