

# 一类 PDGF 诱导的肿瘤模型的动力学性质分析

鄂玺琪, 魏新, 赵建涛

(黑龙江大学 数学科学学院, 哈尔滨 150080)

**摘要:** 考虑一个以血小板源性生长因子(PDGF)驱动的反应扩散神经胶质瘤数学模型. 首先, 对常微分系统给出其平衡点的稳定性分析, 以趋化剂产生的速率  $m$  作为分支参数给出正平衡点附近 Hopf 分支的存在性, 并通过规范型理论和中心流形定理给出判断由 Hopf 分支产生的周期解稳定性公式; 其次, 对反应扩散系统, 得到当扩散介入后平衡点不会发生 Turing 不稳定性; 最后, 通过数值模拟验证理论分析结果. 结果表明, 趋化剂产生的速率  $m$  可区分神经胶质瘤的类型.

**关键词:** 肿瘤模型; 反应扩散; Hopf 分支; 稳定性

中图分类号: O175.21 文献标志码: A 文章编号: 1671-5489(2024)04-0809-12

## Dynamical Properties Analysis of a Class of PDGF-Induced Tumor Models

E Xiqi, WEI Xin, ZHAO Jiantao

(School of Mathematical Science, Heilongjiang University, Harbin 150080, China)

**Abstract:** We considered a platelet derived growth factor (PDGF) driven reaction-diffusion glioma mathematical model. Firstly, we gave the stability analysis of the equilibrium point for the ordinary differential system. We took the rate  $m$  generated by chemoattractant as the bifurcation parameter, gave the existence of the Hopf bifurcation near the positive equilibrium point, and then gave a formula to judge the stability of the periodic solution produced by the Hopf bifurcation through the gauge type theory and the central manifold theorem. Secondly, for reaction-diffusion systems, we obtained that the equilibrium point did not occur Turing instability when diffusion was involved. Finally, the theoretical analysis results were verified through numerical simulation. The results show that the rate  $m$  generated by chemoattractant can be used to distinguish the types of glioma.

**Keywords:** tumor model; reaction diffusion; Hopf bifurcation; stability

## 0 引言

恶性肿瘤会对人类造成很大危害, 是一类致死率较高的疾病<sup>[1]</sup>. 通过建立肿瘤数学模型可以更好地理解肿瘤增长规律, 并为肿瘤研究和临床治疗提供科学依据. 目前, 关于肿瘤数学模型的研究已有

收稿日期: 2023-11-13.

第一作者简介: 鄂玺琪(1993—), 女, 达斡尔族, 硕士研究生, 从事微分方程理论及应用的研究, E-mail: 1454915811@qq.com.

通信作者简介: 赵建涛(1981—), 男, 汉族, 博士, 副教授, 从事微分方程理论及应用的研究, E-mail: zhaojt@hlju.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11901172)和黑龙江省属高校基本科研业务费专项基金(批准号: 2021-KYYWF-0017; 2022-KYYWF-1043).

很多结果. 例如, 文献[2]利用稳定性和分支理论分析了相应肿瘤模型的动力学行为. 神经胶质瘤细胞是一种恶性肿瘤细胞, 研究表明, 神经胶质瘤的增殖和侵袭与一些细胞生长因子的异常表达有关, 其中血小板源性生长因子(platelet derived growth factor, PDGF)是神经胶质瘤中最常见的驱动因子之一, 它可以促进神经胶质瘤细胞的增殖和浸润.

