

多维非均质不可压缩热传导方程的适定性

王晓杰, 辛泽惠, 徐夫义

(山东理工大学 数学与统计学院, 山东 淄博 255049)

摘要: 利用调和分析方法和 Lagrange 方法研究多维非均质不可压缩热传导方程的 Cauchy 问题, 在临界 Besov 空间中证明该系统在小初值条件下强解的整体适定性.

关键词: 非均质不可压缩热传导方程; 临界 Besov 空间; Lagrange 坐标; 适定性

中图分类号: O175.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)03-0565-08

Well-Posedness of Multi-dimensional Inhomogeneous Incompressible Heat-Conducting Equation

WANG Xiaojie, XIN Zehui, XU Fuyi

(School of Mathematics and Statistics, Shandong University of Technology,
Zibo 255049, Shandong Province, China)

Abstract: By using the harmonic analysis method and Lagrangian method, we studied the Cauchy problem for the multi-dimensional inhomogeneous incompressible heat-conducting equations and proved the global well-posedness of strong solutions for the system under small initial data conditions in the critical Besov spaces.

Keywords: inhomogeneous incompressible heat-conducting equation; critical Besov space; Lagrangian coordinate; well-posedness

1 引言与主要结果

考虑如下多维非均质不可压缩热传导方程 Cauchy 问题的适定性:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \mu \Delta u + \nabla P = 0, \\ C_v(\partial_t(\rho \theta) + \operatorname{div}(\rho u \theta)) - \operatorname{div}(k \nabla \theta) = 2\mu |du|^2, \\ \operatorname{div}(u) = 0, \\ (\rho, u, \theta)|_{t=0} = (\rho_0, u_0, \theta_0), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\rho = \rho(t, x)$, $u = u(t, x)$, $\theta = \theta(t, x)$ 和 $P(t, x)$ 分别表示流体的密度、速度、温度和压力, (ρ_0, u_0, θ_0) 为给定的初始条件; 系数 μ, C_v 和 k 为给定的正常数, 分别表示黏度、定体积比热和热导率.

近年来, 关于系统(1)的研究备受关注. 若不考虑温度场, 则系统(1)可简化为如下多维不可压缩非均质 Navier-Stokes 方程:

收稿日期: 2023-10-16.

第一作者简介: 王晓杰(2000—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事偏微分方程的研究, E-mail: wxj15615637750@163.com. **通信作者简介:** 徐夫义(1980—), 男, 汉族, 博士, 教授, 从事偏微分方程的研究, E-mail: zbxufuyi@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12326430)和山东省自然科学基金(批准号: ZR2021MA017).

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \mu \Delta u + \nabla P = 0, \\ \operatorname{div}(u) = 0, \\ (\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0). \end{cases} \quad (2)$$

系统(2)具有重要的尺度伸缩 (scaling) 不变性: 对于 $\lambda > 0$, 如果 (ρ, u) 是系统(2)的解, 其初值为 (ρ_0, u_0) , 则 $(\rho(\lambda^2 t, \lambda x), \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x))$ 也是系统(2)的解, 其初值为 $(\rho_0(\lambda x), u_0(\lambda x))$.

系统(2)适定性的研究是流体力学方程研究领域的重要问题, 目前已取得许多成果. Lions^[1]和 Simon^[2]分别建立了系统(2)有限能量整体弱解的存在性, 但弱解的唯一性或光滑性仍是一个公开问题(包括在二维情形下); Ladyzhenskaya 等^[3]证明了系统(2)在具有正初始密度场时强解的适定性, 即证明了大初值条件下其强解的局部存在唯一, 并给出了二维情形时大初值条件下其强解的整体存在性, 以及三维情形时小初值条件下其强解的整体适定性; Danchin^[4]在平衡态附近小扰动的条件下, 建立了系统(2)在全空间 \mathbb{R}^n 中的适定性. Abidi^[5]在临界 Besov 空间中得到了如下结果: 假设初值 (ρ_0, u_0) 满足 $(\rho_0 - 1) \in \dot{B}_{p,1}^{n/p}(\mathbb{R}^n)$, $u_0 \in \dot{B}_{p,1}^{n/p-1}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{div}(u_0) = 0$, 若存在一个足够小的正常数 c , 使得 $\|\rho_0 - 1\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p}} + \|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p-1}} \leq c$, 则对任意的 $p \in [1, 2n)$, 存在全局解 $(\rho, u, \nabla P)$, 满足

$$\begin{aligned} \rho - 1 &\in C_b([0, \infty); \dot{B}_{p,1}^{n/p}(\mathbb{R}^n)), \quad u \in C_b([0, \infty); \dot{B}_{p,1}^{n/p-1}(\mathbb{R}^n)), \\ \partial_t u, \nabla^2 u, \nabla P &\in L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{n/p-1}(\mathbb{R}^n)). \end{aligned}$$

特别地, 当 $p \leq n$ 时可得解的唯一性; Danchin 等^[6]利用 Lagrange 方法和 Banach 不动点定理, 在 $p \in [1, 2n)$ 条件下证明了系统(2)在临界 Besov 空间中的适定性, 该结果可应用到具有物理意义的混合流体问题中, 且容许密度场有小的跳跃穿过流体的接触面. 文献[4, 7]给出了在非负初始密度场条件下(即含有真空情形)系统(2)的适定性结果.

