doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023476

相对于对偶对的 Cartan-Eilenberg 复形

关佳瑷，卢　博
（西北民族大学 数学与计算机科学学院，兰州 730030）

摘要：设 $(\mathscr{A},\mathscr{B})$ 是模范畴中的对偶对. 首先，引入 Cartan-Eilenberg-$\mathscr{A}$ 复形和 Cartan-Eilenberg-$\mathscr{B}$ 复形的概念；其次，证明 (C-E$(\mathscr{A})$,C-E$(\mathscr{B})$) 是复形范畴中的对偶对，其中 C-E$(\mathscr{A})$,C-E$(\mathscr{B})$ 分别表示所有 Cartan-Eilenberg-$\mathscr{A}$ 复形和Cartan-Eilenberg-$\mathscr{B}$ 复形构成的类；最后，给出对偶对在复形上的应用.

关键词：对偶对；Cartan-Eilenberg-$\mathscr{A}$ 复形；Cartan-Eilenberg-$\mathscr{B}$ 复形
中图分类号：O154.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5489(2024)04-0787-06

Cartan-Eilenberg Complexes Relative to Duality Pairs

GUAN Jia'ai, LU Bo
(*College of Mathematics and Computer Science, Northwest Minzu University, Lanzhou* 730030, *China*)

Abstract: Let $(\mathscr{A},\mathscr{B})$ be a duality pair in the category of modules. Firstly, the concepts of Cartan-Eilenberg-$\mathscr{A}$ and Cartan-Eilenberg-$\mathscr{B}$ complexes are introduced. Secondly, it is proven that (C-E$(\mathscr{A})$,C-E$(\mathscr{B})$) is a duality pair in the category of complexes, where C-E$(\mathscr{A})$ and C-E$(\mathscr{B})$ denote the class of Cartan-Eilenberg-$\mathscr{A}$ complexes and Cartan-Eilenberg-$\mathscr{B}$ complexes, respectively. Finally, the application of duality pairs to complexes is given.

Keywords: duality pair; Cartan-Eilenberg-$\mathscr{A}$ complex; Cartan-Eilenberg-$\mathscr{B}$ complex

1　引言与预备知识

Holm 等[1]在模范畴中引入了对偶对的概念. 对偶对与纯性、覆盖和包络的存在性以及完备余挠对的存在性均有密切联系. 文献[2]研究表明，模范畴中存在许多对偶对. 特别地，平坦模类和内射模类构成一对偶对. Cartan 和 Eilenberg[3]讨论了模的复形的投射分解和内射分解；Verdier[4]将复形的这两种分解分别称为复形的 Cartan-Eilenberg(C-E)投射分解和 Cartan-Eilenberg 内射分解，并引入了C-E-内射复形和 C-E-投射复形的概念；Enochs[5]进一步研究了 C-E-投射复形、C-E-内射复形以及C-E-平坦复形，并证明了每个复形都有 C-E-投射预覆盖、C-E-内射包络和 C-E-平坦覆盖，且复形的C-E-投射(C-E-内射)分解即为由复形的 C-E-投射预覆盖(C-E-内射包络)给出的复形的 C-E 正合序列. 投射覆盖和内射包络是经典同调代数中的重要内容，每个模都有投射预覆盖和内射包络. 而模的预覆盖和预包络[6]构成相对同调代数的重要内容. 受上述研究工作的启发，本文讨论复形中预覆盖和预包络与对偶对之间的关系.

收稿日期：2023-11-07.
第一作者简介：关佳瑷(2001—)，女，汉族，硕士研究生，从事同调代数的研究，E-mail：y221530316@stu.xbmu.edu.cn. **通信作者简介**：卢　博(1985—)，男，汉族，博士，教授，从事同调代数的研究，E-mail：lubo55@126.com.
基金项目：国家自然科学基金(批准号：12061061)、中央高校基本科研业务费专项基金(批准号：31920230173)和甘肃省第一批陇原青年英才项目.

