doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023467

极大算子及其交换子在齐次树上的加权估计

姜智聪，叶晓峰，熊守龙
（华东交通大学 理学院，南昌 330013）

摘要： 在齐次树中考虑一类测度，它到原点的距离是指数递减的．给出齐次树中关于这类测度的 Lebesgue 空间、BMO（bounded mean oscillation）空间、极大算子及其交换子的定义，并利用齐次树的分解理论，证明极大算子及其交换子在 Lebesgue 空间的有界性及一些等价性质．

关键词： 齐次树；极大算子；交换子；指数递减测度
中图分类号： O177　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671-5489(2024)04-0793-07

Weighted Estimates of Maximal Operators and Their Commutators on Homogeneous Trees

JIANG Zhicong, YE Xiaofeng, XIONG Shoulong
(*School of Science*, *East China Jiaotong University*, *Nanchang* 330013, *China*)

Abstract: A class of measures is considered on homogeneous trees whose distance to the origin is exponentially decreasing. The definitions of Lebesgue spaces, BMO (bounded mean oscillation) spaces, maximal operators and their commutators for this type of measure on homogeneous trees are given. By using the decomposition theory of homogeneous trees, the boundedness of maximal operators and their commutators in Lebesgue spaces and some equivalent properties are proved.

Keywords: homogeneous tree; maximal operator; commutator; exponential decline measure

0　引　言

Coifman 等[1]提出了交换子理论，证明了当 $1<p<\infty$ 时，交换子 $[b,T]$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的当且仅当 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，其中 BMO（bounded mean oscillation）表示有界平均振动函数空间；Milman 等[2]建立了 BMO 函数和极大函数生成的交换子 $[b,M]$ 在经典 Lebesgue 空间中的有界性，Bastero 等[3]给出了 $[b,M]$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中有界的等价刻画；文献[4-6]将极大算子的交换子理论推广到了 Morrey 空间、变指标 Lebesgue 空间和变指标 Morrey 空间．

Levi 等[7]定义了一类测度，这类测度是满足指数增长的非双倍测度，基于这类非双倍测度，引入了 Hardy 空间和 BMO 空间，推广了可积函数的 Calderón-Zygmund 分解理论，并证明了在这两类空间中的插值结果．在此基础上，Monti[8]定义了一类指数递减的测度，这类测度是满足双倍条件的，并定义了这类测度的 Lebesgue 空间、BMO 空间、极大算子和积分算子，得到了极大算子在 Lebesgue 空

收稿日期： 2023-11-02.
第一作者简介： 姜智聪（2000—），男，汉族，硕士研究生，从事调和分析的研究，E-mail：414671040@qq.com. **通信作者简介：** 叶晓峰（1980—），男，汉族，博士，副教授，从事调和分析的研究，E-mail：xiaofye@163.com.
基金项目： 国家自然科学基金（批准号：11661035）.

间、积分算子在 Hardy 空间和 BMO 空间的有界性结果. 文献[9-12]给出了齐次树中算子理论的相关结果.

在上述工作的启发下，本文在齐次树中定义关于指数递减测度类的极大算子及其交换子、Lebesgue 空间和 BMO 空间，证明极大算子及其交换子在这类 Lebesgue 空间的有界性，并给出其有界性的等价刻画.

1 预备知识

设 X 是一个 $q(q>1)$ 次齐次树，则它是一个连通的无环图，同时每个顶点都与 $(q+1)$ 个顶点连接，由于齐次树本身携带了离散距离，该距离是由两个点所确定的唯一有限路径的边数所定义，因此本文在齐次树中固定一个原点 $o\in X$，对 X 中的每个顶点 x，定义 $|x|=d(o,x)$. 齐次树中以 $x(x\in X)$ 为中心、半径为 n 的球面和球分别定义为

$$S(x,n)=\{y\in X\colon d(x,y)=n\},\qquad B(x,n)=\{y\in X\colon d(x,y)\leqslant n\}.$$