若系统(2)考虑含有温度场的方程, 则流体模型会变成结构更复杂的系统(1). 当初始密度非负时, Zhong^[8]在初值满足一定小和相容性条件下证明了系统(1)强解的全局适定性; Zhong^[9]进一步改进了文献[8]的结果, 并给出了系统(1)强解的大时间行为; 在非真空状态下, Zhang 等^[10]证明了当初值满足

$$(u_0, \theta_0) \in W^{2,2}(\mathbb{R}^3), \quad \rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \rho_0 \in [\alpha, \beta]$$

时系统(1)的局部适定性, 其中 α, β 是正常数. 该结果对速度场和温度场的正则指标要求较高. 显然, 系统(1)在相应的临界正则性空间中的适定性仍未知. 为获得初值所在空间的临界正则指标, 本文引入尺度伸缩分析, 即系统(1)具有如下尺度伸缩不变性: 若 $\rho(t, x), u(t, x), \theta(t, x)$ 是系统(1)的解, 则对于 $\lambda > 0$,

$$\rho_\lambda = \rho(\lambda^2 t, \lambda x), \quad u_\lambda = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \theta_\lambda = \lambda^2 \theta(\lambda^2 t, \lambda x)$$

也是系统(1)的解. 在该尺度伸缩不变的空间下, 初值 u_0 和 θ_0 所对应的空间分别为 $u_0 \in \dot{B}_{p,1}^{n/p-1}(\mathbb{R}^n)$, $\theta_0 \in \dot{B}_{p,1}^{n/p-2}(\mathbb{R}^n)$. 此时, 初始密度场所对应的空间为 $\rho_0 \in \dot{B}_{p,1}^{n/p}$. 为将所讨论问题的结果应用到具有物理意义的混合流体问题中, 且容许密度场有小的跳跃穿过流体的接触面, 本文把初始密度场所在的空间取为乘子空间 $\rho_0 \in M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1}) \cap M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-2})$, 其中引入 $M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-2})$ 是为处理温度场.

本文主要结果如下.

定理 1 设 $p \in [1, 2n)$, 假设初始密度 $\rho_0 \in M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1}) \cap M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-2})$, 初始速度 $u_0 \in \dot{B}_{p,1}^{n/p-1}(\mathbb{R}^n)$, 初始温度 $\theta_0 \in \dot{B}_{p,1}^{n/p-2}(\mathbb{R}^n)$. 如果存在任意小的正常数 c (仅依赖 n 和 p), 使得

$$\|\rho_0 - 1\|_{M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1})} + \|C_0 \rho_0 - 1\|_{M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-2})} + \mu^{-1} \|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p-1}} + k^{-1} \|\theta_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p-2}} \leq c,$$

则系统(1)在 E_p 中存在唯一的整体解 $(\bar{u}, \nabla \bar{P}, \bar{\theta})$, 其中 $(\bar{u}, \nabla \bar{P}, \bar{\theta})$ 是 $(u, \nabla P, \theta)$ 在 Lagrange 坐标下的表示形式, 函数空间 E_p 为

$$\begin{aligned} E_p := \{ &(\bar{u}, \nabla \bar{P}, \bar{\theta}): \bar{u} \in C_b(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{n/p-1}), \bar{\theta} \in C_b(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{n/p-2}), \\ &\partial_t \bar{u}, \nabla^2 \bar{u}, \nabla \bar{P} \in L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{n/p-1}), \partial_t \bar{\theta}, \nabla^2 \bar{\theta} \in L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{n/p-2}) \}. \end{aligned} \quad (3)$$

注 1 与文献[10]相比, 本文讨论了一般 L^p 框架下临界正则指标意义下解的存在性, 且结果包含

了二维情形. 虽然本文将初始密度场所在空间取为乘子空间, 但它仍有一定的正则性.

定理 2 在定理 1 的假设条件下, 系统(1)有唯一的整体解 $(\rho, u, \nabla P, \theta)$, 且满足

$$\rho \in L^\infty(\mathbb{R}_+; M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1}) \cap M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-2})), \quad (u, \theta, \nabla P) \in E_p.$$

2 预备知识

定义 1^[11] 设 $S'(\mathbb{R}^n)$ 是 \mathbb{R}^n 中的分布函数空间, 当 $1 \leq p \leq \infty, s \leq n/p$ 时, 用 $\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)$ 表示分布函数 u 的空间, 使得在 $S'(\mathbb{R}^n)$ 中, $u = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j u$, 其中 $\dot{\Delta}_j u = \varphi_j * u$, 且满足

$$\|u\|_{\dot{B}_{p,1}^s} := \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \|\dot{\Delta}_j u\|_{L^p} < \infty.$$

定义 2^[6] 设乘子空间 $M(\dot{B}_{p,1}^s)$ 是对任意 $h \in \dot{B}_{p,1}^s$, 满足 $hf \in \dot{B}_{p,1}^s$ 的所有分布 $f \in S'$ 的集合, 且满足 $\|f\|_{M(\dot{B}_{p,1}^s)} := \sup_{\|h\|_{\dot{B}_{p,1}^s}=1} \|hf\|_{\dot{B}_{p,1}^s} < \infty$.

