

圈长为偶的单圈图(加权)Mostar 指标的下界

甄倩倩, 刘蒙蒙

(兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070)

摘要: 通过图变换, 给出当单圈图的圈长为偶数时其 Mostar 指标和加权 Mostar 指标的下界, 并刻画达到下界的极值图.

关键词: Mostar 指标; 加权 Mostar 指标; 单圈图; 极值图

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)04-0765-09

Lower Bounds for (Weighted) Mostar Index of Unicyclic Graphs with Even Cycle Lengths

ZHEN Qianqian, LIU Mengmeng

(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: By using graph transformation, we give the lower bounds for the Mostar index and the weighted Mostar index of unicyclic graphs when the cycle length of unicyclic graphs is even, and characterize the extremal graphs that achieve the lower bounds.

Keywords: Mostar index; weighted Mostar index; unicyclic graph; extremal graph

图的拓扑指标常用于描述有机化合物的药理特征、物理特征和化学特征, 研究最广泛的拓扑指标是 Wiener 指标^[1]. 此后, Gutman^[2]在 Wiener 指标的基础上进行推广, 得到了 Szeged 指标; Ilić等^[3]提出了加权 Szeged 指标; Došlić等^[4]引入了 Mostar 指标, 它量化了特定边及整个图周边性的程度. 目前, 对 Mostar 指标的研究, 特别是关于一些简单连通图界值问题的研究已得到很多结果^[4-11]. 例如: 文献[4]给出了单圈图 Mostar 指标的上界和下界; 文献[5]计算了固定直径时单圈图 Mostar 指标的上界; 文献[12]提出了边 Mostar 指标; 文献[13]定义了加权 Mostar 指标, 并计算了石墨烯、 α 型石墨炔和石墨炔的加权 Mostar 指标; 文献[14]计算了单圈图加权 Mostar 指标的上界和下界; Kandan等^[15]计算了锥齿轮图和广义齿轮图的加权 Mostar 指标; Imran等^[16]研究了酞菁、三嗪和纳米分子图的加权 Mostar 指标. 此外, 文献[17]总结了 Mostar 指标近年的研究成果. 本文在单圈图的圈长为偶数时, 讨论其 Mostar 指标和加权 Mostar 指标的下界.

1 预备知识

本文所有图均为无向有限的简单连通图. 给定一个图 G , 用 $V(G)$ 表示其顶点集, $E(G)$ 表示其边集, 令 $n = |V(G)|$ 是图 G 的顶点数, 又称阶数. T_n 和 P_n 分别指阶数为 n 的树和路^[18].

设 $e = uv$ 是 G 中的一条边, 定义集合:

收稿日期: 2023-11-09.

第一作者简介: 甄倩倩(1999—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事图论及其应用的研究, E-mail: zhenqianq1029@163.com. **通信作者简介:** 刘蒙蒙(1986—), 女, 汉族, 博士, 教授, 从事图论及其应用的研究, E-mail: liumm05@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11961040).

$$N_u(e) = \{x \in V(G) : d(x, u) < d(x, v)\},$$

$$N_v(e) = \{x \in V(G) : d(x, u) > d(x, v)\}.$$

令 $n_u = |N_u(e)|$, $n_v = |N_v(e)|$. Mostar 指标定义为

$$M(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} |n_u - n_v|.$$

加权 Mostar 指标定义为

$$\omega^+M(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} (d_u + d_v) |n_u - n_v|.$$

令 $C_n(T_1, T_2, \dots, T_k)$ 是含有圈 $C_k = v_1 v_2 \dots v_k v_1$ 的单圈图, 其中 T_1, T_2, \dots, T_k 是悬挂在圈 C_k 各顶点上的树, 树 $T_i (i=1, 2, \dots, k)$ 称为圈 C_k 上的悬挂分支. 给定正整数 a 和 b , $P(s, m, a, b)$ 是指在单圈图的顶点 v_s 和 v_m 处悬挂路 P_a 和路 P_b , 其中 a 和 b 均为路长.

引理 1^[4] 设 T_n 是一个 n 阶树, 则 $M(P_n) \leq M(T_n)$, 等号成立当且仅当 $P_n \cong T_n$.

引理 2^[14] 设 T_n 是一个 n 阶树, 则 $\omega^+M(P_n) \leq \omega^+M(T_n)$, 等号成立当且仅当 $P_n \cong T_n$.