设 $\mathscr{A}$ 是一左 R-模类，$\mathscr{B}$ 是一右 R-模类. 定义

$$\mathscr{A}^{\perp}=\{M \mid \mathrm{Ext}_R^1(A,M)=0,\ \forall A\in\mathscr{A}\},$$
$$^{\perp}\mathscr{A}=\{N \mid \mathrm{Ext}_R^1(N,A)=0,\ \forall A\in\mathscr{A}\}.$$

若 $\mathscr{A}^{\perp}=\mathscr{B}$，$^{\perp}\mathscr{B}=\mathscr{A}$，则称$(\mathscr{A},\mathscr{B})$是余挠对. 如果对任意模 M，$A,A'\in\mathscr{A}$，$B,B'\in\mathscr{B}$，存在正合列 $0\to M\to B\to A\to 0$ 和 $0\to B'\to A'\to M\to 0$，则称余挠对$(\mathscr{A},\mathscr{B})$是完备的. 如果任意模都有 $\mathscr{A}$-覆盖和 $\mathscr{B}$-包络，则称余挠对$(\mathscr{A},\mathscr{B})$是完全的. 由定义可知，完全余挠对是完备的，反之一般不成立. 用 M^+ 表示R-模M 的示性模，即 $M^+=\mathrm{Hom}_R(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. 如果 $A\in\mathscr{A}$，且对任意模 $A'\in\mathscr{A}$，诱导的同态 $\mathrm{Hom}_R(A',f)$：$\mathrm{Hom}_R(A',A)\to\mathrm{Hom}_R(A',M)$是满同态，则称同态 f：$A\to M$ 是 M 的 $\mathscr{A}$-预覆盖. 如果对任意自同态 g：$A\to A$，使得 $fg=f$ 是自同构，则称 M 的 $\mathscr{A}$-预覆盖 f：$A\to M$ 是$\mathscr{A}$-覆盖. 如果任意模都有一个 $\mathscr{A}$-预覆盖(覆盖)，则称模类 $\mathscr{A}$ 是预覆盖类(覆盖类). 对偶地，可定义 M 的 $\mathscr{A}$-预包络(包络)和 $\mathscr{A}$-预包络类(包络类).

定义 1[1] 设 $\mathscr{X}$是左 R-模类，$\mathscr{Y}$是右 R-模类. 如果$(\mathscr{X},\mathscr{Y})$满足下列条件：

1) $X\in\mathscr{X}$当且仅当 $X^+\in\mathscr{Y}$；

2) $\mathscr{Y}$关于直和项和有限直和封闭.

则称$(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是模范畴中的对偶对.

如果正则模${}_RR\in\mathscr{X}$，且 $\mathscr{X}$关于直和和扩张封闭，则称对偶对$(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是完全的[2].

引理 1[1] 设$(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是对偶对，则下列结论成立：

1) $\mathscr{X}$关于纯子模、纯商模和纯扩张封闭；

2) 若$(\mathscr{X},\mathscr{Y})$是完全的，则$(\mathscr{X},\mathscr{X}^{\perp})$是一个完全余挠对.

将 R-模的复形

$$\cdots\xrightarrow{\delta_2}C_1\xrightarrow{\delta_1}C_0\xrightarrow{\delta_0}C_{-1}\xrightarrow{\delta_{-1}}\cdots$$