引理 1^[6] 设 $p \in [1, \infty], s \in \mathbb{R}, u_0 \in \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)$ 且 $f_1 \in L^1(0, T; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n))$. 令 $g: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 使得

$$\nabla g \in L^1(0, T; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)), \quad \partial_t g = \operatorname{div} R, \quad R \in L^1(0, T; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)),$$

并满足 \mathbb{R}^n 上的相容性条件 $g|_{t=0} = \operatorname{div} u_0$, 则

$$\begin{cases} \partial_t u - \mu \Delta u + \nabla P = f_1, \\ \operatorname{div} u = g, \\ u|_{t=t_0} = u_0, \end{cases}$$

且存在解 $(u, \nabla P)$, 使得

$$u \in C(0, T; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)), \quad \partial_t u, \nabla^2 u, \nabla P \in L^1(0, T; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)),$$

并满足如下估计:

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n))} + \|\partial_t u, \nabla^2 u, \nabla P\|_{L^1(0, T; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n))} \leq C(\|f_1, \mu \nabla g, R\|_{L^1(0, T; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n))} + \|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)}),$$

其中 C 是一个不依赖于 μ 和 T 的常数.

下面给出热方程在 Besov 空间中标准的先验估计.

引理 2^[12] 设 $p \in [1, \infty], s \in \mathbb{R}$, 满足 $-\min\{n/p, n/p'\}, -1 < s \leq n/p - 2$. 令 $\theta_0 \in \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n)$ 且 $f_2 \in L^1(0, T; \dot{B}_{p,1}^s(\mathbb{R}^n))$. 则对所有的 t , 系统 $\partial_t \theta - k \Delta \theta = f_2$ 的解满足

$$\|\theta\|_{L^\infty(0, T; \dot{B}_{p,1}^s)} + \|k \nabla^2 \theta, \partial_t \theta\|_{L^1(0, T; \dot{B}_{p,1}^s)} \leq C(\|\theta_0\|_{\dot{B}_{p,1}^s} + \|f_2\|_{L^\infty(0, T; \dot{B}_{p,1}^s)}).$$

引理 3^[13] 令 $v \geq 0$ 且 $-\min\{n/p, n/p'\} < \sigma \leq n/p - v$, 则以下估计成立:

$$\|uv\|_{\dot{B}_{p,1}^\sigma} \leq C \|u\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p-v}} \|v\|_{\dot{B}_{p,1}^{\sigma+v}}.$$

引理 4^[9] 令 $p \in [1, \infty)$, 若 \bar{v} 满足 $\int_0^\infty \|D\bar{v}\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p}} dt \leq c$, 则下列不等式成立:

$$\|\mathbf{I}_n - \operatorname{adj}(DX(t))\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p}} \leq C \|D\bar{v}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})}, \tag{4}$$

$$\|\mathbf{I}_n - \mathbf{A}(t)\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p}} \leq C \|D\bar{v}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})}, \tag{5}$$

$$\|\partial_t(\operatorname{adj}(DX))(t)\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p}} \leq C \|D\bar{v}\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p}}, \tag{6}$$

$$\|\partial_t(\operatorname{adj}(DX))(t)\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p-1}} \leq C \|D\bar{v}\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p-1}}, \quad p < 2n, \tag{7}$$

$$\|\operatorname{adj}(DX(t))^T \mathbf{A}(t) - \mathbf{I}_n\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p}} \leq C \|D\bar{v}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})}. \tag{8}$$

引理 5^[6] 令 \bar{v}_1 和 \bar{v}_2 均满足 $\int_0^\infty \|D\bar{v}\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p}} dt \leq c$, 设 $\delta v = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$, 则对所有的 $p \in [1, \infty)$, 均满足如下不等式:

$$\|\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1\|_{L_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{n/p})} \leq C \|D\delta v\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})}, \tag{9}$$

$$\|\operatorname{adj}(DX_2) - \operatorname{adj}(DX_1)\|_{L_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{n/p})} \leq C \|D\delta v\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})}, \tag{10}$$

$$\|\partial_t(\operatorname{adj}(DX_2) - \operatorname{adj}(DX_1))\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})} \leq C \|D\delta v\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})}, \tag{11}$$

$$\| \partial_t(\text{adj}(DX_2) - \text{adj}(DX_1)) \|_{L^2_t(B_{p,1}^{n/p-1})} \leq C \| D\delta v \|_{L^1_t(B_{p,1}^{n/p-1})}, \quad p < 2n. \tag{12}$$

3 系统(1)在 Lagrange 坐标下的形式

由于系统(1)中密度场方程的双曲性质易产生导数损失, 因此一般在 Euler 坐标下很难用 Banach 不动点定理获得该系统的适定性. 为解决该问题, 需消掉密度场方程. 为此, 本文引入 Lagrange 坐标. 设系统(1)中速度场 u 对应的流函数 X_u 满足

$$X_u(t, y) = y + \int_0^t u(\tau, X_u(\tau, y)) d\tau.$$

利用速度场的不可压条件, 由 Liouville 定理可知 $|DX_u|$ 恒为 1. 显然, 在 Lagrange 坐标系下, 密度与时间无关. 设 $(\rho, u, \nabla P, \theta)$ 是系统(1)的解, 记

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(t, y) &:= \rho(t, X_u(t, y)), & \bar{P}(t, y) &:= P(t, X_u(t, y)), \\ \bar{u}(t, y) &:= u(t, X_u(t, y)), & \bar{\theta}(t, y) &:= \theta(t, X_u(t, y)) \end{aligned}$$