近年来, 关于 PDGF 驱动的神神经胶质瘤的数学模型研究得到广泛关注. 例如: 文献[3]建立了一个肿瘤细胞和免疫细胞相互作用的模型, 模拟了免疫细胞在不同浓度趋化剂下对肿瘤细胞的杀伤效果; 文献[4]建立了一个考虑 PDGF 浓度和细胞自身运动的模型, 模拟了 PDGF 对神经胶质瘤细胞增殖和浸润的影响; 文献[5]考虑一个径向对称的肿瘤, 建立了由 PDGF 驱动的三维胶质瘤的数学模型, 并通过数值模拟发现了趋化剂产生率和趋化系数这两个参数的重要作用; 文献[6]研究了一个关于 PDGF 驱动的神神经胶质瘤的随机数学模型, 可根据趋化剂产生率和趋化系数的参数范围区分两种胶质瘤, 且当噪声强度比趋化系数大时, 只会有一种胶质瘤, 最后通过数值模拟进行了验证, 并给出了相应的医学解释.

本文在文献[5-6]的基础上, 考虑如下—类由 PDGF 诱导的反应扩散肿瘤模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t} = d_G \Delta G + \lambda G \left(1 - \frac{G+N}{k}\right), & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial A}{\partial t} = d_A \Delta A + \frac{mG}{\beta+G} - \gamma A, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial N}{\partial t} = d_N \Delta N + \alpha AN - \rho N, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial G}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial N}{\partial \mathbf{v}} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ G(x, 0) = G_0(x), \quad A(x, 0) = A_0(x), \quad N(x, 0) = N_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  且具有光滑边界  $\partial\Omega$ ;  $\Delta$  为 Laplace 算子;  $G = G(x, t)$  表示  $t$  时刻  $x$  位置神经胶质瘤细胞的密度;  $A = A(x, t)$  表示  $t$  时刻  $x$  位置趋化剂的浓度;  $N = N(x, t)$  表示  $t$  时刻  $x$  位置浸润免疫细胞的密度;  $d_G > 0$ ,  $d_A > 0$  和  $d_N > 0$  分别表示胶质瘤细胞、趋化剂浓度和浸润免疫细胞的扩散率;  $\lambda$  表示神经胶质瘤细胞的自然增长率;  $k$  为最大环境容纳量;  $m$  和  $\alpha$  分别表示神经胶质瘤细胞产生趋化剂的速率和趋化系数;  $\beta$  表示的 Michaelis 常数;  $\gamma$  表示趋化剂的降解速率;  $\rho$  是浸润免疫细胞的清除率. 假设神经胶质瘤细胞的增殖遵循 Logistic 增长模式, 趋化剂是由神经胶质瘤细胞产生的, 用 Michaelis-Menten 形式  $\frac{mG}{\beta+G}$  模拟趋化剂的产生速率. 模型中参数均为正数.

目前, Hopf 分支是生物模型研究中的一个热点问题<sup>[7-9]</sup>. 本文以趋化剂产生的速率  $m$  作为唯一的分支参数讨论常微分系统中正平衡解的稳定性和 Hopf 分支, 并给出其周期解的稳定性和分支方向的判别式, 该方法不同于文献[5-6]以趋化剂产生率和趋化系数两个参数研究神经胶质瘤模型的动力学行为. 本文的主要理论结果如下. 首先, 对任意正常数  $m$ , 平衡解  $E_0$  总是不稳定的. 其次, 当  $m < m_0$  时, 平衡解  $E_1$  是局部渐近稳定的; 当  $m \geq m_0$  时,  $E_1$  是不稳定的. 此外, 当  $m > m_0$  时, 系统会存在一个唯一的正平衡点  $E_*$ , 当  $m \in (m_0, m_1)$  时,  $E_*$  是局部渐近稳定的; 当  $m \in (m_1, +\infty)$  时,  $E_*$  是不稳定的; 当  $m = m_1$  时, 在  $E_*$  处会发生 Hopf 分支, 并通过规范型理论和中心流形定理给出判断由 Hopf 分支产生的周期解稳定性和分支方向的判别公式. 最后, 证明反应扩散系统(1)的平衡解不会发生 Turing 不稳定性. 一般地, 神经胶质瘤的类型可分为 wtIDH1 型和 muIDH1 型, 其中 wtIDH1 型神经胶质瘤会有较多的免疫细胞浸润<sup>[5]</sup>. 本文研究的理论结果和数值模拟在医学上可解释为: 当其他参数值确定时, 可通过趋化剂产生的速率  $m$  区分两种神经胶质瘤的类型. 即当  $m$  小于临界值  $m_0$  时, 浸润免疫细胞密度最后会消失为零, 从而可判断神经胶质瘤的类型为 muIDH1 型; 当  $m$  大于临界值  $m_0$  时, 浸润免疫细胞会一直存在, 此时神经胶质瘤的类型为 wtIDH1 型. 特别地, 当  $m$  非常大时, 神经胶质瘤中会存在更多的浸润免疫细胞. 因此, 本文的研究结果可在医学上为区分神经胶质瘤的类型提供理论依据.