当 $|p(x)|=|x|-1$，$x\in X\backslash\{o\}$ 且 $p(x)$ 与 x 相邻时，$p(x)$ 称为 x 点的唯一前置点. 由于齐次树离散的构造结构，前置函数 $p\colon X\backslash\{o\}\to X$ 是满射而非内射的，同时前置函数的指数形式可定义为

$$p^l\colon X\backslash B(o,l-1)\to X,$$

其中需满足

$$|p(x)^l|=|x|-l.$$

把所有与 x 相邻却不是前置点的那些点定义为 x 的后置点，并将 $x\in X$ 的扇区定义为

$$T_x:=\{y\in X\colon x=p^l(y),\ l\in\mathbb{N}\}\subseteq X.$$

因此对任意的 $x\in X$，$p^{|y|}(y)=o$，并且 $T_o=X$.

本文的目的是考虑齐次树上极大算子及其交换子关于某类测度的有界性，因此定义指数递减的径向测度族：对任意的 $x\in X$，$\mu_\alpha(x):=q^{-a|x|}$，其中 $a>1$. 在此基础上，给出齐次树中极大算子、BMO 函数及其交换子和关于测度族 μ_α 的 L^p 空间的定义.

引理 1[13] 对任意的 $m\in\mathbb{N}$，存在 $I_m\in\mathbb{N}$，使得对任意的 $n\in\delta_m:=\{0,1,2,\cdots,I_m\}$，有 $D_{m,n}\subseteq X$，并且把集族 $\mathbb{Q}$ 定义为

$$\mathbb{Q}:=\{D_{m,n}\subseteq X,\ m\in\mathbb{N},\ n\in\delta_m\},$$

满足：

1) 对任意的 $m\in\mathbb{N}$，集族 $\mathbb{Q}_m:=\{D_{m,n}\colon n\in\delta_m\}$ 是 X 的某一部分；

2) 以 $m>0$ 的分割 $\mathbb{Q}_m$ 是对分割 $\mathbb{Q}_{m-1}$ 的加细，即对任意的 $n'\in\delta_{m-1}$，存在 $\delta_{m,n'}\subseteq\delta_m$，使得

$$D_{m-1,n'}=\bigcup_{k\in\delta_{m,n'}}D_{m,n};$$

3) 对任意的 $n\in\delta_m$，$n'\in\delta_{m-1}$，当 $D_{m,n}\subseteq D_{m-1,n'}$ 时，下式成立：

$$\mu_\alpha(D_{m,n})\leqslant\mu_\alpha(D_{m-1,n'})\leqslant C_a\mu_\alpha(D_{m,n}).$$

注 1 这里的分割类似于经典调和分析中的空间分解，是一种齐次树 X 中的二进制分解，当 m 越大时，分割 $D_{m,n}$ 越细，同时引理 1 中 3)也表明这种分割出的 $D_{m,n}$ 满足双倍条件.

例如，对分割 $D_{m,n}$ 可进行如下构造：对任意的 $m\in\mathbb{N}$，令

$$I_m:=\#B(o,m)=\begin{cases}0, & m=0,\\ \dfrac{q^{m+1}+q^m-q-1}{q-1}, & m>0,\end{cases}$$

其中 $\#B(o,m)$ 表示 $B(o,m)$ 的点数. 设 $v_0=o$，$S(o,1)=\{v_1,v_2\cdots,v_{q+1}\}$，因为 $\delta_0=\{0\}$，因此令 $D_{0,0}=X$，对任意的 $m\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$，令

$$\begin{cases}D_{m,n}:=\{v_n\}, & n\in\delta_{m-1},\\ D_{m,n}:=T_{v_n}, & n\in\delta_m\backslash\delta_{m-1},\end{cases}$$

则此时构造的分割 $D_{m,n}$ 满足引理 1 中的条件.

定义 1　设 $1<p\leqslant\infty$，X 上关于测度 μ_α 的 Lebesgue 空间 $L^p(\mu_\alpha)$ 定义为

$$L^p(\mu_\alpha)=\left\{f:\ \|f\|_{L^p(\mu_\alpha)}=\left(\sum_{x\in X}|f(x)|^p\mu_\alpha(x)\right)^{1/p}<\infty\right\},$$

其中 $f:X\to R$.