为 (ρ, u, P, θ) 在 Lagrange 坐标系下的形式, 则系统(1)可变为

$$\begin{cases} \rho_0 \bar{u}_t(t, y) - \text{div}(\mathbf{A}_u \mathbf{A}_u^T \nabla_y \bar{u}(t, y)) + \mathbf{A}_u^T \nabla_y \bar{P} = 0, \\ C_v \rho_0 \bar{\theta}_t(t, y) - k \text{div}(\mathbf{A}_u \mathbf{A}_u^T \nabla_y \bar{\theta}(t, y)) = \mu \left| \frac{\mathbf{A}_u^T \nabla_y \bar{u}(t, y) + D_y \bar{u}(t, y) \mathbf{A}_u}{2} \right|^2, \\ \text{div}_y(\mathbf{A}_u \bar{u}) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

这里 $\mathbf{A}_u = (D_y X_u)^{-1}$. 在 Lagrange 坐标系下, 本文引入如式(3)所示的函数空间, 并定义该空间的范数为

$$(\bar{u}, \nabla \bar{P}, \bar{\theta})_{E_p} = \| \bar{u} \|_{L^1(B_{p,1}^{n/p-1})} + \| \bar{\theta} \|_{L^1(B_{p,1}^{n/p-2})} + \| \partial_t \bar{u}, \nabla^2 \bar{u}, \nabla \bar{P} \|_{L^1(B_{p,1}^{n/p-1})} + \| \partial_t \bar{\theta}, \nabla^2 \bar{\theta} \|_{L^1(B_{p,1}^{n/p-2})}.$$

为证明系统(13)的可解性, 定义如下映射:

$$\Phi: (\bar{v}, \nabla \bar{Q}, \bar{h}) \rightarrow (\bar{u}, \nabla \bar{P}, \bar{\theta}),$$

其中 $(\bar{u}, \nabla \bar{P}, \bar{\theta})$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u} - \mu \Delta \bar{u} + \nabla \bar{P} = (1 - \rho_0) \partial_t \bar{v} + \mu \text{div}((\mathbf{A} \mathbf{A}^T - \mathbf{I}_n) \nabla \bar{v}) + (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^T) \nabla \bar{Q}, \\ \partial_t \bar{\theta} - k \Delta \bar{\theta} = (1 - C_v \rho_0) \partial_t \bar{h} + k \text{div}((\mathbf{A} \mathbf{A}^T - \mathbf{I}_n) \nabla \bar{h}) + 2\mu \left| \frac{\mathbf{A}^T \nabla \bar{v} + D\bar{v} \mathbf{A}}{2} \right|^2, \\ \text{div} \bar{u} = \text{div}((\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \bar{v}), \\ \bar{u}|_{t=0} = u_0, \quad \bar{\theta}|_{t=0} = \theta_0, \end{cases} \tag{14}$$

这里 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_v = (D_y X_v)^{-1}$.

4 主要结果的证明

4.1 定理 1 的证明

对某个正常数 R (待定), 记 \tilde{E}_p^R 为 E_p 中包含 $(\bar{v}, \nabla \bar{Q}, \bar{h})$ 且满足 $|DX_v|$ 恒为 1, $\|(\bar{v}, \nabla \bar{Q}, \bar{h})\|_{E_p} \leq R$ 的闭子集. 对 $(\bar{v}, \nabla \bar{Q}, \bar{h}) \in \tilde{E}_p^R$, 有

$$\bar{v} \in C(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{n/p-1}), \quad \partial_t \bar{v}, \nabla^2 \bar{v} \in L^1(\mathbb{R}_+; \dot{B}_{p,1}^{n/p-1}).$$

为简便, 进一步改写系统(14)为

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u} - \mu \Delta \bar{u} + \nabla \bar{P} = f_1(\bar{v}, \nabla \bar{Q}), \\ \partial_t \bar{\theta} - k \Delta \bar{\theta} = f_2(\bar{h}, \bar{v}), \\ \text{div} \bar{u} = g(\bar{v}), \\ \bar{u}|_{t=0} = u_0, \quad \bar{\theta}|_{t=0} = \theta_0, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} f_1(\bar{v}, \nabla \bar{Q}) &= (1 - \rho_0) \partial_t \bar{v} + \mu \text{div}((\mathbf{A} \mathbf{A}^T - \mathbf{I}_n) \nabla \bar{v}) + (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^T) \nabla \bar{Q}, \\ f_2(\bar{h}, \bar{v}) &= (1 - C_v \rho_0) \partial_t \bar{h} + k \text{div}((\mathbf{A} \mathbf{A}^T - \mathbf{I}_n) \nabla \bar{h}) + 2\mu \left| \frac{\mathbf{A}^T \nabla \bar{v} + D\bar{v} \mathbf{A}}{2} \right|^2, \end{aligned}$$

$$g(\bar{v}) = \operatorname{div}((\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\bar{v}).$$

因此, 当 $u_0 \in \dot{B}_{p,1}^{n/p-1}$, $\theta_0 \in \dot{B}_{p,1}^{n/p-2}$ 在范数意义下足够小, 且初始密度满足

$$\|1 - \rho_0\|_{M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1})} \leq c, \quad \|1 - C_v \rho_0\|_{M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-2})} \leq c \tag{15}$$

时, 若取 R 足够小 (R 依赖于 c), 则只需验证映射 Φ 满足 Banach 不动点定理的条件即可完成定理 1 的证明. 显然, 对 $(\bar{v}, \nabla \bar{Q}, \bar{h}) \in \tilde{E}_p^R$, 当 R 足够小时必有

$$\int_0^\infty \|D\bar{v}\|_{B_{p,1}^{n/p}} dt \leq c. \tag{16}$$

1) 证明 $\Phi: \tilde{E}_p^R \rightarrow \tilde{E}_p^R$.