2 偶长单圈图 Mostar 指标的下界

设 G 是 n 个顶点的单圈图, k 为单圈图的圈长, 当 $n=k$ 时, $M(G)=0$; 当 $n=k+1$ 时, $M(G)=2k-1$. 下面考虑当 $n \geq k+2$ 时单圈图 Mostar 指标的下界, 从 n 的奇偶性两种情形讨论.

引理 3 设 $G=C_n(P_1, P_2, \dots, P_k)$, 则圈 C_k 上的悬挂路分支越少, $\bigcup_{i=1}^k P_i$ 上的边对 Mostar 指标的贡献越小.

证明: 设 P_m 和 P_l 是圈 C_k 上任意两点 v 和 v' 上的两条悬挂路分支, 设 $P_m = u_1 u_2 \dots u_m$, $P_l = v_1 v_2 \dots v_l$, 其中 $1 \leq m \leq l$. 令 $G' = G - u_{m-1} u_m + v_l u_m$, 如图 1 所示, 当 $m=1$ 时, $u_{m-1} = v$.

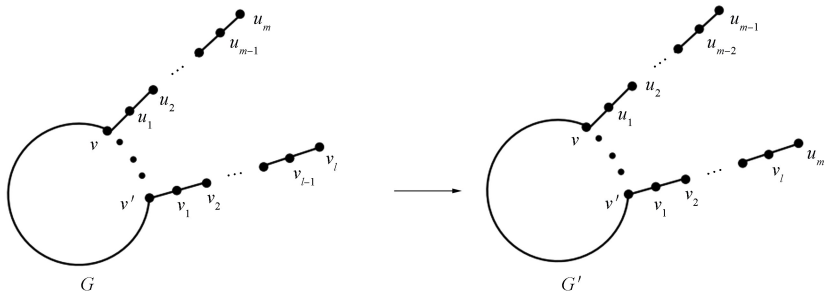


图 1 移边变换

Fig. 1 Edge shift transformation

下证 G 中悬挂路分支 P_m 和 P_l 上的边对 Mostar 指标的贡献和大于 G' 中悬挂路分支 P_{m-1} 和 P_{l+1} 上的边对 Mostar 指标的贡献和. G 中悬挂路分支 P_m 和 P_l 上的边对 Mostar 指标的贡献为

$$|n-2| + |n-4| + \dots + |n-2(m-1)| + |n-2m| + |n-2| + |n-4| + \dots + |n-2l|;$$

G' 中悬挂路分支 P_{m-1} 和 P_{l+1} 上的边对 Mostar 指标的贡献为

$$|n-2| + |n-4| + \dots + |n-2(m-1)| + |n-2| + |n-4| + \dots + |n-2l| + |n-2(l+1)|.$$

二者做差得 $|n-2m| - |n-2(l+1)|$. 因为 $n \geq l+m+k \geq l+m+4$, 所以 $n > 2m$, $n > l+m+2$, 从而当 $n \geq 2l+2$ 时, $|n-2m| - |n-2(l+1)| = 2l-2m+2 > 0$; 当 $n < 2l+2$ 时, $|n-2m| - |n-2(l+1)| = 2n-2m-2l-2 > 0$.

显然, 除悬挂路分支 P_m 和 P_l , 其余悬挂路上的边对 Mostar 指标的贡献不变, 根据上述变换的结果知, 悬挂路分支越少, $\bigcup_{i=1}^k P_i$ 上的边对 Mostar 指标的贡献越小.

引理 4 设 $G_0 \cong P\left(i, i + \frac{k}{2}, \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-k}{2} \rceil\right)$, 则

$$M(G_0) = \begin{cases} \frac{n^2 - k^2 - 2n + 2k}{2}, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{n^2 - k^2 - 2n + 4k - 1}{2}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases} \tag{1}$$

证明: 当 n 为偶数时, 有

$$M(G_0) = 2 \times (n - 2 + n - 4 + \dots + k) = 2 \times \frac{n - 2 + k}{2} \times \frac{n - k}{2} = \frac{n^2 - k^2 - 2n + 2k}{2}.$$

当 n 为奇数时, 有

$$\begin{aligned} M(G_0) &= 1 \times k + n - 2 + n - 4 + \dots + k - 1 + n - 2 + \dots + k + 1 = \\ &k + \left(\frac{n - 2 + k - 1}{2} \times \frac{n - k + 1}{2} \right) + \left(\frac{n - 2 + k + 1}{2} \times \frac{n - k - 1}{2} \right) = \\ &\frac{n^2 - k^2 - 2n + 4k - 1}{2}. \end{aligned}$$

定理 1 设 $G \cong C_n(T_1, T_2, \dots, T_k)$, $G_0 \cong P\left(i, i + \frac{k}{2}, \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-k}{2} \rceil\right)$, 则

$$M(G) \geq M(G_0), \tag{2}$$

等号成立当且仅当 $G \cong G_0$, 如图 2 所示.

