

# 罗巴李代数同态的形变理论

张静茹, 杜磊, 赵志兵

(安徽大学 数学科学学院, 合肥 230601)

**摘要:** 通过构造罗巴李代数同态的上同调复形, 讨论罗巴李代数同态的形式形变, 并证明当形变复形的二阶上同调群为 0 时, 罗巴李代数同态是刚性的.

**关键词:** 罗巴李代数; 同态; 上同调; 形变

**中图分类号:** O154.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)03-0473-07

## Deformation Theory of Rota-Baxter Lie Algebra Homomorphisms

ZHANG Jingru, DU Lei, ZHAO Zhibing

(School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, China)

**Abstract:** By constructing the cohomologies complexes of Rota-Baxter Lie algebra homomorphisms, we discuss the formal deformation of Rota-Baxter Lie algebra homomorphisms and prove that Rota-Baxter Lie algebra homomorphism is rigid when the 2th-cohomology group of the deformation complex is zero.

**Keywords:** Rota-Baxter Lie algebra; homomorphism; cohomology; deformation

目前, 关于代数形变理论的研究已有很多结果. Gerstenhaber<sup>[1]</sup>研究了结合代数的上同调理论; Nijenhuis 等<sup>[2-3]</sup>研究了李代数和分次李代数的上同调理论. 近年来, 形变理论的研究已发展到带线性算子的代数结构上. 例如: Tang 等<sup>[4]</sup>研究了李代数上的罗巴算子; Das<sup>[5]</sup>将其发展到结合代数上; Nijenhuis 等<sup>[6]</sup>考虑了代数同态的形变; Gerstenhaber 等<sup>[7-8]</sup>给出了一个上同调比较定理(CCT), 用于研究结合代数和代数同态的同时形变. 关于代数同态形变的研究目前也得到了很多成果. 例如: Frégier<sup>[9]</sup>提出了李代数同态形变的一个新的上同调理论, 讨论了两个李代数的同时形变以及它们之间的同态; Yau<sup>[10]</sup>研究了余代数同态的形变理论; Das<sup>[11]</sup>构造了李代数同态的上同调复形, 并研究了李代数同态的 Abel 扩张.

罗巴算子由 Baxter<sup>[12]</sup>首次提出; Rota<sup>[13-14]</sup>将其应用到代数和组合学中; Semenov-Tyan-Shanskii<sup>[15]</sup>研究表明, 二次李代数上的反对称经典 Yang-Baxter 方程的算子即为李代数上权为 0 的罗巴算子; 文献[16-17]研究了任意权的罗巴算子(也称为加权罗巴算子); 文献[18]研究了李群上权为 1 的罗巴算子的上同调理论; Das<sup>[19]</sup>研究了加权罗巴李代数的上同调和形变理论, 并指出当权为 0 时, 其上同调与文献[20]中引入的上同调一致.

本文考虑罗巴李代数同态的形变, 将代数同态的形变理论推广到罗巴李代数同态的情形, 构造控制罗巴李代数同态形变的上同调复形, 并用构造出的上同调复形研究其形变问题. 除特别说明外, 本文中的线性空间、线性映射、Hom 均定义在特征为 0 的域  $\mathbb{F}$  上.

收稿日期: 2023-11-02.

**第一作者简介:** 张静茹(1999—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事环与代数表示论的研究, E-mail: 1263309153@qq.com. **通信作者简介:** 杜磊(1989—), 男, 汉族, 讲师, 从事环与代数表示论的研究, E-mail: 20060@ahu.edu.cn.

**基金项目:** 国家自然科学基金(批准号: 12371015)和安徽省教育厅重点项目(批准号: 2023AH050059).

# 1 罗巴李代数同态的上同调

**定义 1**<sup>[21]</sup> 设  $A$  是一个李代数.

1) 如果线性映射  $T: A \rightarrow A$  满足

$$[T(x), T(y)] = T([T(x), y] + [x, T(y)] + \lambda[x, y]), \quad x, y \in A, \quad (1)$$

则称  $T$  是一个权为  $\lambda$  的罗巴算子;

2) 称李代数  $A$  和权为  $\lambda$  的罗巴算子  $T$  组成的二元组  $(A, T)$  是一个权为  $\lambda$  的罗巴李代数.

**定义 2**<sup>[19]</sup> 设  $(A, T_A), (B, T_B)$  是权为  $\lambda$  的罗巴李代数. 如果线性映射  $\phi: A \rightarrow B$  是李代数同态, 并满足  $\phi \circ T_A = T_B \circ \phi$ , 则称  $\phi$  是从  $(A, T_A)$  到  $(B, T_B)$  的罗巴李代数同态.

记  $\mathfrak{R}\mathfrak{L}_\lambda$  是权为  $\lambda$  的罗巴李代数的范畴, 定义 2 中的映射即为该范畴中的态射.

**定义 3**<sup>[19]</sup> 设  $(A, T)$  是一个权为  $\lambda$  的罗巴李代数. 若  $M$  是李代数  $A$  上的模, 且  $T_M: M \rightarrow M$  满足

$$T(x) \cdot T_M(m) = T_M(T(x) \cdot m + x \cdot T_M(m) + \lambda x \cdot m), \quad x \in A, \quad m \in M, \quad (2)$$

则  $(M, T_M)$  称为  $(A, T)$  上的罗巴李模.

显然,  $(A, T)$  是其自身上的李模.