# 1 常微分系统的动力学行为

考虑系统(1)对应的常微分系统:

$$\begin{cases} \frac{dG}{dt} = \lambda G \left(1 - \frac{G+N}{k}\right), \\ \frac{dA}{dt} = \frac{mG}{\beta+G} - \gamma A, \\ \frac{dN}{dt} = \alpha A N - \rho N. \end{cases} \tag{2}$$

通过选择趋化剂产生的速率  $m$  作为系统(2)的主要分支参数, 讨论系统(2)平衡解的稳定性和 Hopf 分支, 以及由 Hopf 分支产生的周期解的稳定性.

## 1.1 平衡解分析

显然,  $E_0 := (0, 0, 0)$  和  $E_1 := \left(k, \frac{mk}{\gamma(\beta+k)}, 0\right)$  分别为系统(2)的平凡解和半平凡解, 且二者总存在. 记

$$m_0 = \frac{\rho\gamma(\beta+k)}{k\alpha}.$$

直接计算可知, 当  $0 < m \leq m_0$  时, 系统(2)无正平衡解; 当  $m > m_0$  时, 系统(2)存在唯一的正平衡解  $E_* := (G_*, A_*, N_*)$ , 其中

$$G_* := \frac{\gamma\rho\beta}{am - \gamma\rho}, \quad A_* := \frac{\rho}{\alpha}, \quad N_* := k - \frac{\gamma\rho\beta}{am - \gamma\rho}.$$

## 1.2 平衡解 $E_0$ 和 $E_1$ 的稳定性分析

**定理 1** 对于系统(2)的平衡解  $E_0$  和  $E_1$  有如下结论:

- 1) 系统(2)的平凡解  $E_0$  是不稳定的;
- 2) 当  $m < m_0$  时, 系统(2)的平衡解  $E_1$  是局部渐近稳定的; 当  $m \geq m_0$  时, 系统(2)的平衡解  $E_1$  是不稳定的.

证明: 1) 系统(2)在  $E_0$  处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_0) := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \frac{m}{\beta} & -\gamma & 0 \\ 0 & k & -\rho \end{pmatrix},$$

其特征值为  $\lambda > 0, -\gamma < 0, -\rho < 0$ . 因此平凡解  $E_0$  是不稳定的.

2) 系统(2)在  $E_1$  处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_1) := \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -\lambda \\ \frac{m\beta}{(\beta+k)^2} & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mak}{\gamma(\beta+k)} - \rho \end{pmatrix},$$

其特征值为  $-\lambda (< 0), -\gamma (< 0), \frac{mak}{\gamma(\beta+k)} - \rho$ . 显然, 当  $m < m_0$  时,  $\frac{mak}{\gamma(\beta+k)} - \rho < 0$ , 系统(2)的平衡解  $E_1$  是局部渐近稳定的; 当  $m > m_0$  时,  $\frac{mak}{\gamma(\beta+k)} - \rho > 0$ , 系统(2)的平衡解  $E_1$  是不稳定的. 当  $m = m_0$  时, 有一特征值为 0, 此时不能通过特征值直接判断该平衡解的稳定性. 下证当  $m = m_0$  时, 系统(2)的平衡解  $E_1$  是不稳定的. 令

$$\bar{G} = G - k, \quad \bar{A} = A - \frac{mak}{\gamma(\beta+k)}, \quad \bar{N} = N,$$