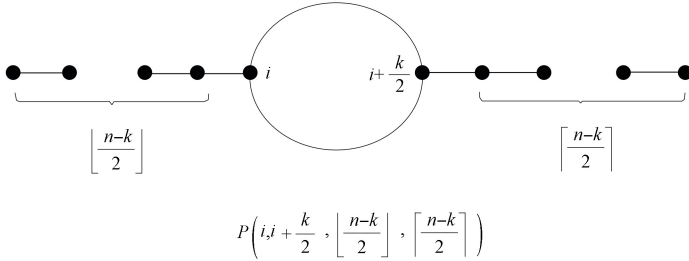


图 2 极值图

Fig. 2 Extremal graph

证明: 根据引理 1 知, $M(C_n(T_1, T_2, \dots, T_k)) \geq M(C_n(P_1, P_2, \dots, P_k))$. 下面分析悬挂路分支的条数.

当悬挂路分支不少于 3 条时, 根据引理 4 的证明知, 图 G_0 圈上的边对 Mostar 指标的贡献为 0 (n 为偶数) 或 1 (n 为奇数), 而图 $C_n(P_1, P_2, \dots, P_k)$ 圈上的边对 Mostar 指标的贡献不可能比 0 (n 为偶数) 或 1 (n 为奇数) 更小. 再根据引理 3 知, 悬挂路分支减少, 其上的边对 Mostar 指标的贡献和减小, 则图 G_0 的 Mostar 指标小.

当悬挂路分支为 2 条时, 若 2 条路不在圈 C_k 的 2 个对称点分布, 则圈上至少存在一条边 $e = v_i v_j$, 使得边 e 对 Mostar 指标的贡献 $|n_{v_i} - n_{v_j}| \geq n - k \geq 2$. 下面考虑悬挂路分布在圈 C_k 的 2 个对称点上的情形.

设图 $G' \cong P\left(i, i + \frac{k}{2}, \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor - x, \lceil \frac{n-k}{2} \rceil + x\right)$, 其中 $0 < x \leq \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$. 当 $x = \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$ 时, 圈 C_k 上悬挂一条路. 下面证明 $M(G_0) < M(G')$.

当 n 为偶数时, 考虑下列两种情形.

情形 1) $n \leq 2k$. 计算可得

$$\begin{aligned} M(G') &= 2xk + n - 2 + n - 4 + \dots + k - 2x + n - 2 + n - 4 + \dots + k + 2x = \\ &2xk + \frac{n - 2 + k - 2x}{2} \times \frac{n - k + 2x}{2} + \frac{n - 2 + k + 2x}{2} \times \frac{n - k - 2x}{2} = \\ &\frac{n^2 - 2n - k^2 + 2k - 4x^2 + 4xk}{2}. \end{aligned}$$

因为 $x \leq \frac{n-k}{2}$, $n \leq 2k$, 所以 $x \leq \frac{k}{2}$, 从而

$$M(G') - M(G_0) = \frac{n^2 - 2n - k^2 + 2k - 4x^2 + 4xk}{2} - \left(\frac{n^2 - k^2 - 2n + 2k}{2} \right) = 2x(k - x) > 0.$$

情形 2) $n > 2k$.

① 当 $0 < x \leq \frac{k}{2}$ 时, 计算和情形 1) 同理.

② 当 $\frac{k}{2} < x \leq \frac{n-k}{2}$ 时, 有

$$M(G') = 2kx + 2 + 4 + \dots + n - 2 + 2 + 4 + \dots + 2x - k + n - 2 + n - 4 + \dots + k + 2x = \frac{n^2 - 2n + 4x}{2}.$$

因此

$$M(G') - M(G_0) = \frac{4x + k^2 - 2k}{2} > 0.$$

当 n 为奇数时, 分如下两种情形讨论.