记为(C,δ)，简记为C. $\mathrm{Ker}(\delta_n)$称为复形C 的第n 个循环，记作 $\mathrm{Z}_n(C)$. $\mathrm{Im}(\delta_{n+1})$称为复形$C$ 的第n 个边缘，记作 $\mathrm{B}_n(C)$. 将 $\mathrm{H}_n(C)=\mathrm{Z}_n(C)/\mathrm{B}_n(C)$记为复形 C 的第n 个同调模. $\mathrm{Z}(C)$，$\mathrm{B}(C)$，$\mathrm{H}(C)$分别表示 C 的循环、边缘、同调复形. 如果$\forall n\in\mathbb{Z}$，$\mathrm{H}_n(C)=0$，则称复形 C 是正合的. $\mathscr{C}(R\text{-Mod})$为左 R-模的复形构成的范畴. 对任意的复形 $X\in\mathscr{C}(R\text{-Mod})$，$X$ 的 n 次平移记为 Σ^nX，其中$(\Sigma^nX)_k=X_{k-n}$且 $\delta_k^{\Sigma^nX}=(-1)^n\delta_{k-n}^X$，并将 Σ^1X 简记为ΣX.

本文用右上标和右下标区分复形和模. 例如，若$\{C^i\}_{i\in I}$是一簇复形，则 C^i 表示为

$$C^i:=\cdots\xrightarrow{\delta_2}C_1^i\xrightarrow{\delta_1}C_0^i\xrightarrow{\delta_0}C_{-1}^i\xrightarrow{\delta_{-1}}\cdots.$$

给定一个左 R-模M，用记号 $\overline{M}$ 表示复形

$$\cdots\to 0\to M\xrightarrow{\mathrm{id}}M\to 0\to\cdots,$$

其中 M 位于第0和-1的位置；用记号 $\underline{M}$ 表示复形

$$\cdots\to 0\to M\to 0\to 0\to\cdots,$$

其中 M 位于第0的位置，其他位置均为0.

设 C 和 D 是R-模的复形. 用 $\mathrm{Hom}_R(C,D)$表示 Abel 群的复形，其中第n 层的 Abel 群为

$$\mathrm{Hom}_R(C,D)_n=\prod_{t\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_R(C_t,D_{n+t}),$$

且对 $f\in\mathrm{Hom}_R(C,D)_n$，

$$(d_n(f))_t=d_{t+n}^Df_t-(-1)^nf_{t-1}d_t^C,$$

其中 f_t：$C_t\to D_{n+t}$. 用 $\mathrm{Hom}(C,D)$表示从 C 到 D 态射的 Abel 群，Ext^i 中 $i\geqslant 0$ 表示由 Hom 的右导出函子得到的群.

设 X，Y 是复形. 令 $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)=\mathrm{Z}(\mathrm{Hom}(X,Y))$，则 $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$构成复形，其中 $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)^m=\mathrm{Z}^m(\mathrm{Hom}(X,Y))$，且边缘算子定义为

$$\delta^m(f):X\to Y[m+1],\quad \delta^m(f)^n=(-1)^m\delta_Yf^n,\quad \forall n\in\mathbb{Z},\quad \forall f\in\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)^m.$$

复形 X 的示性为
$$X^{+}=\underline{\mathrm{Hom}}(X,\overline{Q/Z})=\mathrm{Z}(\mathrm{Hom}_R(X,\overline{Q/Z})).$$
设 $\mathscr{X}$ 是左 R-模复形构成的类，$\mathscr{Y}$ 是右 R-模复形构成的类，$\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$ 关于同构是封闭的.

定义 2[7]　如果($\mathscr{X}$,$\mathscr{Y}$)满足下列条件：

1) 复形 $X\in\mathscr{X}$ 当且仅当 $X^{+}\in\mathscr{Y}$;

2) 复形 $\mathscr{Y}$ 关于直和项和有限直和封闭.

则称($\mathscr{X}$,$\mathscr{D}$)是复形范畴上的对偶对.

如果 $\mathscr{X}$ 在所有复形范畴中关于直积(余积)封闭，则称($\mathscr{X}$,$\mathscr{D}$)关于直积(余积)封闭. 如果 $\mathscr{X}$ 关于扩张封闭，复形 $\bar{R}$ 属于 $\mathscr{X}$，则称($\mathscr{X}$,$\mathscr{D}$)是完全的.