**定义 4** 设  $(M, T_M)$  和  $(N, T_N)$  是罗巴李代数  $(A, T)$  上的罗巴李模. 如果线性映射  $f: M \rightarrow N$  是李模同态, 并满足  $T_N \circ f = f \circ T_M$ , 则称  $f$  是一个  $(A, T)$ -模同态.

**命题 1**<sup>[19]</sup> 设  $(A, T)$  是一个权为  $\lambda$  的罗巴李代数, 则有以下结论:

1)  $[A, [-, -]_{\star_A}]$  是一个李代数, 其中

$$[x, y]_{\star_A} = [T(x), y] + [x, T(y)] + \lambda[x, y], \quad x, y \in A, \quad (3)$$

记该李代数为  $A_\star$ .

2)  $(A_\star, T)$  是权为  $\lambda$  的罗巴李代数, 且映射  $T: A_\star \rightarrow A$  是从  $(A_\star, T)$  到  $(A, T)$  的罗巴李代数同态.

**命题 2**<sup>[19]</sup> 设  $(A, T)$  是权为  $\lambda$  的罗巴李代数, 且  $(M, T_M)$  是  $(A, T)$  上的罗巴李模. 定义左作用  $\triangleright$  如下: 对任意的  $x \in A, m \in M$ , 有

$$x \triangleright m := T(x) \cdot m - T_M(x \cdot m), \quad (4)$$

则该作用使  $M$  成为  $A_\star$  上的李模, 记为  $\triangleright M$ .

文献[11]考虑了李代数同态: 设  $\langle A, B, \phi \rangle$  为李代数同态, 若  $M$  是  $A$  上的模,  $N$  是  $B$  上的模,  $\psi: M \rightarrow N$  是线性映射并满足  $\psi(x \cdot m) = \phi(x) \cdot \psi(m)$ ,  $x \in A, m \in M$ , 则  $\langle M, N, \psi \rangle$  称为李  $\phi$  模. 定义一个新作用  $\cdot_\ast: A \times N \rightarrow N$ ,  $(x, n) \mapsto x \cdot_\ast n = \phi(x) \cdot n$ , 则  $N$  为李代数  $A$  上的模, 记为  $N_\phi$ .

类似地, 设  $\phi: (A, T_A) \rightarrow (B, T_B)$  是权为  $\lambda$  的罗巴李代数同态, 若  $(M, T_M)$  是  $(A, T_A)$  上的李模,  $(N, T_N)$  是  $(B, T_B)$  上的李模, 且  $\psi: (M, T_M) \rightarrow (N, T_N)$  为一个  $(A, T_A)$ -模同态, 则  $\langle M, N, \psi \rangle$  称为一个罗巴李  $\phi$  模,  $(N, T_N)$  即可视为罗巴李代数  $(A, T_A)$  上的李模.

**定理 1** 设  $\phi: (A, T_A) \rightarrow (B, T_B)$  是一个权为  $\lambda$  的罗巴李代数同态, 则  $\phi: (A_\star, T_A) \rightarrow (B_\star, T_B)$  为罗巴李代数同态.

证明: 只需证  $\phi$  保持乘法运算. 事实上, 设  $x_1, x_2 \in A$ , 则

$$\begin{aligned} \phi([x_1, x_2]_{\star_A}) &= \phi([T_A(x_1), x_2] + [x_1, T_A(x_2)] + \lambda[x_1, x_2]) = \\ &= [\phi \circ T_A(x_1), \phi(x_2)] + [\phi(x_1), \phi \circ T_A(x_2)] + \lambda[\phi(x_1), \phi(x_2)] = \\ &= [T_B \circ \phi(x_1), \phi(x_2)] + [\phi(x_1), T_B \circ \phi(x_2)] + \lambda[\phi(x_1), \phi(x_2)] = [\phi(x_1), \phi(x_2)]_{\star_B}. \end{aligned}$$

因此,  $\phi: (A_\star, T_A) \rightarrow (B_\star, T_B)$  是罗巴李代数同态. 证毕.

为区分  $\phi: (A, T_A) \rightarrow (B, T_B)$ , 本文将  $\phi: (A_\star, T_A) \rightarrow (B_\star, T_B)$  记为  $\phi_\star$ .

**定理 2** 设  $\psi: (M, T_M) \rightarrow (N, T_N)$  是  $(A, T_A)$ -模同态, 则  $\psi: (\triangleright M, T_M) \rightarrow (\triangleright N, T_N)$  是  $(A_\star, T_A)$ -模同态.

证明: 由命题 2 知,  $\triangleright M, \triangleright N$  为  $(A_\star, T_A)$ -模, 只需证  $\psi: (\triangleright M, T_M) \rightarrow (\triangleright N, T_N)$  为  $(A_\star, T_A)$ -模同态. 因为  $T_N \circ \psi = \psi \circ T_M$ , 从而对  $x \in A, m \in M$ , 有

$$\psi(x \triangleright m) = \psi(T_A(x) \cdot m - T_M(x \cdot m)) = \psi(T_A(x) \cdot m) - \psi \circ T_M(x \cdot m) =$$

$$T_A(x) \cdot \psi(m) - T_N \circ \psi(x \cdot m) = T_A(x) \cdot \psi(m) - T_N(x \cdot \psi(m)) = x \triangleright \psi(m).$$

因此,  $\psi$  是  $(A_\star, T_A)$ -模同态. 证毕.