情形 1) $n < 2k$. 计算可得

$$\begin{aligned} M(G') &= (2x + 1)k + n - 2 + n - 4 + \dots + k - 1 - 2x + n - 2 + n - 4 + \dots + k + 1 + 2x = \\ &= 2kx + k + \frac{n - 2 + k - 1 - 2x}{2} \times \frac{n - k + 1 + 2x}{2} + \frac{n - 2 + k + 1 + 2x}{2} \times \frac{n - k - 1 - 2x}{2} = \\ &= \frac{n^2 - 2n - k^2 + 4k - 4x^2 + 4kx - 4x - 1}{2}. \end{aligned}$$

因为 $x \leq \frac{n-k-1}{2}$, $n \leq 2k-1$, 所以 $x \leq \frac{k-2}{2}$, 从而

$$\begin{aligned} M(G') - M(G_0) &= \frac{n^2 - 2n - k^2 + 4k - 4x^2 + 4kx - 4x - 1}{2} - \left(\frac{n^2 - k^2 - 2n + 4k - 1}{2} \right) = \\ &= 2kx - 2x - 2x^2 = 2x(k - x - 1) > 0. \end{aligned}$$

情形 2) $n > 2k$.

① 当 $0 < x < \frac{k}{2}$ 时, 计算和情形 1) 同理.

② 当 $\frac{k}{2} \leq x \leq \frac{n-k-1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} M(G') &= (2x + 1)k + n - 2 + n - 4 + \dots + 1 + 1 + 3 + \dots + 1 + 2x - k + \\ &= n - 2 + n - 4 + \dots + k + 1 + 2x = \frac{n^2 + 4x - 2n + 3}{2}. \end{aligned}$$

因此

$$M(G') - M(G_0) = \frac{4x - 4k + k^2 + 4}{2} > 0.$$

3 偶长单圈图加权 Mostar 指标的下界

设 G 是 n 个顶点的单圈图, k 为单圈图的圈长, 当 $n = k$ 时, $w^+ M(G) = 0$; 当 $n = k + 1$ 时, $w^+ M(G) = 8k - 2$. 下面考虑当 $n \geq k + 2$ 时单圈图加权 Mostar 指标的下界, 从 n 的奇偶性两种情形讨论.

引理 5 设 $G = C_n(P_1, P_2, \dots, P_k)$, 则圈 C_k 上的悬挂路分支越少, $\bigcup_{i=1}^k P_i$ 上的边对加权 Mostar 指标的贡献越小.

证明: 设 P_m 和 P_l 是圈 C_k 上任意两点 v 和 v' 上的 2 条悬挂路分支, 设 $P_m = u_1 u_2 \dots u_m$, $P_l = v_1 v_2 \dots v_l$, 其中 $1 \leq m \leq l$. 令 $G' = G - u_{m-1} u_m + v_l u_m$, 当 $m = 1$ 时, $u_{m-1} = v$.

下证 G 中悬挂路 P_m 和 P_l 上的边对加权 Mostar 指标的贡献和大于 G' 中悬挂路 P_{m-1} 和 P_{l+1} 上的边对加权 Mostar 指标的贡献和.

情形 1) $m=1, l=1$. 此时, G 中 P_m 和 P_l 上的边对加权 Mostar 指标的贡献和为 $4|n-2| + 4|n-2| = 8n-16$; G' 中 P_{m-1} 和 P_{l+1} 上的边对加权 Mostar 指标的贡献和为 $3|n-2| + 5|n-4| = 8n-26$.

情形 2) $m=1, l>1$. 此时, G 中 P_m 和 P_l 上的边对加权 Mostar 指标的贡献和为

$$4|n-2| + 3|n-2| + 4|n-4| + \dots + 4|n-2(l-1)| + 5|n-2l|;$$

G' 中 P_{m-1} 和 P_{l+1} 上的边对加权 Mostar 指标的贡献和为

$$3|n-2| + 4|n-4| + \dots + 4|n-2l| + 5|n-2(l+1)|.$$

二者做差得 $4|n-2| + |n-2l| - 5|n-2l-2|$.

当 $n \geq 2l+2$ 时, $4|n-2| + |n-2l| - 5|n-2l-2| = 8l+2 > 0$; 当 $n \leq 2l$ 时, 因为 $n \geq l+m+k \geq l+5$, 所以 $4|n-2| + |n-2l| - 5|n-2l-2| = 8n-8l-18 > 0$; 当 $n = 2l+1$ 时, $4|n-2| + |n-2l| - 5|n-2l-2| = 8l-8 > 0$.

情形 3) $m \geq 2$. 此时, G 中 P_m 和 P_l 上的边对加权 Mostar 指标的贡献和为

$$3|n-2| + 4|n-4| + \dots + 4|n-2(m-1)| + 5|n-2m| + 3|n-2| + 4|n-4| + \dots + 4|n-2(l-1)| + 5|n-2l|;$$

G' 中 P_{m-1} 和 P_{l+1} 上的边对加权 Mostar 指标的贡献和为

$$3|n-2| + 4|n-4| + \dots + 4|n-2(m-2)| + 5|n-2(m-1)| + 3|n-2| + 4|n-4| + \dots + 4|n-2l| + 5|n-2(l+1)|.$$

二者做差得 $-|n-2m+2| + 5|n-2m| + |n-2l| - 5|n-2l-2|$.