定义 2　设 $1\leqslant r<\infty$，$b(x):X\to R$，$\mathrm{BMO}_{r,\mu_\alpha}$ 空间定义为

$$\mathrm{BMO}_{r,\mu_\alpha}=\left\{b:\ \|b\|_{\mathrm{BMO}_{r,\mu_\alpha}}=\sup_{D_{m,n}}\left(\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{x\in D_{m,n}}|b(x)-b_{D_{m,n}}|^r\cdot\mu_\alpha(x)\right)^{1/r}<\infty\right\},$$

其中

$$b_{D_{m,n}}=\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{x\in D_{m,n}}b(x)\cdot\mu_\alpha(x).$$

当 $r=1$ 时，记 $\mathrm{BMO}_{r,\mu_\alpha}=\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}$，当 $b\in\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}$ 时，存在常数 $C>0$，使得 $|b(x)-b_{D_{m,n}}|\leqslant C\cdot\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}}$ 成立.

定义 3　设 $b\in\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}$，$f:X\to R$，齐次树 X 上的极大算子、极大交换子、极大算子与 BMO 函数生成的交换子分别定义为

$$Mf(x)=\sup_{x\in D_{m,n}}\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{y\in D_{m,n}}|f(y)|\cdot\mu_\alpha(y),$$

$$M_bf(x)=\sup_{x\in D_{m,n}}\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{y\in D_{m,n}}|b(x)-b(y)|\cdot|f(y)|\cdot\mu_\alpha(y),$$

$$[b,M]f(x)=b(x)\cdot Mf(x)-M(bf)(x).$$

定义 4　给定齐次树上的一个分割 D，与 D 相关的极大局部算子定义为

$$M_Df(x)=\sup_{x\in D_{m,n}\subset D}\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{y\in D_{m,n}}|f(y)|\cdot\mu_\alpha(y).$$

定义 5　设 $0<B\leqslant1$，$r\geqslant1$，分数次极大算子 M_{B,r,μ_α} 定义为

$$M_{B,r,\mu_\alpha}=\sup_{x\in D_{m,n}}\left(\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})^B}\sum_{y\in D_{m,n}}|f(y)|^r\cdot\mu_\alpha(y)\right)^{1/r}.$$

当 $B=1$，$r=1$ 时，分数次极大算子 M_{B,r,μ_α} 即为极大算子 M.

引理 2　设 $b\in\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}$，则存在常数 $C>0$，使得对任意的 $D_{m,n}\subseteq X$，$x\in D_{m,n}$，有下式成立：

$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{y\in D_{m,n}}|f(y)|\cdot\mu_\alpha(y)\leqslant\mu_\alpha(D_{m,n})^{B-1}\cdot M_{B,1,\mu_\alpha}f(x),\tag{1}$$

$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{y\in D_{m,n}}|b(y)-b_{D_{m,n}}|\cdot|f(y)|\cdot\mu_\alpha(y)\leqslant C\cdot\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}}\cdot\mu_\alpha(D_{m,n})^{B-1}\cdot M_{B,1,\mu_\alpha}f(x).\tag{2}$$

证明：因为

$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{y\in D_{m,n}}|f(y)|\cdot\mu_\alpha(y)=\mu_\alpha(D_{m,n})^{B-1}\cdot\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})^B}\sum_{y\in D_{m,n}}|f(y)|\cdot\mu_\alpha(y)\leqslant$$
$$\mu_\alpha(D_{m,n})^{B-1}\cdot M_{B,1,\mu_\alpha}f(x),$$

所以式(1)成立. 又因为

$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{y\in D_{m,n}}|b(y)-b_{D_{m,n}}|\cdot|f(y)|\cdot\mu_\alpha(y)\leqslant C\cdot\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}}\cdot\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{y\in D_{m,n}}|f(y)|\cdot\mu_\alpha(y)\leqslant$$
$$C\cdot\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}}\cdot\mu_\alpha(D_{m,n})^{B-1}\cdot M_{B,1,\mu_\alpha}f(x),$$

所以式(2)成立.