设  $\phi: (A, T_A) \rightarrow (B, T_B)$  为罗巴李代数同态, 且  $\langle M, N, \phi \rangle$  为罗巴李  $\phi$  模. 由定理 2 知,  $\phi: (\triangleright M, T_M) \rightarrow (\triangleright N, T_N)$  是一个  $(A_\star, T_A)$ -模同态, 即  $\langle \triangleright M, \triangleright N, \phi \rangle$  为罗巴李  $\phi_\star$ -模. 为与  $\langle M, N, \phi \rangle$  区分, 本文将记为  $\langle \triangleright M, \triangleright N, \psi_\star \rangle$ .

设  $A$  是一个李代数,  $M$  是  $A$  上的李模.  $A$  的系数在  $M$  上的 Chevalley-Eilenberg 上链复形为  $\{C_{CE}^n(A, M), \delta_{CE_1}^n\}$ , 其中  $C_{CE}^n(A, M) = \text{Hom}(\wedge^n A, M)$ ,  $n \geq 0$ . 微分映射  $\delta_{CE_1}^n: C_{CE}^n(A, M) \rightarrow C_{CE}^{n+1}(A, M)$  定义为

$$(\delta_{CE_1}^n f)(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+n} x_i \cdot f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) + \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j+n+1} f([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}).$$

对  $f \in C_{CE}^n(A, M)$ ,  $x_1, \dots, x_{n+1} \in A$ .

复形  $\{C_{CE}^n(A, M), \delta_{CE_1}^n\}$  的上同调称为  $A$  的系数在  $M$  上的 Chevalley-Eilenberg 上同调, 记为  $H^*(A, M)$ .

**定义 5**<sup>[19]</sup> 设  $(A, T)$  是一个权为  $\lambda$  的罗巴李代数,  $(M, T_M)$  是  $(A, T)$  上的模. 对任意的  $n \geq 0$ , 定义

$$C_{CE}^n(A_\star, \triangleright M) = \text{Hom}(\wedge^n A, M), \quad \partial_{CE}^n: C_{CE}^n(A_\star, \triangleright M) \rightarrow C_{CE}^{n+1}(A_\star, \triangleright M),$$

则上链复形  $\{C_{CE}^n(A_\star, \triangleright M), \partial_{CE}^n\}$  称为罗巴算子  $T$  的系数在  $(M, T_M)$  上的上链复形.

设  $\langle A, B, \phi \rangle$  为一个李代数同态, 且  $\langle M, N, \psi \rangle$  是  $\langle A, B, \phi \rangle$  上的模, 则存在如下 3 个上链复形.

- 1)  $\{C_{CE}^n(A, M), \delta_{CE_1}^n\}$ :  $A$  的系数在  $M$  上的 Chevalley-Eilenberg 复形;
- 2)  $\{C_{CE}^n(B, N), \delta_{CE_2}^n\}$ :  $B$  的系数在  $N$  上的 Chevalley-Eilenberg 复形;
- 3)  $\{C_{CE}^n(A, N_\phi), \delta_{CE_3}^n\}$ :  $A$  的系数在  $N_\phi$  上的 Chevalley-Eilenberg 复形.

**命题 3**<sup>[19]</sup> 设  $(A, T)$  是一个权为  $\lambda$  的罗巴李代数, 且  $(M, T_M)$  是  $(A, T)$  上的罗巴李模. 映射  $\Phi^*: C_{CE}^n(A, M) \rightarrow C_{CE}^n(A_\star, \triangleright M)$  定义如下:

- 1)  $\Phi^0 = \text{Id}_M$ ;
- 2) 当  $n \geq 1$  且  $f \in C_{CE}^n(A, M)$  时,  $\Phi^n(f) \in C_{CE}^n(A_\star, \triangleright M)$  为

$$\Phi^n(f)(x_1, \dots, x_n) = f(T(x_1), \dots, T(x_n)) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} T_M \circ f(x_1, \dots, T(x_{i_1}), \dots, T(x_{i_k}), \dots, x_n).$$

则  $\Phi^n$  为一个链映射, 即  $\partial_{CE}^n \circ \Phi^n = \Phi^{n+1} \circ \delta_{CE_1}^n, n \geq 0$ .

**定义 6**<sup>[19]</sup> 罗巴李代数系数在其模上的上链复形  $\{C_{RB_\lambda}^n(A, M), \delta_{RB}^n\}$  定义为

$$C_{RB_\lambda}^n(A, M) = \begin{cases} C_{CE}^0(A, M), & n = 0, \\ C_{CE}^n(A, M) \oplus C_{CE}^{n-1}(A_\star, \triangleright M), & n \geq 1. \end{cases}$$

映射  $\delta_{RB}^n: C_{RB_\lambda}^n(A, M) \rightarrow C_{RB_\lambda}^{n+1}(A, M)$  定义为

$$\delta_{RB}^0(f) = (\delta_{CE}^0(f), -f), \quad f \in C_{RB_\lambda}^0(A, M);$$

$$\delta_{RB}^n(f, g) = (\delta_{CE_1}^n(f), \partial_{CE}^{n-1}(g) - \Phi^n(f)), \quad f \in C_{CE}^n(A, M), \quad g \in C_{CE}^{n-1}(A_\star, \triangleright M).$$

记  $\{C_{RB_\lambda}^n(A, M), \delta_{RB}^n\}$  的上同调群为  $H_{RB_\lambda}^*(A, M)$ .