当 $n \geq 2l+2$ 时, $-|n-2m+2| + 5|n-2m| + |n-2l| - 5|n-2l-2| = 8l-8m+8 > 0$; 当 $n \leq 2l$ 时, 因为 $n \geq l+m+k \geq l+m+4$, 所以 $n-l-m \geq 4$, 从而

$$-|n-2m+2| + 5|n-2m| + |n-2l| - 5|n-2l-2| = 8n-8m-8l-12 > 0;$$

当 $n = 2l+1$ 时, 因为 $n \geq l+m+k \geq l+m+4$, 所以 $l > m+3$, 从而

$$-|n-2m+2| + 5|n-2m| + |n-2l| - 5|n-2l-2| = 8l-8m-2 > 0.$$

显然, 除悬挂路分支 P_m 和 P_l , 其余悬挂路上的边对加权 Mostar 指标的贡献不变, 根据上述变换的结果可知, 悬挂路分支越少, $\bigcup_{i=1}^k P_i$ 上的边对加权 Mostar 指标的贡献越小.

引理 6 设 $G_0 \cong P\left(i, i + \frac{k}{2}, \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-k}{2} \rceil\right)$, 则

$$\omega^+M(G_0) = \begin{cases} 2n^2 - 2k^2 - 6n + 6k + 4, & n \text{ 为偶数,} \\ 2n^2 - 2k^2 - 6n + 10k + 6, & n \text{ 为奇数.} \end{cases} \quad (3)$$

证明: 1) n 是偶数.

① 当 $n = k+2$ 时, $\omega^+M(G_0) = 4 \times (k+2-2) \times 2 = 8k$.

② 当 $n > k+2$ 时, 有

$$\begin{aligned} \omega^+M(G_0) &= 2 \times [3(n-2) + 4(n-4) + \dots + 4(k-2) + 5k] = \\ &= 2 \times \left[4 \times \frac{n-2+k}{2} \times \frac{n-k}{2} - (n-2) + k \right] = \\ &= 2n^2 - 2k^2 - 6n + 6k + 4. \end{aligned} \quad (4)$$

将 $n = k+2$ 代入式(4)可得 $\omega^+M(G_0) = 8k$.

2) n 是奇数.

① 当 $n = k+3$ 时, 有

$$\omega^+M(G_0) = 4(k-4) + 20 + 7(k+3-2) + 5(k+3-4) = 16k + 6.$$

② 当 $n > k+3$ 时, 有

$$\begin{aligned} \omega^+M(G_0) &= 20 + 4 \times (k-4) + 3(n-2) + 4(n-4) + \dots + 4(k-3) + 5(k-1) + \\ &= [3(n-2) + 4(n-4) + \dots + 4(k-1) + 5(k+1)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&4k + 4 + 4 \times \left(\frac{n+k-3}{2} \times \frac{n-k+1}{2} \right) - (n-2) + k - 1 + \\
&4 \times \left(\frac{n+k-1}{2} \times \frac{n-k-1}{2} \right) - (n-2) + k + 1 = \\
&2n^2 - 2k^2 - 6n + 10k + 6.
\end{aligned} \tag{5}$$

将 $n=k+3$ 代入式(5)可得 $\omega^+M(G_0)=16k+6$.

定理 2 设 $G=C_n(T_1, T_2, \dots, T_k)$, $G_0 \cong P\left(i, i+\frac{k}{2}, \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-k}{2} \rceil\right)$, 则

$$\omega^+M(G) \geq \omega^+M(G_0), \tag{6}$$

等号成立当且仅当 $G \cong G_0$.

证明: 根据引理 2 知, $\omega^+M(C_n(T_1, T_2, \dots, T_k)) \geq \omega^+M(C_n(P_1, P_2, \dots, P_k))$, 下面分析悬挂路分支的条数.

当悬挂路分支不少于 3 条时, 根据引理 6 的证明知, n 为偶数时, 图 G_0 圈上的边对加权 Mostar 指标的贡献为 0, 而图 $C_n(P_1, P_2, \dots, P_k)$ 圈上的边对加权 Mostar 指标的贡献不可能小于 0. 同理, 当 n 为奇数时, 图 G_0 圈上不与路相关联的边对加权 Mostar 指标的贡献为 4, 与路关联的边对加权 Mostar 指标的贡献为 5, 而图 $C_n(P_1, P_2, \dots, P_k)$ 圈上不与路相关联的边对加权 Mostar 指标的贡献不可能小于 4, 与路关联的边对加权 Mostar 指标的贡献不可能小于 5. 再根据引理 5 知, 悬挂路分支减少, 其上的边对加权 Mostar 指标的贡献和减小, 则图 G_0 的加权 Mostar 指标小.