定义 3[5]　如果复形的序列
$$\cdots\to C^{-1}\to C^{0}\to C^{1}\to\cdots$$
满足下列条件：

1) $\cdots\to C^{-1}\to C^{0}\to C^{1}\to\cdots$;

2) $\cdots\to \mathrm{Z}(C^{-1})\to \mathrm{Z}(C^{0})\to \mathrm{Z}(C^{1})\to\cdots$;

3) $\cdots\to \mathrm{B}(C^{-1})\to \mathrm{B}(C^{-1})\to \mathrm{B}(C^{1})\to\cdots$;

4) $\cdots\to C^{-1}/\mathrm{Z}(C^{-1})\to C^{0}/\mathrm{Z}(C^{0})\to C^{1}/\mathrm{Z}(C^{1})\to\cdots$;

5) $\cdots\to C^{-1}/\mathrm{B}(C^{-1})\to C^{0}/\mathrm{B}(C^{-1})\to C^{1}/\mathrm{B}(C^{1})\to\cdots$;

6) $\cdots\to \mathrm{H}(C^{-1})\to \mathrm{H}(C^{0})\to \mathrm{H}(C^{1})\to\cdots$.

其中 1)～6)都是正合的，则称该复形序列是 C-E 正合的.

2　主要结果

对于环 R，本文用 R-Proj 表示投射左R-模的范畴，类似地，R-Inj 和 R-Flat 分别表示内射左 R-模的范畴和平坦左 R-模的范畴. 用 $\mathscr{C}(R\text{-Inj})$表示每个层次都是内射模的复形范畴.

定义 4[5]　如果 $I,\mathrm{Z}(I),\mathrm{B}(I),\mathrm{H}(I)\in\mathscr{C}(R\text{-Inj})$，则称复形 I 是 C-E-内射复形. 如果 $F,\mathrm{Z}(F),\mathrm{B}(F),\mathrm{H}(F)\in\mathscr{C}(R\text{-Flat})$，则称复数 F 是 C-E-平坦复形.

定义 5[8]　设 R 是左强 $\mathscr{X}$-凝聚环，对任意的正合序列 $0\to K\to P\to X\to 0$，如果 $X\in\mathscr{X}$，$\mathscr{X}$ 是有限表示左 R-模类，P 是有限生成投射的，则称 K 是 $\mathscr{X}$-投射的.

下面用 R-Gorflat 表示 Gorenstein 平坦左 R-模类.

引理 2[9]　设 R 是右凝聚环，G 是 $\mathscr{C}(R\text{-Mod})$中的复形，则下列叙述等价：

1) $G,G/\mathrm{B}(G)\in\mathscr{C}(R\text{-GorFlat})$;

2) G 是 C-E-Gorenstein 平坦复形.

引理 3[5]　设复形 $G\in\mathscr{C}(R\text{-Mod})$，则下列叙述等价：

1) G 使得 $\mathrm{B}(G),\mathrm{H}(G)\in\mathscr{C}(R\text{-GorInj})$;

2) G 是 C-E-Gorenstein 内射复形.

引理 4[10]　设 R 是强 $\mathscr{X}$-凝聚环，则对任意的 $C\in\mathscr{C}(R^{\mathrm{op}}\text{-Mod})$，下列叙述等价：

1) C 是 C-E-$\mathscr{X}$-平坦复形；

2) 对任意的 $i\in\mathbb{Z}$，$C_i,C_i/\mathrm{B}_i(C)$是 $\mathscr{X}$-平坦模.

引理 5[10]　若 R 是强 $\mathscr{X}$-凝聚环，则下列叙述等价：

1) C 是 C-E-$\mathscr{X}$-内射复形；

2) 对任意的 $i\in\mathbb{Z}$，$C_i,\mathrm{Z}_i(C)$是 $\mathscr{X}$-内射模.