文献[11]研究了李代数同态的上同调理论: 设  $\phi: A \rightarrow B$  是一个李代数同态, 且  $\langle M, N, \psi \rangle$  是一个  $\phi$  模,  $\phi$  的系数在  $\langle M, N, \psi \rangle$  中的上链复形为  $C_{MLA}^n(\phi, \psi)$ , 其中

$$C_{MLA}^n(\phi, \psi) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ C_{CE}^0(A, M) \oplus C_{CE}^0(B, N), & n = 0, \\ C_{CE}^n(A, M) \oplus C_{CE}^n(B, N) \oplus C_{CE}^{n-1}(A, N_\phi), & n \geq 1. \end{cases}$$

映射  $\delta_{MLA}^n: C_{MLA}^n(\phi, \psi) \rightarrow C_{MLA}^{n+1}(\phi, \psi)$  定义为

$$\delta_{MLA}^n(f, g, h) = (\delta_{CE_1}^n(f), \delta_{CE_2}^n(g), \psi \circ f - g \circ \wedge^n \phi - \delta_{CE_3}^{n-1}(h)).$$

设  $\phi: (A, T_A) \rightarrow (B, T_B)$  是权为  $\lambda$  的罗巴李代数同态, 且  $\langle M, N, \phi \rangle$  为一个罗巴李  $\phi$ -模, 则  $\langle \triangleright M, \triangleright N, \phi_\star \rangle$  是罗巴李  $\phi_\star$ -模. 因此, 可构造如下的链映射.

**命题 4** 设  $C_{\text{MLA}}(\phi, \psi)$  是  $\phi$  的系数在  $\psi$  上的 Chevalley-Eilenberg 上链复形,  $C_{\text{MLA}}(\phi_\star, \psi_\star)$  是  $\phi_\star$  的系数在  $\psi_\star$  上的 Chevalley-Eilenberg 上链复形. 定义映射  $\pi^\cdot: C_{\text{MLA}}(\phi, \psi) \rightarrow C_{\text{MLA}}(\phi_\star, \psi_\star)$  如下: 1)  $\pi^0: C_{\text{MLA}}^0(\phi, \psi) \rightarrow C_{\text{MLA}}^0(\phi_\star, \psi_\star)$  为恒等映射; 2) 当  $n \geq 1$  时,  $\pi^n: C_{\text{MLA}}^n(\phi, \psi) \rightarrow C_{\text{MLA}}^n(\phi_\star, \psi_\star)$  定义为  $\pi^n(f, g, h) = (\Phi^n(f), \Phi^n(g), \Phi^{n-1}(h))$ . 这里,  $f \in C_{\text{CE}}^n(A, M)$ ,  $g \in C_{\text{CE}}^n(B, N)$ ,  $h \in C_{\text{CE}}^{n-1}(A, N_\phi)$ . 则  $\pi^\cdot$  是一个链映射.

证明: 只需证对任意的  $(f, g, h) \in C_{\text{MLA}}^n(\phi, \psi)$ , 有

$$\pi^{n+1} \delta_{\text{MLA}}^n(f, g, h) = \delta_{\text{MLA}}^n \pi^n(f, g, h).$$

事实上, 由于  $\Phi^\cdot$  是一个链映射, 故有

$$\begin{aligned} \pi^{n+1} \delta_{\text{MLA}}^n(f, g, h) &= (\Phi^{n+1}(\delta_{\text{CE}_1}^n(f)), \Phi^{n+1}(\delta_{\text{CE}_2}^n(g)), \Phi^n(\psi \circ f - g \circ \wedge^n \phi - \delta_{\text{CE}_3}^{n-1}(h))) = \\ &= (\partial_{\text{CE}}^n(\Phi^n(f)), \partial_{\text{CE}}^n(\Phi^n(g)), \Phi^n(\psi \circ f) - \Phi^n(g \circ \wedge^n \phi) - \partial_{\text{CE}}^{n-1}(\Phi^{n-1}(h))). \end{aligned}$$

因此只需证  $\Phi^n(\psi \circ f) = \psi \circ (\Phi^n(f))$ ,  $\Phi^n(g \circ \wedge^n \phi) = (\Phi^n(g)) \circ \wedge^n \phi$ . 由假设可得

$$\begin{aligned} \Phi^n(\psi \circ f)(x_1, \dots, x_n) &= (\psi \circ f)(T(x_1), \dots, T(x_n)) - \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} T_N \circ \psi \circ f(x_1, \dots, T(x_{i_1}), \dots, T(x_{i_k}), \dots, x_n) = \\ &= (\psi \circ f)(T(x_1), \dots, T(x_n)) - \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \psi \circ T_M \circ f(x_1, \dots, T(x_{i_1}), \dots, T(x_{i_k}), \dots, x_n) = \\ &= \psi \circ \Phi^n(f)(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

同理可得  $\Phi^n(g \circ \wedge^n \phi) = (\Phi^n(g)) \circ \wedge^n \phi$ . 证毕.

下面定义罗巴李代数同态系数在其模上的上链复形.