当悬挂路分支为 2 条时, 若 2 条路不在圈 C_k 的 2 个对称点分布, 则圈上至少存在一条边 $e=v_i v_j$, 使得边 e 对加权 Mostar 指标的贡献 $|n_{v_i} - n_{v_j}| \geq 4(n-k) \geq 8$. 下面考虑悬挂路分布在圈 C_k 的 2 个对称点上的情况.

设图 $G' \cong P\left(i, i+\frac{k}{2}, \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor - x, \lceil \frac{n-k}{2} \rceil + x\right)$, 其中 $0 < x \leq \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$. 当 $x = \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$ 时, 圈 C_k 上悬挂 1 条路. 下面证明 $\omega^+M(G_0) < \omega^+M(G')$.

当 n 是偶数时, 分 3 种情形讨论.

情形 1) $k+2 \leq n \leq 2k$.

① 当 $0 < x \leq \frac{n-k-4}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\omega^+M(G') &= 40x + 8x(k-4) + 3(n-2) + 4(n-4) + \dots + 5(k-2x) + \\
&3(n-2) + 4(n-4) + \dots + 5(k+2x) = \\
&8kx + 8x + 4 \times \frac{n-2+k-2x}{2} \times \frac{n-k+2x}{2} + \\
&4 \times \frac{n-2+k+2x}{2} \times \frac{n-k-2x}{2} - 2n + 2k + 4 = \\
&2n^2 - 6n - 2k^2 + 6k + 4 - 8x^2 + 8kx + 8x.
\end{aligned}$$

因为 $x \leq \frac{n-k-4}{2}$, $n \leq 2k$, 所以 $x \leq \frac{k-4}{2}$, 从而

$$\begin{aligned}
\omega^+M(G') - \omega^+M(G_0) &= 2n^2 - 6n - 2k^2 + 6k + 4 - 8x^2 + 8kx + 8x - \\
&(2n^2 - 2k^2 - 6n + 6k + 4) = 8x(k+1-x) > 0.
\end{aligned}$$

② 当 $x = \frac{n-k-2}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\omega^+M(G') &= (n-k-2)(4k+4) + 4(n-2) + 3(n-2) + 4(n-4) + \dots + 5(2k+2-n) = \\
&8nk - 8k^2 + 6n - 14k - 12,
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\omega^+M(G') - \omega^+M(G_0) &= 8nk - 6k^2 + 12n - 20k - 2n^2 - 16 = \\
&(3k-n)(2n-2k-4) + 8n - 8k - 16 > 0.
\end{aligned}$$

③ 当 $x = \frac{n-k}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} w^+M(G') &= 2 \times 5 \times (n-k) + (k-2) \times 4 \times (n-k) + 3(n-2) + 4(n-4) + \cdots + 5(2k-n) = \\ &= 8nk - 8k^2 - 4n + 4k + 2, \end{aligned}$$

从而

$$w^+M(G') - w^+M(G_0) = 8nk - 6k^2 + 2n - 2k - 2 - 2n^2 = (3k-n)(2n-2k) + 2n - 2k - 2 > 0.$$

情形 2) $n \geq 2k+4$.

① 当 $0 < x \leq \frac{k}{2}$ 时, 计算和情形 1) 中①同理.

② 当 $\frac{k}{2} < x \leq \frac{n-k-4}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} w^+M(G') &= 8kx + 8x + 3(n-2) + 4(n-4) + \cdots + 4 \times 2 + 0 + 4 \times 2 + 4 \times 4 + \cdots + \\ &= 5(2x-k) + 3(n-2) + 4(n-4) + \cdots + 5(k+2x) = \\ &= 2n^2 - 6n + 20x + 4, \end{aligned}$$

从而

$$w^+M(G') - w^+M(G_0) = 20x + 2k^2 - 6k > 0.$$

③ 当 $x = \frac{n-k-2}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} w^+M(G') &= (n-k-2)(4k+4) + 4(n-2) + 3(n-2) + 4(n-4) + \cdots + 2 \times 4 + 0 + \\ &= 2 \times 4 + 4 \times 4 + \cdots + 5(n-2k-2) = 2n^2 + 4n - 10k - 16, \end{aligned}$$

从而

$$w^+M(G') - w^+M(G_0) = 2k^2 + 10n - 16k - 20 > 0.$$

④ 当 $x = \frac{n-k}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} w^+M(G') &= 10(n-k) + 4(n-k)(k-2) + 3(n-2) + 4(n-4) + \cdots + 4 \times 2 + 0 + \\ &= 4 \times 2 + 4 \times 4 + \cdots + 5(n-2k) = 2n^2 - 8k + 2n + 2, \end{aligned}$$

从而

$$w^+M(G') - w^+M(G_0) = 2k^2 - 14k + 8n - 2 > 0.$$

情形 3) $n = 2k+2$.