根据引理 1 和引理 2, 可得

$$\begin{aligned} \|\Phi(\bar{v}, \nabla \bar{Q}, \bar{h})\|_{E_p} = C & (\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p-1}} + \|\theta_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p-2}} + \\ & \|f_1, \mu \nabla g, R\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1})} + \|f_2\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p-2})}). \end{aligned} \tag{17}$$

下面逐项处理式(17)右端. 关于 f_1 和 f_2 的估计, 由乘子空间 $M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1})$ 和 $M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-2})$ 的定义, 有

$$\|(1 - \rho_0) \partial_t \bar{v}\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p-1}} \leq C \|1 - \rho_0\|_{M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1})} \|\partial_t \bar{v}\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p-1}}, \tag{18}$$

$$\|(1 - C_v \rho_0) \partial_t \bar{h}\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p-2}} \leq C \|1 - C_v \rho_0\|_{M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-2})} \|\partial_t \bar{h}\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p-2}}. \tag{19}$$

根据 $|DX|=1$ 和不等式(9), 可得

$$\|\operatorname{div}((\mathbf{A}\mathbf{A}^T - \mathbf{I}_n) \nabla \bar{v})\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1})} \leq C \|D\bar{v}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})} \|D\bar{v}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})}, \tag{20}$$

$$\|\operatorname{div}((\mathbf{A}\mathbf{A}^T - \mathbf{I}_n) \nabla \bar{h})\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p-2})} \leq C \|D\bar{v}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})} \|D\bar{h}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1})}. \tag{21}$$

根据不等式(5), 可得 $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^T) \nabla \bar{Q}$ 的估计:

$$\|(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^T) \nabla \bar{Q}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1})} \leq C \|D\bar{v}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})} \|D\bar{Q}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1})}. \tag{22}$$

由 \mathbf{A} 的定义可知

$$\mathbf{A}(t) = \left(\mathbf{I}_n + \int_0^t D\bar{v} d\tau\right)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \left(\int_0^t D\bar{v} d\tau\right)^k.$$

因此可得

$$\|\mathbf{A}\|_{L^\infty(\dot{B}_{p,1}^{n/p})} \leq C \|D\bar{v}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})} \leq c.$$

下面对 f_2 的最后一项进行估计. 由不等式(5), (9), 可得

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\mathbf{A}^T \nabla \bar{v} + D\bar{v}\mathbf{A}}{2} \right\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p-2})}^2 & \leq C \|D\bar{v}\mathbf{A}\|_{L^\infty(\dot{B}_{p,1}^{n/p-2})} \|D\bar{v}\mathbf{A}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})} \leq \\ & C \|\mathbf{A}\|_{L^\infty(\dot{B}_{p,1}^{n/p})} \|D\bar{v}\|_{L^\infty(\dot{B}_{p,1}^{n/p-2})} \|D\bar{v}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})} \|\mathbf{A}\|_{L^\infty(\dot{B}_{p,1}^{n/p})} \leq \\ & C \|D\bar{v}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})}^2 \|\bar{v}\|_{L^\infty(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1})} \|D\bar{v}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})}. \end{aligned} \tag{23}$$

再对 $g(\bar{v})$ 进行估计. 根据 $g(\bar{v})$ 的定义, 将其改写为

$$g(\bar{v}) = \operatorname{div}((\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\bar{v}) = D\bar{v} : (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}),$$

由不等式(5)可得

$$\|g(\bar{v})\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})} \leq C \|D\bar{v}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})} \|D\bar{v}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})}. \tag{24}$$

最后对 $R(\bar{v})$ 进行估计, 对 $R(\bar{v})$ 关于 t 求导, 易知

$$\partial_t (g(\bar{v})) = \operatorname{div}((\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\partial_t \bar{v}) + \operatorname{div}(-\partial_t \mathbf{A} \bar{v}).$$

定义

$$R_1 = (\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\partial_t \bar{v}, \quad R_2 = -\partial_t \mathbf{A} \bar{v},$$

则根据引理 3、不等式(4), (6), 可得

$$\|(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\partial_t \bar{v}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1})} \leq C \|D\bar{v}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})} \|\partial_t \bar{v}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1})}, \tag{25}$$

$$\|-\partial_t \mathbf{A} \bar{v}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1})} \leq C \|D\bar{v}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})} \|\bar{v}\|_{L^\infty(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1})}. \tag{26}$$

将不等式(18)~(26)代入式(17), 对 \tilde{E}_p^R 中的任意 $(\bar{v}, \nabla \bar{Q}, \bar{h})$, 有

$$\begin{aligned} \|\Phi(\bar{v}, \nabla \bar{Q}, \bar{h})\|_{\tilde{E}_p^R} & \leq C (\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p-1}} + \|\theta_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{n/p-2}} + \\ & (\|1 - \rho_0\|_{M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1})} + \|1 - C_v \rho_0\|_{M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-2})} + \|D\bar{v}\|_{L^1(\dot{B}_{p,1}^{n/p})}) \times \end{aligned}$$

$$\|(\bar{v}, \nabla \bar{Q}, \bar{h})\|_{\tilde{E}_\rho^R} + \|D\bar{v}\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p})} \|(\bar{v}, \nabla \bar{Q}, \bar{h})\|_{\tilde{E}_\rho^R}^2.$$