定义 6　设($\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$)是模范畴上的对偶对，X 是复形，$n\in\mathbb{Z}$.

1) 如果 X_n 和 $X_n/\mathrm{B}_n(X)$属于 $\mathscr{A}$，则 X 称为 Carten-Eilenberg-$\mathscr{A}$ 复形，简称为 C-E-$\mathscr{A}$ 复形；

2) 如果 X_n 和 $\mathrm{Z}_n(X)$属于 $\mathscr{B}$，则 X 称为 Carten-Eilenberg-$\mathscr{B}$ 复形，简称为 C-E-$\mathscr{B}$ 复形.

本文用 C-E($\mathscr{A}$)表示 C-E-$\mathscr{A}$ 复形所构成的类，用 C-E($\mathscr{B}$)表示 C-E-$\mathscr{B}$ 复形所构成的类.

注1 当$\mathscr{A}$是平坦左R-模类时，C-E-$\mathscr{A}$复形是C-E-平坦复形. 当$\mathscr{B}$是内射右R-模类时，C-E-$\mathscr{B}$复形是C-E-内射复形. 用C-E(Flat)和C-E(Inj)分别表示C-E-平坦复形和C-E-内射复形构成的类，这里C-E-平坦(内射)复形与定义4中的C-E-平坦(内射)复形一致.

注2 当$\mathscr{A}$是Gorenstein平坦左R-模类时，C-E-$\mathscr{A}$复形是C-E-Gorenstein平坦复形. 当$\mathscr{B}$是Gorenstein内射右R-模类时，C-E-$\mathscr{B}$复形是C-E-Gorenstein内射复形. 用C-E(GorFlat)和C-E(GorInj)分别表示C-E-Gorenstein平坦复形和C-E-Gorenstein内射复形构成的类，这里C-E-Gorenstein平坦(内射)复形与引理2和引理3的C-E-Gorenstein平坦(内射)复形一致.

注3 当$\mathscr{A}$是$\mathscr{X}$-平坦左R-模类时，C-E-$\mathscr{A}$复形是C-E-$\mathscr{X}$-平坦复形. 当$\mathscr{B}$是$\mathscr{X}$-内射右R-模类时，C-E-$\mathscr{B}$复形是C-E-$\mathscr{X}$-内射复形. 用C-E($\mathscr{X}$Flat)和C-E($\mathscr{X}$Inj)分别表示C-E-$\mathscr{X}$-平坦复形和C-E-$\mathscr{X}$-内射复形构成的类，这里C-E-$\mathscr{X}$-平坦(内射)复形与引理4和引理5中定义的C-E-$\mathscr{X}$-平坦(内射)复形一致.

定理1 若$(\mathscr{A},\mathscr{B})$是模范畴中的对偶对，则(C-E($\mathscr{A}$),C-E($\mathscr{B}$))是复形范畴中的对偶对.

证明：设X是复形，由文献[11]中命题4.4.10可知，复形X的示性可表示为

$$X^{+}:=\cdots\rightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{-n-1},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\xrightarrow{d_{n}^{X^{+}}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{-n},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\xrightarrow{d_{n+1}^{X^{+}}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{-n+1},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\rightarrow\cdots,$$

其边缘算子的公式为

$$d_{n}^{X^{+}}=(-1)^{n-1}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(d_{-n}^{X},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

若X是C-E($\mathscr{A}$)复形，则由定义知X_n和$X_n/\mathrm{B}_n(X)$属于$\mathscr{A}$. 又因为$(\mathscr{A},\mathscr{B})$是模范畴中的对偶对，所以$(X_n)^{+}$和$(X_n/\mathrm{B}_n(X))^{+}$属于$\mathscr{B}$. 由于$(X^{+})^{-n}=(X_n)^{+}$，因此$(X^{+})^{n}\in\mathscr{B}$. 根据文献[9]中引理2.2可知

$$(X_n/\mathrm{B}_n(X))^{+}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_n/\mathrm{B}_n(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\cong\mathrm{Z}^{-n}(X^{+}),$$

因此$\mathrm{Z}^{n}(X^{+})\in\mathscr{B}$.