引理 3　设 $b\in\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}$，则存在常数 $C>0$，使得对任意的 $D_{m,n}\subseteq X$，$x\in D_{m,n}$，有下式成立：

$$M_bf(x)\leqslant C\cdot\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}}\cdot\mu_\alpha(D_{m,n})^{B-1}\cdot M_{B,1,\mu_\alpha}f(x).\tag{3}$$

证明：由引理 2 知，

$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{y\in D_{m,n}}|b(x)-b(y)|\cdot|f(y)|\cdot\mu_\alpha(y)\leqslant|b(x)-b_{D_{m,n}}|\cdot\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{y\in D_{m,n}}|f(y)|\cdot\mu_\alpha(y)+$$

$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{y\in D_{m,n}}|b(y)-b_{D_{m,n}}|\cdot|f(y)|\cdot\mu_\alpha(y)\leqslant$$
$$C\cdot\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}}\cdot\mu_\alpha(D_{m,n})^{B-1}\cdot M_{B,1,\mu_\alpha}f(x).$$

引理4 设 $0<B\leqslant 1$，对任意的 $1<p<\dfrac{1}{1-B}$，令 $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-(1-B)$，则 $M_{B,1,\mu_\alpha}$ 是 $L^p(\mu_\alpha)\to L^q(\mu_\alpha)$ 有界的.

证明：固定任意的分割 $D_{m,n}\subseteq X$，由 Hölder 不等式有

$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})^B}\sum_{x\in D_{m,n}}|f(x)|\cdot\mu_\alpha(x)=\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})^B}\sum_{x\in D_{m,n}}|f(x)|\cdot\mu_\alpha(x)^{1-B}\cdot\mu_\alpha(x)^B\leqslant$$
$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})^B}\Big(\sum_{x\in D_{m,n}}|f(x)|^{1/(1-B)}\cdot\mu_\alpha(x)\Big)^{1-B}\cdot\Big(\sum_{x\in D_{m,n}}\mu_\alpha(x)^{B\cdot 1/B}\Big)^B\leqslant C\cdot\|f\|_{L^{1/(1-B)}(\mu_\alpha)}.$$

令 $\{x: M_{B,1,\mu_\alpha}f(x)>\lambda\}=\bigcup\limits_j D_j$，$D_j\subseteq X$ 且 $D_j\cap D_i=\varnothing$，并当 $i\neq j$ 时，满足

$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_j)^B}\sum_{x\in D_j}|f(x)|\cdot\mu_\alpha(x)>\lambda.$$

因此

$$\mu_\alpha(\{x: M_{B,1,\mu_\alpha}f(x)>\lambda\})=\sum_j\mu_\alpha(D_j)\leqslant\sum_j\left(\frac{1}{\lambda}\cdot\sum_{x\in D_j}|f(x)|\cdot\mu_\alpha(x)\right)^{1/B}\leqslant$$
$$\left(\sum_j\frac{1}{\lambda}\cdot\sum_{x\in D_j}|f(x)|\cdot\mu_\alpha(x)\right)^{1/B}\leqslant\left(\frac{1}{\lambda}\cdot\|f\|_{L^1(\mu_\alpha)}\right)^{1/B}.$$

故 $M_{B,1,\mu_\alpha}$ 是弱 $\left(1,\dfrac{1}{B}\right)$ 型，由插值定理可知：存在常数 $C>0$，使得

$$\|M_{B,1,\mu_\alpha}\|_{L^q(\mu_\alpha)}\leqslant C\cdot\|f\|_{L^p(\mu_\alpha)}.$$

引理5 设 $b\in\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}$，对任意的分割 $D_{m,n}\subseteq X$，$x\in D_{m,n}$，有下式成立：

$$M(\chi_{D_{m,n}})(x)=\chi_{D_{m,n}}(x),\qquad M(b\chi_{D_{m,n}})(x)=M_{D_{m,n}}(b)(x).$$