因此, 对任意的正常数 c , 如果满足式(16), 在 \tilde{E}_ρ^R 中满足 $\|(\bar{v}, \nabla \bar{Q}, \bar{h})\|_{\tilde{E}_\rho^R} \leq R$, 且初始密度满足式(15), 则有

$$\|\Phi(\bar{v}, \nabla \bar{Q}, \bar{h})\|_{\tilde{E}_\rho^R} \leq C(\|u_0\|_{B_{\rho,1}^{n/p-1}} + \|\theta_0\|_{B_{\rho,1}^{n/p-2}}) + \frac{1}{2} \|(\bar{v}, \nabla \bar{Q}, \bar{h})\|_{\tilde{E}_\rho^R}.$$

取 $R=c(\mu+k)$, 则有 $\Phi(\bar{v}, \nabla \bar{Q}, \bar{h}) \in \tilde{E}_\rho^R$. 从而完成对 $\Phi: \tilde{E}_\rho^R \rightarrow \tilde{E}_\rho^R$ 的证明.

2) 证明 Φ 是压缩映像.

下面在小初值条件下, 证明映射 $\Phi: \tilde{E}_\rho^R \rightarrow \tilde{E}_\rho^R$ 是压缩的. 首先, 令 $(\bar{u}_j, \nabla \bar{P}_j, \bar{\theta}_j) = \Phi(\bar{v}_j, \nabla \bar{Q}_j, \bar{h}_j)$, 其中 $j=1, 2$. 记 $\delta u = \bar{u}_2 - \bar{u}_1$, $\nabla \delta P = \nabla \bar{P}_2 - \nabla \bar{P}_1$, $\delta \theta = \bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1$. 此外, 为简便, 记 $X_i = X_{v_i}$, $A_i = A_{v_i} = (DX_i)^{-1}$, 其中 $i=1, 2$. 因此, 可得 $(\delta u, \nabla \delta P, \delta \theta)$ 满足如下方程:

$$\begin{cases} \partial_t \delta u - \mu \Delta \delta u + \nabla \delta P = \delta f = \delta f_1 + \delta f_2 + \delta f_3 + \mu \operatorname{div}(\delta f_4) + \mu \operatorname{div}(\delta f_5), \\ \partial_t \delta \theta - k \Delta \delta \theta = \delta m = \delta m_1 + \delta m_2 + k \operatorname{div}(\delta m_4) + k \operatorname{div}(\delta m_5), \\ \operatorname{div}(\delta u) = \delta g, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} \delta f_1 &= (1 - \rho_0) \partial_t \delta u, & \delta f_2 &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_2^\top) \nabla \delta P, & \delta f_3 &= (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)^\top \nabla \bar{P}_1, \\ \delta f_4 &= (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2^\top - \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1^\top) \nabla \bar{u}_1, & \delta f_5 &= (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2^\top - \mathbf{I}_n) \nabla \delta u, \\ \delta m_1 &= (1 - C_v \rho_0) \partial_t \delta \theta, & \delta m_2 &= 2\mu \left(\left| \frac{\mathbf{A}_2^\top \nabla u_2 + Du_2 \mathbf{A}_2}{2} \right|^2 - \left| \frac{\mathbf{A}_1^\top \nabla u_1 + Du_1 \mathbf{A}_1}{2} \right|^2 \right), \\ \delta m_3 &= (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2^\top - \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1^\top) \nabla \bar{\theta}_1, & \delta m_4 &= (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2^\top - \mathbf{I}_n) \nabla \delta \theta, \\ \delta g &= \operatorname{div}((\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_2) \delta u + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \bar{u}_1). \end{aligned}$$

易知

$$\partial_t \delta g = \operatorname{div}(\delta R) = \operatorname{div}(\delta R_1 + \delta R_2 + \delta R_3 + \delta R_4),$$

其中

$$\begin{aligned} \delta R_1 &= -\partial_t \mathbf{A}_2 \delta u, & \delta R_2 &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_2) \partial_t \delta u, \\ \delta R_3 &= \partial_t (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \bar{u}_1, & \delta R_4 &= (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \partial_t \bar{u}_1. \end{aligned}$$

根据引理 1 和引理 2, 可得

$$\begin{aligned} \|\Phi(\delta v, \nabla \delta Q, \delta h)\|_{E_\rho} &\leq C(\|\delta f\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p-1})} + \|\delta m\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p-2})} + \\ &\quad \mu \|\delta g\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p})} + \|\delta R\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p-1})}). \end{aligned} \tag{27}$$

下面对式(27)右端进行逐项估计. 先对 δf_1 和 δm_1 进行估计. 由乘子空间 $M(B_{\rho,1}^s)$ 的定义, 可得

$$\|\delta f_1\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p-1})} \leq C \|1 - \rho_0\|_{M(B_{\rho,1}^{n/p-1})} \|\partial_t \delta u\|_{B_{\rho,1}^{n/p-1}}, \tag{28}$$

$$\|\delta m_1\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p-2})} \leq C \|1 - \rho_0\|_{M(B_{\rho,1}^{n/p-2})} \|\partial_t \delta \theta\|_{B_{\rho,1}^{n/p-2}}. \tag{29}$$

根据不等式(5)可知

$$\|\delta f_2\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p-1})} \leq C \|D\bar{v}_2\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p})} \|D\delta P\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p-1})}. \tag{30}$$