当X^{+}是C-E($\mathscr{B}$)复形时，由定义知$(X^{+})^{n}$和$\mathrm{Z}^{n}(X^{+})$属于$\mathscr{B}$. 由于$(X^{+})^{n}=(X_{-n})^{+}$，因此$(X_{-n})^{+}\in\mathscr{B}$，由模范畴中对偶对的定义可知$X_n\in\mathscr{A}$. 根据文献[9]中引理2.2可知，

$$\mathrm{Z}^{n}(X^{+})\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{-n}/\mathrm{B}_{-n}(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=(X_{-n}/\mathrm{B}_{-n}(X))^{+}.$$

又因为$(X_{-n}/\mathrm{B}_{-n}(X))^{+}\in\mathscr{B}$，所以$X_n/\mathrm{B}_n(X)\in\mathscr{A}$.

设A,B,C是复形，且$A\oplus B=C$. 设$C\in$C-E($\mathscr{B}$)，则

$$C_n=A_n\oplus B_n\in\mathscr{B},\qquad \mathrm{Z}_n(C)=\mathrm{Z}_n(A\oplus B)=\mathrm{Z}_n(A)\oplus\mathrm{Z}_n(B)\in\mathscr{B}.$$

因为$\mathscr{B}$关于直和项封闭，所以$A_n,B_n\in\mathscr{B}$，$\mathrm{Z}_n(A),\mathrm{Z}_n(B)\in\mathscr{B}$. 综上可知$A,B\in$C-E($\mathscr{B}$)，C-E($\mathscr{B}$)关于直和项封闭.

设$\{A^{i}\}_{i\in I}$是一簇C-E($\mathscr{B}$)复形，其中$I=1,2,\cdots,n$，记$A=A^{1}\oplus A^{2}\oplus\cdots\oplus A^{n}$. 则有$A_n^1,A_n^2,\cdots,A_n^n\in\mathscr{B}$，$\mathrm{Z}_n(A^1),\mathrm{Z}_n(A^2),\mathrm{Z}_n(A^n)\in\mathscr{B}$. 因为$\mathscr{B}$关于有限直和封闭，所以

$$A_n=A_n^1\oplus A_n^2\oplus\cdots\oplus A_n^n\in\mathscr{B},$$

$$\mathrm{Z}_n(A)=\mathrm{Z}_n(A^1\oplus A^2\oplus\cdots\oplus A^n)=\mathrm{Z}_n(A^1)\oplus\mathrm{Z}_n(A^2)\oplus\cdots\oplus\mathrm{Z}_n(A^n)\in\mathscr{B}.$$

综上可知$A\in$C-E($\mathscr{B}$)，C-E($\mathscr{B}$)关于有限直和封闭. 证毕.

由定理1可知，当$(\mathscr{A},\mathscr{B})$取特殊模类时有如下推论.

推论1 1)(C-E(Flat),C-E(Inj))是复形范畴中的对偶对；

2)在Gorensrein环上，(C-E(GorFlat),C-E(GorInj))是复形范畴中的对偶对；

3)在强$\mathscr{X}$-凝聚环上，(C-E($\mathscr{X}$Flat),C-E($\mathscr{X}$Inj))是复形范畴中的对偶对.

命题1 设$(\mathscr{A},\mathscr{B})$是复形范畴上的对偶对，则$\mathscr{A}$关于纯子复形、纯商复形、纯扩张封闭. 此外，下列结论成立：

1)若$(\mathscr{A},\mathscr{B})$关于直积封闭，则$\mathscr{A}$是预包络类；

2)若$(\mathscr{A},\mathscr{B})$关于直和封闭，则$\mathscr{A}$是覆盖类；

3)若$(\mathscr{A},\mathscr{B})$是完全的对偶对，则$(\mathscr{A},\mathscr{B}^{\perp})$是完全的余挠对.