证明：固定 $D_{m,n}\subseteq X$，$x\in D_{m,n}$，由齐次树的离散结构可知

$$M(\chi_{D_{m,n}})(x)=\sup_{x\in D'}\frac{1}{\mu_\alpha(D')}\sum_{y\in D'}|\chi_{D_{m,n}}(y)|\cdot\mu_\alpha(y)=$$
$$\begin{cases}\sup\limits_{x\in D'}\dfrac{1}{\mu_\alpha(D')}\sum\limits_{y\in D'}|\chi_{D_{m,n}}(y)|\cdot\mu_\alpha(y), & D'\subseteq D_{m,n},\\ \sup\limits_{x\in D'}\dfrac{1}{\mu_\alpha(D')}\sum\limits_{y\in D_{m,n}}|\chi_{D_{m,n}}(y)|\cdot\mu_\alpha(y), & D_{m,n}\subseteq D'.\end{cases}$$

当 $D'\subseteq D_{m,n}$ 时，有

$$M(\chi_{D_{m,n}})(x)=\frac{1}{\mu_\alpha(D')}\cdot\mu_\alpha(D')=1=\chi_{D_{m,n}}(x);$$

当 $D_{m,n}\subseteq D'$ 时，有

$$M(\chi_{D_{m,n}})(x)=\frac{\mu_\alpha(D_{m,n})}{\mu_\alpha(D')}<1.$$

综上有

$$M(\chi_{D_{m,n}})(x)=\chi_{D_{m,n}}(x),$$
$$M(b\chi_{D_{m,n}})(x)=\sup_{x\in D'}\frac{1}{\mu_\alpha(D')}\sum_{y\in D'}|b\chi_{D'}(y)|\cdot\mu_\alpha(y)=$$
$$\begin{cases}\sup\limits_{x\in D'}\dfrac{1}{\mu_\alpha(D')}\sum\limits_{y\in D'}|b(y)|\cdot\mu_\alpha(y), & D'\subseteq D_{m,n},\\ \sup\limits_{x\in D'}\dfrac{1}{\mu_\alpha(D')}\sum\limits_{y\in D_{m,n}}|b(y)|\cdot\mu_\alpha(y), & D_{m,n}\subseteq D'.\end{cases}$$

当 $D'\subseteq D_{m,n}$ 时，有

$$M(b\chi_{D_{m,n}})(x)\geqslant\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{y\in D_{m,n}}|b(y)|\cdot\mu_\alpha(y)\geqslant\sup_{x\in D'}\frac{1}{\mu_\alpha(D')}\sum_{y\in D}|b(y)|\cdot\mu_\alpha(y),$$

其中 $D\subseteq D'$. 综上有

$$M(b\chi_{D_{m,n}})(x)=M_{D_{m,n}}(b)(x).$$

引理 6　设 $b(x)$ 是任意的实函数，对任意的分割 $D_{m,n}$，令 $E=\{x\in D_{m,n},\ b(x)\leqslant b_{D_{m,n}}\}$，$F=\{x\in D_{m,n},\ b(x)>b_{D_{m,n}}\}$，则有下式成立：

$$\sum_{x\in E}|b(x)-b_{D_{m,n}}|\cdot\mu_\alpha(x)=\sum_{x\in F}|b(x)-b_{D_{m,n}}|\cdot\mu_\alpha(x).$$

证明：因为

$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{x\in D_{m,n}}b(x)\cdot\mu_\alpha(y)=b_{D_{m,n}},$$

所以

$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{x\in D_{m,n}}(b(x)-b_{D_{m,n}})\cdot\mu_\alpha(x)=0,$$

即

$$\sum_{x\in D_{m,n}}(b(x)-b_{D_{m,n}})\cdot\mu_\alpha(x)=\sum_{x\in E}(b(x)-b_{D_{m,n}})\cdot\mu_\alpha(x)+\sum_{x\in F}(b(x)-b_{D_{m,n}})\cdot\mu_\alpha(x)=0,$$

于是

$$\sum_{x\in E}|b(x)-b_{D_{m,n}}|\cdot\mu_\alpha(x)=\sum_{x\in F}|b(x)-b_{D_{m,n}}|\cdot\mu_\alpha(x).$$

2　主要结果

定理 1　设 $0<B\leqslant1$，$b(x)$ 是任意的实函数，对任意的 $1<p<\frac{1}{1-B}$，令 $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-(1-B)$，$k=q(1-B)+1$，则下列断言等价：

1) $b\in\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}$；

2) M_b 是 $L^p(\mu_\alpha)\to L^{\frac{q}{k}}(\mu_\alpha)$ 有界的.