同理, 可得 δf_5 和 δm_4 的估计. 根据 $|DX|=1$ 和不等式(8), 可得

$$\|\delta f_5\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p})} \leq C \|D\bar{v}_2\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p})} \|D\delta u\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p})}, \tag{31}$$

$$\|\delta m_4\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p-1})} \leq C \|D\bar{v}_2\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p})} \|D\delta \theta\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p-1})}. \tag{32}$$

下面对 δm_2 进行估计. 由 \mathbf{A} 的定义、不等式(4), (9), (10), 可得

$$\begin{aligned} \|\delta m_2\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p-2})} &\leq \left\| \frac{\mathbf{A}_2^\top \nabla \bar{u}_2 + D\bar{u}_2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1^\top \nabla \bar{u}_1 + D\bar{u}_1 \mathbf{A}_1}{2} \right\|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p})} \times \\ &\quad \left\| \frac{\mathbf{A}_2^\top \nabla \bar{u}_2 + D\bar{u}_2 \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1^\top \nabla \bar{u}_1 - D\bar{u}_1 \mathbf{A}_1}{2} \right\|_{L^\infty(B_{\rho,1}^{n/p-2})} \leq \\ &\quad Du_2 \mathbf{A}_2 + Du_1 \mathbf{A}_1 \|_{L^1(B_{\rho,1}^{n/p})} \times \|(\mathbf{A}_2^\top - \mathbf{A}_1^\top) \nabla u_1 + \mathbf{A}_2^\top \nabla \delta u + \\ &\quad Du_1 (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) + D\delta u \mathbf{A}_2 \|_{L^\infty(B_{\rho,1}^{n/p-2})} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\|D\bar{u}_2\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \|D\bar{v}_2\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} + \|D\bar{u}_1\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \|D\bar{v}_1\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})}) \times \\ & (\|D\delta v\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \|\bar{u}_1\|_{L^\infty(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1})} + \|D\bar{v}_2\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \|\delta u\|_{L^\infty(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1})}), \end{aligned} \quad (33)$$

根据不等式(9),(10), 可得 δf_4 和 δm_3 的相关估计如下:

$$\|\delta f_4\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \leq C \|D\delta v\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \|D\bar{u}_1\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})}, \quad (34)$$

$$\|\delta m_3\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1})} \leq C \|D\delta v\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \|D\bar{\theta}_1\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1})}. \quad (35)$$

此外, 为获得 δg 在 $L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})$ 中的估计, 将 δg 改写为

$$\delta g = D\delta u : (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_2) - D\bar{u}_1 : (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1).$$

根据不等式(5), 可知

$$\|D\delta u : (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_2)\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \leq C \|D\bar{v}_2\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \|D\delta u\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})}, \quad (36)$$

由不等式(9), 可得

$$\|D\bar{u}_1 : (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \leq C \|D\bar{u}_1\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \|D\delta v\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})}. \quad (37)$$

下面对 $\partial_i \delta g$ 进行估计. 根据 δg 的定义易知

$$\partial_i \delta g = \text{div}(\delta R) = \text{div}(\delta R_1 + \delta R_2 + \delta R_3 + \delta R_4). \quad (38)$$

对式(38)右端进行逐项估计. 由不等式(6)可得

$$\|\delta R_1\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1})} \leq C \|D\bar{v}_2\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \|\delta u\|_{L^\infty(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1})}. \quad (39)$$

根据不等式(5), 有

$$\|\delta R_2\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1})} \leq C \|D\bar{v}_2\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \|\partial_i \delta u\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1})}. \quad (40)$$

由不等式(12), 可得

$$\|\delta R_3\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1})} \leq C \|D\delta v\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \|\bar{u}_1\|_{L^\infty(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1})}. \quad (41)$$

根据不等式(9), 有

$$\|\delta R_4\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1})} \leq C \|D\delta v\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \|\partial_i \bar{u}_1\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1})}. \quad (42)$$

将不等式(28)~(37), (39)~(42)代入式(27), 可得

$$\begin{aligned} \|\Phi(\delta v, \nabla \delta Q, \delta h)\|_{E_\rho} & \leq C (\|1 - \rho_0\|_{M(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1})} + \|1 - C_\alpha \rho_0\|_{M(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-2})} + \\ & \|D\bar{v}_2\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})}) \times \|(\delta u, \nabla \delta P, \delta \theta)\|_{E_\rho} + \\ & C(\mu + k)^{-1} \|(\bar{u}_1, \nabla \bar{P}_1, \bar{\theta}_1)\|_{E_\rho} \|(\delta v, \nabla \delta Q, \delta h)\|_{E_\rho} + \\ & \|D\bar{v}_i\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \|D\bar{u}_i\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \|\bar{u}_1\|_{L^\infty(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1})} \|D\delta v\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} + \\ & \|D\bar{v}_i\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \|D\bar{u}_i\|_{L^1(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p})} \|\delta u\|_{L^\infty(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1})}. \end{aligned}$$

若 \bar{v}_1, \bar{v}_2 和 ρ_0 满足式(16),(15), 并保证其在范数意义下足够小, 则有

$$\|\Phi(\delta v, \nabla \delta Q, \delta h)\|_{E_\rho} \leq 2CR(\mu + k)^{-1} \|(\delta v, \nabla \delta Q, \delta h)\|_{E_\rho}.$$

因此在小初值条件下, 当 R 满足 $4CR \leq \mu + k$, 即 $4Cc \leq 1$ (c 充分小) 时, 映射 $\Phi: \tilde{E}_\rho^R \rightarrow \tilde{E}_\rho^R$ 满足 $\frac{1}{2}$ -Lipschitz 条件. 于是完成了系统(13)在 \tilde{E}_ρ^R 中适定性的证明.