**定义 7** 设  $\pi^\cdot: C_{\text{MLA}}(\phi, \psi) \rightarrow C_{\text{MLA}}(\phi_\star, \psi_\star)$  是命题 4 中的链映射, 将映射锥  $\text{cone}(\pi^\cdot)$  定义为罗巴李代数同态  $\phi$  的系数在  $\psi$  上的上链复形  $C_{\text{mor}_\lambda}(\phi, \psi)$ , 即:

- 1)  $C_{\text{mor}_\lambda}^0(\phi, \psi) = C_{\text{MLA}}^0(\phi, \psi)$ ;
- 2) 当  $n \geq 1$  时,  $C_{\text{mor}_\lambda}^n(\phi, \psi) = C_{\text{MLA}}^n(\phi, \psi) \oplus C_{\text{MLA}}^{n-1}(\phi_\star, \psi_\star)$ , 微分映射  $\rho^n: C_{\text{mor}_\lambda}^n(\phi, \psi) \rightarrow C_{\text{mor}_\lambda}^{n+1}(\phi, \psi)$

定义为

$$\begin{aligned} \rho^n((f_1, g_1, h_1), (f_2, g_2, h_2)) &= (\delta_{\text{MLA}}^n(f_1, g_1, h_1), -\delta_{\text{MLA}}^{n-1}(f_2, g_2, h_2) - \pi^n(f_1, g_1, h_1)) = \\ &= ((\delta_{\text{CE}_1}^n(f_1), \delta_{\text{CE}_2}^n(g_1), \psi \circ f_1 - g_1 \circ \wedge^n \phi - \delta_{\text{CE}_3}^{n-1}(h_1)), \\ &= (-\delta_{\text{CE}_1}^{n-1}(f_2) - \Phi^n(f_1), -\delta_{\text{CE}_2}^{n-1}(g_2) - \Phi^n(g_1), \\ &= -\psi \circ f_2 + g_2 \circ \wedge^{n-1} \phi + \delta_{\text{CE}_3}^{n-2}(h_2) - \Phi^{n-1}(h_1))), \end{aligned} \tag{5}$$

其中  $(f_1, g_1, h_1) \in C_{\text{MLA}}^n(\phi, \psi)$ ,  $(f_2, g_2, h_2) \in C_{\text{MLA}}^{n-1}(\phi_\star, \psi_\star)$ .

记  $\{C_{\text{mor}_\lambda}(\phi, \psi), \rho^\cdot\}$  的上同调群为  $H_{\text{mor}_\lambda}(\phi, \psi)$ .

## 2 罗巴李代数同态的形变

下面讨论罗巴李代数同态的形式形变, 并用复形的二阶上同调刻画罗巴李代数同态形变的刚性问题.

设  $(A, \mu_A, T_A)$  和  $(B, \mu_B, T_B)$  是权为  $\lambda$  的罗巴李代数, 且  $\phi: (A, T_A) \rightarrow (B, T_B)$  是罗巴李代数同态.

记  $X = \{A, B\}$ , 定义:  $\mu_{X,t} = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_{X,t} t^i$ ,  $\mu_{X,0} = \mu_X$ ;  $T_{X,t} = \sum_{i=0}^{\infty} T_{X,t} t^i$ ,  $T_{X,0} = T_X$ ;  $\phi_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_t t^i$ ,  $\phi_0 = \phi$ . 若  $(A[[t]], \mu_{A,t}, T_{A,t})$  和  $(B[[t]], \mu_{B,t}, T_{B,t})$  是权为  $\lambda$  的  $\mathbb{F}[[t]]$ -罗巴李代数, 且  $\phi_t: (A[[t]], \mu_{A,t}, T_{A,t}) \rightarrow (B[[t]], \mu_{B,t}, T_{B,t})$  是罗巴李代数同态, 则  $(\mu_{A,t}, T_{A,t}, \mu_{B,t}, T_{B,t}, \phi_t)$  称为罗巴李代数同态  $\phi: (A, T_A) \rightarrow (B, T_B)$  的单参数形式形变.

幂级数  $(\mu_{A,t}, T_{A,t}, \mu_{B,t}, T_{B,t}, \phi_t)$  是  $\phi: (A, T_A) \rightarrow (B, T_B)$  的单参数形式形变当且仅当对任意的  $a_1, b_1, c_1 \in A, a_2, b_2, c_2 \in B$ , 下列等式成立:

$$\begin{aligned} \mu_{A,t}(a_1, \mu_{A,t}(b_1, c_1)) &= -\mu_{A,t}(b_1, \mu_{A,t}(c_1, a_1)) - \mu_{A,t}(c_1, \mu_{A,t}(a_1, b_1)), \\ \mu_{A,t}(T_{A,t}(a_1), T_{A,t}(b_1)) &= T_{A,t}(\mu_{A,t}(T_{A,t}(a_1), b_1) + \mu_{A,t}(a_1, T_{A,t}(b_1)) + \lambda\mu_{A,t}(a_1, b_1)), \\ \mu_{B,t}(a_2, \mu_{B,t}(b_2, c_2)) &= -\mu_{B,t}(b_2, \mu_{B,t}(c_2, a_2)) - \mu_{B,t}(c_2, \mu_{B,t}(a_2, b_2)), \\ \mu_{B,t}(T_{B,t}(a_2), T_{B,t}(b_2)) &= T_{B,t}(\mu_{B,t}(T_{B,t}(a_2), b_2) + \mu_{B,t}(a_2, T_{B,t}(b_2)) + \lambda\mu_{B,t}(a_2, b_2)), \\ \phi_t(\mu_{A,t}(a_1, b_1)) &= \mu_{B,t}(\phi_t(a_1), \phi_t(b_1)), \\ T_{B,t} \circ \phi_t(a_1) &= \phi_t \circ T_{A,t}(a_1). \end{aligned}$$