① 当 $0 < x \leq \frac{n-k-4}{2}$ 时, 计算和情形 1) 中①同理.

② 当 $x = \frac{n-k-2}{2} = \frac{k}{2}$ 时, 计算和情形 1) 中②同理.

③ 当 $x = \frac{k+2}{2}$ 时, 计算和情形 2) 中④同理.

当 n 是奇数时, 考虑如下情形.

情形 1) $k+3 \leq n < 2k$.

① 当 $0 < x \leq \frac{n-k-5}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} w^+M(G') &= (4k+4)(2x+1) + 3(n-2) + 4(n-4) + \cdots + 5(k-1-2x) + \\ &= 3(n-2) + 4(n-4) + \cdots + 5(k+1+2x) = \\ &= (4k+4)(2x+1) + (n-2x+k-3)(n+2x-k+1) + k-1-2x - (n-2) + \\ &= (n+2x+k-1)(n-2x-k-1) - (n-2) + k+1+2x = \\ &= 2n^2 - 2k^2 - 6n + 10k + 8kx - 8x^2 + 6. \end{aligned}$$

因为 $x \leq \frac{n-k-5}{2}$, $n \leq 2k-1$, 所以 $x \leq \frac{k-6}{2}$, 从而

$$\omega^+M(G') - \omega^+M(G_0) = 8x(k-x) > 0.$$

② 当 $x = \frac{n-k-3}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} \omega^+M(G') &= (4k+4)(n-k-2) + 4(n-2) + 3(n-2) + 4(n-4) + \cdots + 5(2k-n+2) = \\ &8nk + 6n - 8k^2 - 14k - 12, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \omega^+M(G') - \omega^+M(G_0) &= 8nk + 12n - 6k^2 - 2n^2 - 24k - 18 = \\ &(3k-n)(2n-2k-6) + 6(n-k-3) > 0. \end{aligned}$$

③ 当 $x = \frac{n-k-1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} \omega^+M(G') &= 10(n-k) + 4 \times (n-k)(k-2) + 3(n-2) + 4(n-4) + \cdots + 5(2k-n) = \\ &8nk - 8k^2 - 4n + 4k + 2, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \omega^+M(G') - \omega^+M(G_0) &= 8nk - 6k^2 - 2n^2 + 2n - 6k - 4 = \\ &(2k-n)(2n-2k) + (2k+2)(n-k-2) > 0. \end{aligned}$$

情形 2) $n \geq 2k+3$.

① 当 $0 < x \leq \frac{k-2}{2}$ 时, 计算和情形 1) 中①同理.

② 当 $\frac{k-2}{2} < x \leq \frac{n-k-5}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} \omega^+M(G') &= (4k+4)(2x+1) + 3(n-2) + 4(n-4) + \cdots + 4 \times 1 + 4 \times 1 + 4 \times 3 + \cdots + \\ &5(1+2x-k) + 3(n-2) + 4(n-4) + \cdots + 5(k+1+2x) = \\ &2n^2 - 6n + 20x + 16, \end{aligned}$$

从而

$$\omega^+M(G') - \omega^+M(G_0) = 2k^2 - 10k + 20x + 10 > 0.$$

③ 当 $x = \frac{n-k-3}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} \omega^+M(G') &= (4k+4)(n-k-2) + 3(n-2) + 4(n-4) + \cdots + 4 \times 1 + \\ &4 \times 1 + \cdots + 5(n-2k-2) + 4(n-2) = 2n^2 + 4n - 10k - 14, \end{aligned}$$

从而

$$\omega^+M(G') - \omega^+M(G_0) = 2k^2 - 20k + 10n - 20 > 0.$$

④ 当 $x = \frac{n-k-1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} \omega^+M(G') &= 2 \times 5 \times (n-k) + 4 \times (n-k) \times (k-2) + 4 \times 1 + 4 \times 3 + \cdots + \\ &3 \times (n-2) + 4 \times 1 + 4 \times 3 + \cdots + 5 \times (n-2k) = \\ &2n^2 - 8k + 2n + 4, \end{aligned}$$

从而

$$\omega^+M(G') - \omega^+M(G_0) = 2k^2 + 8n - 18k - 2 > 0.$$

情形 3) $n = 2k+1$.