证明：1)⇒2). 由引理 3、引理 4 和 Hölder 不等式可知

$$\begin{aligned}
\|M_bf(x)\|_{L^{q/k}(\mu_\alpha)}&=\Big(\sum_{x\in X}|M_bf(x)|^{q/k}\cdot\mu_\alpha(x)\Big)^{k/q}\leqslant\\
&C\cdot\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}}\cdot\mu_\alpha(D_{m,n})^{B-1}\cdot\Big(\sum_{x\in X}|M_{B,1,\mu_\alpha}f(x)|^{q/k}\cdot\mu_\alpha(x)\Big)^{k/q}\leqslant\\
&C\cdot\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}}\cdot\mu_\alpha(X)^{B-1}\cdot\Big(\sum_{x\in X}|M_{B,1,\mu_\alpha}f(x)|^{q/k}\cdot\mu_\alpha(x)^{1/k}\cdot\mu_\alpha(x)^{1-1/k}\Big)^{k/q}\leqslant\\
&C\cdot\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}}\cdot\mu_\alpha(X)^{B-1}\cdot\Big(\sum_{x\in X}|M_{B,1,\mu_\alpha}f(x)|^{q}\cdot\mu_\alpha(x)\Big)^{1/q}\cdot\\
&\Big(\sum_{x\in X}\mu_\alpha(x)^{(1-1/k)\cdot k'}\Big)^{k/(qk')}\leqslant\\
&C\cdot\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}}\cdot\|f\|_{L^p(\mu_\alpha)}\cdot\mu_\alpha(X)^{B-1}\cdot\mu_\alpha(X)^{(k-1)/q}\leqslant\\
&C\cdot\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}}\cdot\|f\|_{L^p(\mu_\alpha)},
\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$.

2)⇒1). 对任意的分割 $D_{m,n}$，有

$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{x\in D_{m,n}}|b(x)-b_{D_{m,n}}|\cdot\mu_\alpha(x)=\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{x\in D_{m,n}}\left|b(x)-\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{y\in D_{m,n}}b(y)\cdot\mu_\alpha(y)\right|\cdot\mu_\alpha(x)\leqslant$$

$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{x\in D_{m,n}}\left(\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{y\in D_{m,n}}|b(x)-b(y)|\cdot\mu_\alpha(y)\right)\cdot\mu_\alpha(x)=$$
$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{x\in D_{m,n}}\left(\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{y\in D_{m,n}}|b(x)-b(y)|\cdot\chi_{D_{m,n}}(y)\cdot\mu_\alpha(y)\right)\cdot\mu_\alpha(x)\leqslant$$
$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{x\in D_{m,n}}M_b(\chi_{D_{m,n}})(x)\cdot\mu_\alpha(x). \tag{4}$$

由于$\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-(1-B)$, $k=q(1-B)+1$, M_b 是$L^p(\mu_\alpha)\to L^{q/k}(\mu_\alpha)$有界的，因此由 Hölder 不等式可知

$$\begin{aligned}\sum_{x\in D_{m,n}}M_b(\chi_{D_{m,n}})(x)\cdot\mu_\alpha(x)&=\sum_{x\in D_{m,n}}M_b(\chi_{D_{m,n}})(x)\cdot\mu_\alpha(x)^{k/q}\cdot\mu_\alpha(x)^{1-k/q}\leqslant\\&\Big(\sum_{x\in D_{m,n}}|M_b(\chi_{D_{m,n}})(x)|^{q/k}\cdot\mu_\alpha(x)\Big)^{k/q}\cdot\Big(\sum_{x\in D_{m,n}}\mu_\alpha(x)\Big)^{(q-k)/q}\leqslant\\&C\cdot\|M_b(\chi_{D_{m,n}})\|_{L^{q/k}(\mu_\alpha)}\cdot\mu_\alpha(D_{m,n})^{(q-k)/q}\leqslant\\&C\cdot\|\chi_{D_{m,n}}\|_{L^p(\mu_\alpha)}\cdot\mu_\alpha(D_{m,n})^{(q-k)/q}\leqslant\\&C\cdot\mu_\alpha(D_{m,n})^{1/p+1-k/q}\leqslant C\cdot\mu_\alpha(D_{m,n}).\end{aligned}\tag{5}$$