4.2 定理 2 的证明

考虑在 Euler 坐标系下, 系统(1)有唯一的整体解. 利用定理 1 可构造系统(13)的整体解 $(\bar{u}, \bar{\theta}, \nabla \bar{P})$, 使其满足

$$\rho_0 \in L^\infty(M(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1}) \cap M(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-2})), \quad (\bar{u}, \bar{\theta}) \in E_\rho.$$

记

$$(\rho, u, \theta, P) = (\rho_0 X_u^{-1}, \bar{u} \circ X_u^{-1}, \bar{\theta} \circ X_u^{-1}, \bar{P} \circ X_u^{-1})$$

是系统(1)的解. 由 X_u 的定义, 可得 $DX_u - \mathbf{I}_n \in \dot{B}_{\rho,1}^{n/p}$. 因此, 映射 $\varphi \mapsto \varphi \circ X_u^{\pm 1}(t)$ (Lagrange 变换或逆变换) 是连续的且是 $\dot{B}_{\rho,1}$ 到自身的^[12], 其中 $s \in \{n/p, n/p-1, n/p-2\}$, 易知 $\rho \in L^\infty(M(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1}) \cap M(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-2}))$, $u \in L^\infty(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-1})$, $\theta \in L^\infty(\dot{B}_{\rho,1}^{n/p-2})$. 此外, 根据 Lagrange 坐标变换的运算法则, 有

$$\nabla P = (\mathbf{A}_u^T \nabla \bar{P}) \circ X_u^{-1}, \quad \nabla u = (\mathbf{A}_u^T \nabla \bar{u}) \circ X_u^{-1}, \quad \nabla \theta = (\mathbf{A}_u^T \nabla \bar{\theta}) \circ X_u^{-1}.$$

综上, 可得 $(u, \theta) \in E_\rho$. 为证明唯一性, 考虑在 Euler 坐标系下的两个解 (ρ_1, u_1, θ_1) 和 (ρ_2, u_2, θ_2) ,

它们具有相同的初值 (ρ_0, u_0, θ_0) . 从而通过 Lagrange 坐标变换将系统(1)改写为系统(13), 进而得 $(\bar{\rho}_i, \bar{u}_i, \bar{\theta}_i) \in L^\infty(M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-1}) \cap M(\dot{B}_{p,1}^{n/p-2})) \times E_p, i = 1, 2$. 因此, 利用定理 1 即可完成唯一性的证明. 证毕.

参 考 文 献

- [1] LIONS P L. Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Vol. 1: Incompressible Models [M]. New York: Oxford University Press, 1996: 1-248.
- [2] SIMON J. Nonhomogeneous Viscous Incompressible Fluids; Existence of Velocity, Density, and Pressure [J]. SIAM J Math Anal, 1990, 21(5): 1093-1117.
- [3] LADYZHENSKAYA O A, SOLONNIKOV V A. Unique Solvability of an Initial- and Boundary-Value Problem for Viscous Incompressible Nonhomogeneous Fluids [J]. J Math Sci, 1978, 9: 697-749.
- [4] DANCHIN R. Local and Global Well-Posedness Results for Flows of Inhomogeneous Viscous Fluids [J]. Adv Differential Equations, 2004, 9(3/4): 353-386.
- [5] ABIDI H. Navier-Stokes Equations with Variable Density and Viscosity in the Critical Space [J]. Rev Mat Iberoam, 2007, 23(2): 537-586.
- [6] DANCHIN R, MUCHA P B. A Lagrangian Approach for the Incompressible Navier-Stokes Equations with Variable Density [J]. Comm Pure Appl Math, 2012, 65(10): 1458-1480.
- [7] FUJITA H, KATO T. On the Navier-Stokes Initial Value Problem. I [J]. Arch Ration Mech Anal, 1964, 16: 269-315.
- [8] ZHONG X. Global Strong Solution for 3D Viscous Incompressible Heat Conducting Navier-Stokes Flows with Nonnegative Density [J]. J Differ Equations, 2017, 263(8): 4978-4996.
- [9] ZHONG X. Global Existence and Large Time Behavior of Strong Solutions for 3D Nonhomogeneous Heat Conducting Navier-Stokes Equations [J]. J Math Phys, 2020, 61(11): 111503-1-111503-18.
- [10] ZHANG X, TAN Z. The Global Well-Posedness of the 3D Heat-Conducting Viscous Incompressible Fluids with Bounded Density [J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 2015, 22: 129-147.
- [11] BAHOURI H, CHEMIN J Y, DANCHIN R. Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations [M]. Heidelberg, Germany: Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 2011: 1-523.
- [12] CHIKAMI N, DANCHIN R. On the Well-Posedness of the Full Compressible Navier-Stokes System in Critical Besov Spaces [J]. J Differ Equations, 2015, 258(10): 3435-3467.
- [13] DANCHIN R, MUCHA P B. Critical Functional Framework and Maximal Regularity in Action on Systems of Incompressible Flows [M]. Paris: Les Publications, 2015: 1-151.

(责任编辑: 李 琦)