证明：利用定理1，类似文献[7]中定理3.2的证明可得结论.

由命题 1 可得下列推论.

推论 2　C-E(Flat)关于纯子复形、纯商复形、纯扩张封闭，则下列结论成立：

1) 若(C-E(Flat),C-E(Inj))关于直积封闭，则 C-E(Flat)是预包络类；

2) 若(C-E(Flat),C-E(Inj))关于直和封闭，则 C-E(Flat)是覆盖类；

3) 若(C-E(Flat),C-E(Inj))是完全的对偶对，则(C-E(Flat),C-E(Inj)$^{\perp}$)是完全的余挠对.

推论 3　在 Gorenstein 环上，C-E(GorFlat)关于纯子复形、纯商复形、纯扩张封闭，则下列结论成立：

1) 若(C-E(GorFlat),C-E(GorInj))关于直积封闭，则(C-E(GorFlat)是预包络类；

2) 若(C-E(GorFlat),C-E(GorInj))关于直和封闭，则(C-E(GorFlat)是覆盖类；

3) 若(C-E(GorFlat),C-E(GorInj))是完全的对偶对，则(C-E(GorFlat),C-E(GorInj)$^{\perp}$)是完全的余挠对.

推论 4　在强 $\mathscr{X}$-凝聚环上，C-E($\mathscr{X}$Flat)关于纯子复形、纯商复形、纯扩张封闭，则下列结论成立：

1) 若(C-E($\mathscr{X}$Flat),C-E($\mathscr{X}$Inj))关于直积封闭，则 C-E($\mathscr{X}$Flat)是预包络类；

2) 若(C-E($\mathscr{X}$Flat),C-E($\mathscr{X}$Inj))关于直和封闭，则 C-E($\mathscr{X}$Flat)是覆盖类；

3) 若(C-E($\mathscr{X}$Flat),C-E($\mathscr{X}$Inj))是完全的对偶对，则(C-E($\mathscr{X}$Flat),C-E($\mathscr{X}$Inj)$^{\perp}$)是完全的余挠对.

定理 2　设 X 是 $\mathscr{C}(R\text{-Mod})$中的一个复形.

1) 如果 f：$H\to X$ 是 X 的一个 C-E-Gorenstein 内射预覆盖，则对任意的 $n\in\mathbb{Z}$，f_n：$H_n\to X_n$ 是 X_n 的一个 Gorenstein 内射预覆盖；

2) 如果 g：$X\to U$ 是 X 的一个 C-E-Gorenstein 内射预包络，则对任意的 $n\in\mathbb{Z}$，g_n：$X_n\to U_n$ 是 X_n 的一个 Gorenstein 内射预包络.

证明：1) 设 E 是 Gorenstein 内射模，h：$E\to X_n$ 是模同态，则有复形范畴中的态射 $\bar{h}$：$\Sigma^n\bar{E}\to X$：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r]\arrow[d] & 0 \arrow[r]\arrow[d] & E \arrow[r, "\mathrm{id}"]\arrow[d, "h"'] & E \arrow[r]\arrow[d, "\delta_n^X h"'] & 0 \arrow[r]\arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X_{n+2} \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r] & X_n \arrow[r, "\delta_n^X"] & X_{n-1} \arrow[r] & X_{n-2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}.$$

因为 $\Sigma^n\bar{E}$ 是 C-E-Gorenstein 内射复形，所以存在态射 α：$\Sigma^n\bar{E}\to H$，使得 $f\alpha=\bar{h}$. 故有如下交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl, "\alpha_n"'] \arrow[d, "h"] \\
H_n \arrow[r, "f_n"] & X_n
\end{tikzcd}.$$

因此 f_n：$H_n\to X_n$ 是 X_n 的一个 Gorenstein 内射预覆盖.