展开上述等式, 并比较  $t^n$  的系数, 可得

$$\sum_{i+j=n} \mu_{X,i}(a_x, \mu_{X,i}(b_x, c_x)) = -\sum_{i+j=n} \mu_{X,i}(b_x, \mu_{X,j}(c_x, a_x)) - \sum_{i+j=n} \mu_{X,i}(c_x, \mu_{X,j}(a_x, b_x)), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i+j+k=n} \mu_{X,i}(T_{X,j}, T_{X,k}) &= \sum_{i+j+k=n} T_{X,i} \circ \mu_{X,j} \circ (T_{X,k}, \text{Id}) + \\ &\quad \sum_{i+j+k=n} T_{X,i} \circ \mu_{X,j} \circ (\text{Id}, T_{X,k}) + \lambda \sum_{i+j=n} T_{X,i} \circ \mu_{X,j}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\sum_{i+j=n} \phi_i \circ \mu_{A,j} = \sum_{i+j+k=n} \mu_{B,j} \circ (\phi_j, \phi_k), \quad (8)$$

$$\sum_{i+j=n} \phi_i \circ T_{A,j} = \sum_{i+j=n} T_{B,i} \circ \phi_j. \quad (9)$$

**命题 5** 设  $(\mu_{A,t}, T_{A,t}, \mu_{B,t}, T_{B,t}, \phi_t)$  是罗巴李代数同态  $\phi: (A, T_A) \rightarrow (B, T_B)$  的单参数形式形变, 则  $((\mu_{A,1}, \mu_{B,1}, \phi_1), (T_{A,1}, T_{B,1}, 0))$  是上链复形  $C_{\text{mor}_\lambda}(\phi, \phi)$  中的一个 2-上闭链.

证明: 只需证  $\rho^2((\mu_{A,1}, \mu_{B,1}, \phi_1), (T_{A,1}, T_{B,1}, 0)) = 0$ . 由定义 7 得

$$\begin{aligned} \rho^2((\mu_{A,1}, \mu_{B,1}, \phi_1), (T_{A,1}, T_{B,1}, 0)) &= ((\delta_{\text{CE}_1}^2(\mu_{A,1}), \delta_{\text{CE}_2}^2(\mu_{B,1}), \phi \circ \mu_{A,1} - \mu_{B,1} \circ \wedge^2 \phi - \delta_{\text{CE}_3}^1(\phi_1)), \\ &\quad (-\delta_{\text{CE}_1}^1(T_{A,1}) - \Phi^2(\mu_{A,1}), -\delta_{\text{CE}_1}^1(T_{B,1}) - \Phi^2(\mu_{B,1}), \\ &\quad -\phi \circ T_{A,1} + T_{B,1} \circ \phi - \Phi^1(\phi_1))). \end{aligned}$$

由文献[11]中关于李代数同态的形变和文献[19]中关于罗巴李代数形变的结论可知, 只需证

$$-\phi \circ T_{A,1} + T_{B,1} \circ \phi - \Phi^1(\phi_1) = 0.$$

当  $n=1$  时, 式(9)等同于

$$\phi \circ T_{A,1} + \phi_1 \circ T_A = T_B \circ \phi_1 + T_{B,1} \circ \phi,$$

即

$$-\phi \circ T_{A,1} + T_{B,1} \circ \phi - \Phi^1(\phi_1) = 0.$$

故  $((\mu_{A,1}, \mu_{B,1}, \phi_1), (T_{A,1}, T_{B,1}, 0))$  是上链复形  $C_{\text{mor}_\lambda}(\phi, \phi)$  中的一个 2-上闭链. 证毕.

**定义 8** 设  $(\mu_{A,t}, T_{A,t}, \mu_{B,t}, T_{B,t}, \phi_t)$  为罗巴李代数同态  $\phi: (A, T_A) \rightarrow (B, T_B)$  的单参数形式形变, 则 2-上闭链  $((\mu_{A,1}, \mu_{B,1}, \phi_1), (T_{A,1}, T_{B,1}, 0))$  称为一个无穷小形变.

设  $\phi: (A, T_A) \rightarrow (B, T_B)$  是一个罗巴李代数同态,  $(\mu_{A,t}, T_{A,t}, \mu_{B,t}, T_{B,t}, \phi_t)$  和  $(\mu'_{A,t}, T'_{A,t}, \mu'_{B,t}, T'_{B,t}, \phi'_t)$  是两个单参数形式形变, 则  $(\mu'_{A,t}, T'_{A,t}, \mu'_{B,t}, T'_{B,t}, \phi'_t)$  到  $(\mu_{A,t}, T_{A,t}, \mu_{B,t}, T_{B,t}, \phi_t)$  的一个形式同构是两个幂级数  $(F_{A,t}, F_{B,t})$ :

$$F_{A,t} = \sum_{i=0}^{\infty} F_{A,t} i^i: A[[t]] \rightarrow A[[t]], \quad F_{A,i} \in \text{Hom}(A, A), \quad F_{A,0} = \text{Id}_A,$$

$$F_{B,t} = \sum_{i=0}^{\infty} F_{B,t} i^i: B[[t]] \rightarrow B[[t]], \quad F_{B,i} \in \text{Hom}(B, B), \quad F_{B,0} = \text{Id}_B,$$

使得下列等式成立:

$$F_{X,t} \circ \mu'_{X,t} = \mu_{X,t} \circ (F_{X,t}, F_{X,t}), \quad (10)$$

$$F_{X,t} \circ T'_{X,t} = T_{X,t} \circ F_{X,t}, \quad (11)$$

$$\phi'_t \circ F_{A,t} = F_{B,t} \circ \phi'_t. \quad (12)$$

若存在形式同构  $F_{X,t}: X[[t]] \rightarrow X[[t]]$ , 则称单参数形式形变  $(\mu_{A,t}, T_{A,t}, \mu_{B,t}, T_{B,t}, \phi_t)$  和  $(\mu'_{A,t}, T'_{A,t}, \mu'_{B,t}, T'_{B,t}, \phi'_t)$  是等价的.