由式(4),(5)可知

$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{x\in D_{m,n}}|b(x)-b_{D_{m,n}}|\cdot\mu_\alpha(x)\leqslant C.$$

从而存在常数 $C>0$ 与分割 $D_{m,n}$无关，使得 $b\in\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}$. 证毕.

定理 2 设 $0<B\leqslant1$, $b(x)$是任意的实函数，对任意的 $1<p<\dfrac{1}{1-B}$, 令$\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-(1-B)$, $k=q(1-B)+1$, 则下列断言等价：

1) $b\in\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}$；

2) $[b,M]$是 $L^p(\mu_\alpha)\to L^{q/k}(\mu_\alpha)$有界的；

3) 对任意的分割 $D_{m,n}$, 存在常数 $C>0$, 使得下式成立：

$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})^{1/p}}\Big(\sum_{x\in D_{m,n}}|b(x)-M_{D_{m,n}}(b)(x)|^{q/k}\cdot\mu_\alpha(x)\Big)^{k/q}\leqslant C.$$

证明：1)⇒2). 因为

$$[b,M]f(x)=b(x)Mf(x)-M(bf)(x)\leqslant M_bf(x),$$

又由定理 1 可知，M_b 是 $L^p(\mu_\alpha)\to L^{q/k}(\mu_\alpha)$有界的，所以$[b,M]$是 $L^p(\mu_\alpha)\to L^{q/k}(\mu_\alpha)$有界的.

2)⇒3). 由引理 5 及$[b,M]$是 $L^p(\mu_\alpha)\to L^{q/k}(\mu_\alpha)$有界可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})^{1/p}}\Big(\sum_{x\in D_{m,n}}|b(x)-M_{D_{m,n}}(b)(x)|^{q/k}\cdot\mu_\alpha(x)\Big)^{k/q}&=\\\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})^{1/p}}\Big(\sum_{x\in D_{m,n}}|b(x)\cdot M(\chi_{D_{m,n}})(x)-M(b\chi_{D_{m,n}})(x)|^{q/k}\cdot\mu_\alpha(x)\Big)^{k/q}&=\\\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})^{1/p}}\Big(\sum_{x\in D_{m,n}}|[b,M](\chi_{D_{m,n}})|^{q/k}\cdot\mu_\alpha(x)\Big)^{k/q}&\leqslant\\\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})^{1/p}}\cdot\|[b,M](\chi_{D_{m,n}})\|_{L^{q/k}(\mu_\alpha)}\leqslant C\cdot\mu_\alpha(D_{m,n})^{-1/p}\cdot\|\chi_{D_{m,n}}\|_{L^p(\mu_\alpha)}&\leqslant C.\end{aligned}$$

3)⇒1). 对任意的分割 $D_{m,n}$, 设 $E=\{x\in D_{m,n}, b(x)\leqslant b_{D_{m,n}}\}$, $F=\{x\in D_{m,n}, b(x)>b_{D_{m,n}}\}$, 对任意的 $x\in E$, 有 $b(x)\leqslant b_{D_{m,n}}\leqslant M_{D_{m,n}}(b)(x)$, 故

$$|b(x)-b_{D_{m,n}}|\leqslant|b(x)-M_{D_{m,n}}(b)(x)|,\qquad x\in E.$$

由引理 6 可知，

$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{x\in D_{m,n}}|b(x)-b_{D_{m,n}}|\cdot\mu_\alpha(x)=\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{x\in E\cup F}|b(x)-b_{D_{m,n}}|\cdot\mu_\alpha(x)=$$

$$\frac{2}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{x\in E}\left|b(x)-b_{D_{m,n}}\right|\cdot\mu_\alpha(x)\leqslant\frac{2}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{x\in E}\left|b(x)-M_{D_{m,n}}(b)(x)\right|\cdot\mu_\alpha(x).\quad(6)$$