2) 设 E 是 Gorenstein 内射模，φ：$X_n\to E$ 是模同态，则有复形范畴中的态射 $\bar{\varphi}$：$X\to\Sigma^{n+1}\bar{E}$：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_{n+3} \arrow[r]\arrow[d] & X_{n+2} \arrow[r]\arrow[d] & X_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}^X"]\arrow[d, "\varphi\delta_{n+1}^X"'] & X_n \arrow[r]\arrow[d, "\varphi"'] & X_{n-1} \arrow[r]\arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\mathrm{id}"] & E \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}.$$

因为 $\Sigma^{n+1}\bar{E}$ 是 C-E-Gorenstein 内射复形，所以存在态射 β: $U\to\Sigma^{n+1}\bar{E}$，使得 $\beta g=\bar{\varphi}$. 故有如下交换图：

$$\begin{tikzcd}
X_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\varphi"'] & U_n \\
E \arrow[ur, "\beta_n"'] &
\end{tikzcd}.$$

因此 g_n：$X_n\to U_n$ 是 X_n 的一个 Gorenstein 内射预包络.

定理 3　设 X 是 $\mathscr{C}(R^{\mathrm{op}}\text{-Mod})$中的一个复形.

1) 如果 f：$H\to X$ 是 X 的一个 C-E-Gorenstein 平坦预覆盖，则对任意的 $n\in\mathbb{Z}$，f_n：$H_n\to X_n$ 是 X_n 的一个 Gorenstein 平坦预覆盖；

2）如果 g：$X \to U$ 是 X 的一个 C-E-Gorenstein 平坦预包络，则对任意的 $n \in \mathbb{Z}$，g_n：$X_n \to U_n$ 是 X_n 的一个 Gorenstein 平坦预包络.

证明类似定理 2，故略.

参考文献

[1] HOLM H，JØRGENSEN P. Cotorsion Pairs Induced by Duality Pairs [J]. Journal of Commutative Algebra，2009，1(4)：621-633.

[2] GILLESPIE J. Duality Pairs and Stable Module Categories [J]. Journal of Pure and Applied Algebra，2019，223(8)：3425-3435.

[3] CARTAN H，EILENBERG S. Homological Agebra [M]. Princeton，NJ：Princeton University Press，1956：362-365.

[4] VERDIER J L. Des Catégories Dérivées Des Catégories Abéliennes [J]. Astérisque，1996，239：227-229.

[5] ENOCHS E E. Cartan-Eilenberg Complexes and Resolutions [J]. Journal of Algebra，2011，342：16-39.

[6] ENOCHS E E. Injective and Flat Covers，Envelopes and Resolvents [J]. Israel Journal of Mathematics，1981，39(3)：189-209.

[7] YANG X Y. Cotorsion Pairs of Complexes [C]//Proceedings of the International Conference on Algebra 2010. Hackensack，NJ：World Scientific Publishing Company，2012：697-703.

[8] ZHU Z M. Strongly $\mathscr{C}$-Coherent Rings [J]. Mathematical Reports，2017，19(4)：367-380.

[9] YANG G，LIANG L. Cartan-Eilenberg Gorenstein Flat Complexes [J]. Mathematica Scandinavica，2014，114(1)：5-25.

[10] 王亚丽. Cartan-Eilenberg $\mathscr{X}$-内射和 $\mathscr{X}$-平坦复形 [J]. 理论数学，2022，12(3)：354-367.（WANG Y L. Cartan-Eilenberg $\mathscr{X}$-Injective and $\mathscr{X}$-Flat Complexes [J]. Pure Mathematics，2022，12(3)：354-367.）

[11] BULLONES M A P. Introduction to Abelian Model Structures and Gorenstein Homological Dimensions [M]. Boca Raton：CRC Press，2016：77-91.

（责任编辑：李　琦）