**命题 6** 罗巴李代数同态  $\phi: (A, T_A) \rightarrow (B, T_B)$  的两个等价单参数形式形变的无穷小形变属于同一个上同调类.

证明: 设  $(F_{A,t}, F_{B,t})$  是从  $(\mu'_{A,t}, T'_{A,t}, \mu'_{B,t}, T'_{B,t}, \phi'_t)$  到  $(\mu_{A,t}, T_{A,t}, \mu_{B,t}, T_{B,t}, \phi_t)$  的形式同构,  $X = \{A, B\}$ , 则有

$$\begin{aligned} \mu'_{X,1} &= \mu_{X,1} + \mu_X \circ (F_{X,1}, \text{Id}) + \mu_X \circ (\text{Id}, F_{X,1}) - F_{X,1} \circ \mu'_X, \\ T'_{X,1} &= T_{X,1} + T_X \circ F_{X,1} - F_{X,1} \circ T'_X, \quad \phi'_1 = \phi_1 + \phi \circ F_{A,1} - F_{B,1} \circ \phi', \end{aligned}$$

即

$$((\mu'_{A,1}, \mu'_{B,1}, \phi'_1), (T'_{A,1}, T'_{B,1}, 0)) - ((\mu_{A,1}, \mu_{B,1}, \phi_1), (T_{A,1}, T_{B,1}, 0)) = \rho^1(F_{A,1}, F_{B,1}).$$

证毕.

**定义 9** 设  $\phi: (A, T_A) \rightarrow (B, T_B)$  是一个罗巴李代数同态, 若  $\phi$  的任意单参数形式形变等价于  $(\mu_A, T_A, \mu_B, T_B, \phi)$ , 则称  $\phi$  是刚性的.

**定理 3** 设  $\phi: (A, T_A) \rightarrow (B, T_B)$  是罗巴李代数同态. 若  $H^2_{\text{mor}_\lambda}(\phi, \phi) = 0$ , 则  $\phi$  是刚性的.

证明: 设  $(\mu_{A,t}, T_{A,t}, \mu_{B,t}, T_{B,t}, \phi_t)$  是罗巴李代数同态  $\phi: (A, T_A) \rightarrow (B, T_B)$  的一个单参数形式形变, 则  $((\mu_{A,1}, \mu_{B,1}, \phi_1), (T_{A,1}, T_{B,1}, 0))$  是 2-上闭链. 由题意可知  $H^2_{\text{mor}_\lambda}(\phi, \phi) = 0$ , 从而存在  $((F'_1, G'_1, b), (a_1, b_1)) \in C^1_{\text{mor}_\lambda}(\phi, \phi)$ , 使得

$$\rho^1((F'_1, G'_1, b), (a_1, b_1)) = ((\mu_{A,1}, \mu_{B,1}, \phi_1), (T_{A,1}, T_{B,1}, 0)),$$

即

$$\begin{aligned} \mu_{A,1}(x, y) &= [x, F'_1(y)] - [y, F'_1(x)] - F'_1([x, y]), & x, y \in A, \\ \mu_{B,1}(x, y) &= [x, G'_1(y)] - [y, G'_1(x)] - G'_1([x, y]), & x, y \in B, \\ \phi_1(x) &= \phi \circ F'_1(x) - G'_1 \circ \phi(x) - [b, \phi(x)] + [\phi(x), b], & x \in A, \\ T_{A,1}(x) &= -\Phi^1(F'_1 + \delta^0_{\text{CE}_1}(a_1)), & x \in A, \\ T_{B,1}(x) &= -\Phi^1(G'_1 + \delta^0_{\text{CE}_2}(b_1)), & x \in B, \\ b &= b_1 - \phi(a_1). \end{aligned}$$

定义  $F_1 = F'_1 + \delta^0_{\text{CE}_1}(a_1)$ ,  $G_1 = G'_1 + \delta^0_{\text{CE}_2}(b_1)$ ,  $F_t = \text{Id}_A + F_1 t$ ,  $G_t = \text{Id}_B + G_1 t$ . 单参数形式形变  $(\mu'_{A,t}, T'_{A,t}, \mu'_{B,t}, T'_{B,t}, \phi'_t)$  满足

$$\begin{aligned} \mu'_{A,t} &= F_t^{-1} \circ \mu_{A,t} \circ (F_t, F_t), & T'_{A,t} &= F_t^{-1} \circ T_{A,t} \circ F_t, \\ \mu'_{B,t} &= G_t^{-1} \circ \mu_{B,t} \circ (G_t, G_t), & T'_{B,t} &= G_t^{-1} \circ T_{B,t} \circ G_t, & \phi'_t &= G_t^{-1} \circ \phi_t \circ F_t. \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} \mu'_{X,t} &= \mu_X + \mu'_{X,2} t^2 + \dots, & T'_{X,t} &= T_X + T'_{X,2} t^2 + \dots, \\ \phi'_t &= \phi + (G_1 \circ \phi + \phi_1 - \phi \circ F_1)t + \phi'_2 t^2 + \dots. \end{aligned}$$