① 当 $0 < x \leq \frac{n-k-5}{2}$ 时, 计算和情形 1) 中①同理.

② 当 $x = \frac{n-k-3}{2} = \frac{k-2}{2}$ 时, 计算和情形 1) 中②同理.

③ 当 $x = \frac{n-k-1}{2}$ 时, 计算和情形 2) 中④同理.

综上, 本文得到了当单圈图的圈长为偶数时, 其 Mostar 指标和加权 Mostar 指标的下界, 并给出

了相应的极值图.

参 考 文 献

- [1] WIENER H. Structural Determination of Paraffin Boiling Points [J]. *J Am Chem Soc*, 1947, 69(1): 17-20.
- [2] GUTMAN I. A Formula for the Wiener Number of Trees and Its Extension to Graphs Containing Cycles [J]. *Graph Theory Notes NY*, 1994, 27(9): 9-15.
- [3] ILIĆ A, MILOSAVLJEVIĆ N. The Weighted Vertex PI Index [J]. *Math Comput Modelling*, 2013, 57(3/4): 623-631.
- [4] DOŠLIĆ T, MARTINJAK I, ŠKREKOVSKI R, et al. Mostar Index [J]. *J Math Chem*, 2018, 56(10): 2995-3013.
- [5] LIU G, DENG K. The Maximum Mostar Indices of Unicyclic Graphs with Given Diameter [J]. *Appl Math Comput*, 2023, 439: 127636-1-127636-9.
- [6] HAYAT F, ZHOU B. On Cacti with Large Mostar Index [J]. *Filomat*, 2019, 33(15): 4865-4873.
- [7] DEHGARDI N, AZARI M. More on Mostar Index [J]. *Appl Math E-Notes*, 2020, 20: 316-322.
- [8] GAO F, XU K, DOŠLIĆ T. On the Difference of Mostar Index and Irregularity of Graphs [J]. *Bull Malays Math Sci Soc*, 2021, 44(2): 905-926.
- [9] GHORBANI M, RAHMANI S, ESLAMPOOR M. Some New Results on Mostar Index of Graphs [J]. *Iranian J Math Chem*, 2020, 11(1): 33-42.
- [10] DENG K, LI S. Chemical Trees with Extremal Mostar Index [J]. *Match Commun Math Comput Chem*, 2021, 85: 161-180.
- [11] DENG K, LI S. On the Extremal Values for the Mostar Index of Trees with Given Degree Sequence [J] *Appl Math Comput*, 2021, 390: 125598-1-125598-11.
- [12] AROCKIARAJ M, CLEMENT J, TRATNIK N. Mostar Indices of Carbon Nanostructures and Circumscribed Donut Benzenoid Systems [J]. *Int J Quantum Chem*, 2019, 119(24): e26043-1-e26043-11.
- [13] AROCKIARAJ M, CLEMENT J, TRATNIK N. Weighted Mostar Indices as Measures of Molecular Peripheral Shapes with Applications to Graphene, Graphyne and Graphdiyne Nanoribbons [J]. *SAR QSAR Environ Res*, 2020, 31(3): 187-208.
- [14] 甄倩倩. 树和单圈图的带和权 Mostar 指标 [J]. *兰州交通大学学报*, 2023, 42(3): 139-143. (ZHEN Q Q. Sum-Weighted Mostar Index of Trees and Unicyclic Graphs [J]. *Journal of Lanzhou Jiaotong University*, 2023, 42(3): 139-143.)
- [15] KANDAN P, SUBRAMANIAN S, RAJESH P. Weighted Mostar Indices of Certain Graphs [J]. *Adv Math Sci J*, 2021, 10(9): 3093-3111.
- [16] IMRAN M, AKHTER S, YASMEEN F, et al. The Weighted Mostar Invariants of Phthalocyanines, Triazine-Based and Nanostar Dendrimers [J]. *Polycycl Aromat Comp*, 2023, 43(1): 772-789.
- [17] ALI A, DOŠLIĆ T. Mostar Index: Results and Perspectives [J]. *Appl Math Comput*, 2021, 404: 126245-1-126245-19.
- [18] BONDY J, MURTY U S R. *Graph Theory* [M]. New York: Springer, 2008: 99-114.

(责任编辑: 李琦)