由 Hölder 不等式和断言(3)可知，

$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{x\in E}\left|b(x)-M_{D_{m,n}}(b)(x)\right|\cdot\mu_\alpha(x)\leqslant\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\cdot\mu_\alpha(D_{m,n})^{-1/p}\cdot$$
$$\Big(\sum_{x\in E}\left|b(x)-M_{D_{m,n}}(b)(x)\right|^{q/k}\cdot\mu_\alpha(x)\Big)^{k/q}\cdot\mu_\alpha(D_{m,n})^{(q-k)/q}\cdot\mu_\alpha(D_{m,n})^{1/p}\leqslant$$
$$C\cdot\mu_\alpha(D_{m,n})^{-k/q+1/p}=C.\quad(7)$$

由式(6),(7)可知，存在与分割 $D_{m,n}$ 无关的常数 $C>0$，使得

$$\frac{1}{\mu_\alpha(D_{m,n})}\sum_{x\in D_{m,n}}\left|b(x)-b_{D_{m,n}}\right|\cdot\mu_\alpha(x)\leqslant C.$$

因此 $b\in\mathrm{BMO}_{\mu_\alpha}$. 证毕.

参　考　文　献

[1] COIFMAN R R, ROCHBERG R, WEISS G. Factorization Theorems for Hardy Spaces in Several Variables [J]. Annals of Mathematics, 1976, 103(3): 611-635.

[2] MILMAN M, SCHONBEK T. Second Order Estimates in Interpolation Theory and Applications [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1990, 110(4): 961-969.

[3] BASTERO J, MILMAN M, RUIZ F J. Commutators for the Maximal and Sharp Functions [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2000, 128(11): 3329-3334.

[4] XIE C P. Some Estimates of Commutators [J]. Real Analysis Exchange, 2011, 36(2): 405-415.

[5] DIENING L. Maximal Function on Musielak-Orlicz Spaces and Generalized Lebesgue Spaces [J]. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2005, 129(8): 657-700.

[6] ALMEIDA A, HASANOV J, SAMKO S. Maximal and Potential Operators in Variable Exponent Morrey Space [J]. Georgian Mathematical Journal, 2008, 15(2): 195-208.

[7] LEVI M, SANTAGATI F, TABACCO A, et al. Analysis on Trees with Nondoubling Flow Measures [J]. Potential Analysis, 2023, 58: 731-759.

[8] MONTI M. H^1 and BMO Spaces for Exponentially Decreasing Measures on Homogeneous Trees [J/OL]. (2023-01-18)[2023-11-01]. https://www.researchgate.net/publication/367251358.

[9] ARDITTI L, TABACCO A, VALLARINO M. BMO Spaces on Weighted Homogeneous Trees [J]. The Journal of Geometric Analysis, 2021, 31(9): 8832-8849.

[10] MUTHUKUMAR P, PONNUSAMY S. Composition Operators on Hardy Spaces of the Homogenous Rooted Trees [J]. Monatshefte für Mathematik, 2020, 192(3): 721-743.

[11] COHEN J M, COLONNA F, PICARDELLO M A, et al. Carleson Measures for Non-negative Subharmonic Functions on Homogeneous Trees [J]. Potential Analysis, 2020, 52(1): 41-67.

[12] SANTAGATI F. Hardy Spaces on Homogeneous Trees with Flow Measures [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2022, 510(2): 126015-1-126015-23.

[13] DE MARI F, MONTI M, VALLARINO M. Harmonic Bergman Projectors on Homogeneous Trees [J/OL]. Potential Analysis, (2023-10-13)[2023-11-01]. https://doi.org/10.1007/s11118-023-10106-4.

（责任编辑：赵立芹）