对  $a \in A$ , 有

$$\begin{aligned} (G_1 \circ \phi + \phi_1 - \phi \circ F_1)(a) &= G_1 \circ \phi(a) + \phi_1(a) - \phi \circ F_1(a) = \\ &= G'_1 \circ \phi(a) + \delta^0_{\text{CE}_2}(b_1) \circ \phi(a) + \phi \circ F'_1(a) - G'_1 \circ \phi(a) - [b, \phi(a)] + \\ &= [\phi(a), b] - \phi \circ F'_1(a) - \phi \circ \delta^0_{\text{CE}_1}(a_1)(a) = \\ &= [b_1, \phi(a)] - [\phi(a), b_1] - [b, \phi(a)] + [\phi(a), b] - \phi(a_1 \cdot a - a \cdot a_1) = \\ &= [b_1, \phi(a)] - [\phi(a), b_1] - [b, \phi(a)] + [\phi(a), b] - [\phi(a_1), \phi(a)] + [\phi(a), \phi(a_1)] = \\ &= [b_1 - b - \phi(a_1), \phi(a)] - [\phi(a), b_1 - b - \phi(a_1)] = 0, \end{aligned}$$

从而  $\phi'_t = \phi + \phi'_2 t^2 + \dots$ . 进一步, 可以验证  $((\mu'_{A,2}, \mu'_{B,2}, \phi'_2), (T'_{A,2}, T'_{B,2}, 0))$  也是 2-上闭链. 最后, 使用归纳法可知其等价于一个平凡形变. 因此,  $\phi: (A, T_A) \rightarrow (B, T_B)$  是刚性的. 证毕.

参 考 文 献

[1] GERSTENHABER M. On the Deformation of Rings and Algebras [J]. Annals of Mathematics, 1964, 79(1):

59-103.

- [2] NIJENHUIS A, RICHARDSON R W, Jr. Cohomology and Deformations in Graded Lie Algebras [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1966, 72(1): 1-29.
- [3] NIJENHUIS A, RICHARDSON R W, Jr. Deformations of Lie Algebra Structures [J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1967, 17(1): 89-105.
- [4] TANG R, BAI C M, GUO L, et al. Deformations and Their Controlling Cohomologies of  $O$ -Operators [J]. Communications in Mathematical Physics, 2019, 368(2): 665-700.
- [5] DAS A. Deformations of Associative Rota-Baxter Operators [J]. Journal of Algebra, 2020, 560: 144-180.
- [6] NIJENHUIS A, RICHARDSON R W, Jr. Deformations of Homomorphisms of Lie Groups and Lie Algebras [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1967, 73(1): 175-179.
- [7] GERSTENHABER M, SCHACK S D. On the Deformation of Algebra Morphisms and Diagrams [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1983, 279(1): 1-50.
- [8] GERSTENHABER M, SCHACK S D. On the Cohomology of an Algebra Morphism [J]. Journal of Algebra, 1985, 95(1): 245-262.
- [9] FRÉGIER Y. A New Cohomology Theory Associated to Deformations of Lie Algebra Morphisms [J]. Letters in Mathematical Physics, 2004, 70(2): 97-107.
- [10] YAU D. Deformations of Coalgebra Morphisms [J]. Journal of Algebra, 2007, 307(1): 106-115.
- [11] DAS A. Cohomology of Morphism Lie Algebras Morphism Triples and Some Applications [J/OL]. Mathematical Physics, Analysis and Geometry, (2023-09-25)[2023-10-30]. <https://doi.org/10.1007/s11040-023-09468-3>.
- [12] BAXTER G. An Analytic Problem Whose Solution Follows from a Simple Algebraic Identity [J]. Pacific Journal Mathematics, 1960, 10(3): 731-742.
- [13] ROTA G C. Baxter Algebras and Combinatorial Identities. I [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1969, 75(2): 325-329.
- [14] ROTA G C. Baxter Algebras and Combinatorial Identities. II [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1969, 75(2): 330-334.
- [15] SEMENOV-TYAN-SHANSKII M A. What Is a Classical  $r$ -Matrix? [J]. Functional Analysis and Its Applications, 1983, 17(4): 259-272.
- [16] BAI C M, GUO L, NI X. Nonabelian Generalized Lax Pairs, the Classical Yang-Baxter Equation and Post Lie Algebras [J]. Communications in Mathematical Physics, 2010, 297(2): 553-596.
- [17] BAI C M, GUO L, NI X. Relative Rota-Baxter Operators and Tridendriform Algebras [J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2013, 12(7): 1350027-1-1350027-18.
- [18] JIANG J, SHENG Y H, ZHU C C. Lie Theory and Cohomology of Relative Rota-Baxter Operators [J]. Journal of the London Mathematical Society, 2014, 109(2): e12863-1-e12863-34.
- [19] DAS A. Cohomology of Weighted Rota-Baxter Lie Algebras and Rota-Baxter Paired Operators [EB/OL]. (2021-09-05)[2023-10-11]. <https://arxiv.org/abs/2109.01972>.
- [20] LAZAREV A, SHENG Y H, TANG R. Deformations and Homotopy Theory of Relative Rota-Baxter Lie Algebras [J]. Communications in Mathematical Physics, 2021, 383(1): 595-631.
- [21] TANG R, BAI C M, GUO L, et al. Homotopy Rota-Baxter Operators, Homotopy  $O$ -Operators and Homotopy Post-Lie Algebras [EB/OL]. (2019-07-31)[2023-09-20]. <https://arxiv.org/abs/1907.13504>.

(责任编辑: 李琦)