则系统(2)转化为

$$\begin{cases} \frac{d\bar{G}}{dt} = \lambda(\bar{G} + k) \left(1 - \frac{\bar{G} + \bar{N} + k}{k}\right), \\ \frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{m(\bar{G} + k)}{\beta + k + \bar{G}} - \gamma\bar{A} - \frac{mk}{\beta + k}, \\ \frac{d\bar{N}}{dt} = \alpha\bar{A}\bar{N}. \end{cases} \quad (3)$$

系统(2)的平衡解  $E_1$  对应系统(3)的平衡解  $\bar{E}_1 := (0, 0, 0)$ . 当  $m = m_0$  时, 系统(3)在  $\bar{E}_1$  处的 Jacobi 矩阵为

$$J(\bar{E}_1) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -\lambda \\ \frac{m_0\beta}{(\beta+k)^2} & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其特征值为  $-\lambda, -\gamma, 0$ . 考虑  $\lambda \neq \gamma$ , 通过计算可得: 特征值  $-\lambda$  对应的特征向量为  $\mathbf{V}_1 = \left(\frac{(\beta+k)^2(\gamma-\lambda)}{m_0\beta}, 1, 0\right)^T$ , 特征值  $-\gamma$  对应的特征向量为  $\mathbf{V}_2 = (0, 1, 0)^T$ , 特征值  $0$  对应的特征向量为  $\mathbf{V}_3 = \left(1, \frac{m_0\beta}{\gamma(\beta+k)^2}, -1\right)^T$ .

令  $\mathbf{T} = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3)$ ,  $\mathbf{X} = (\bar{G}, \bar{A}, \bar{N})^T$ , 则系统(3)可改写为

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{J}(\bar{E}_1)\mathbf{X} + \mathbf{F},$$

其中

$$\mathbf{F} = \left(-\frac{\lambda}{k}\bar{G}^2 - \frac{\lambda}{k}\bar{G}\bar{N}, -\frac{mk}{\beta+k} + \frac{m(\bar{G}+k)}{\beta+k+\bar{G}} - \frac{m\beta\bar{G}}{(\beta+k)^2}, \alpha\bar{A}\bar{N}\right)^T.$$

令  $\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ , 则有

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}(\bar{E}_1)\mathbf{T}\mathbf{Y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F},$$

其中  $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}(\bar{E}_1)\mathbf{T} = \text{diag}(-\lambda, -\gamma, 0)$ . 又由  $\mathbf{X} = \mathbf{T}\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ , 可得

$$\bar{G} = \frac{(\beta+k)^2(\gamma-\lambda)}{m\beta}y_1 + y_3, \quad \bar{A} = y_1 + y_2 + \frac{m\beta}{\gamma(\beta+k)^2}y_3, \quad \bar{N} = -y_3.$$

下面计算  $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}$ . 直接计算可得

$$|\mathbf{T}| = -\frac{(\beta+k)^2(\gamma-\lambda)}{m\beta},$$

$$\mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{(\beta+k)^2(\gamma-\lambda)}{m\beta} & \frac{\lambda}{\gamma} \\ 0 & 0 & \frac{(\beta+k)^2(\gamma-\lambda)}{m\beta} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{m\beta}{(\beta+k)^2(\gamma-\lambda)} & 0 & \frac{m\beta}{(\beta+k)^2(\gamma-\lambda)} \\ -\frac{m\beta}{(\beta+k)^2(\gamma-\lambda)} & 1 & -\frac{\lambda m\beta}{\gamma(\beta+k)^2(\gamma-\lambda)} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

从而可得

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{m\beta}{(\beta+k)^2(\gamma-\lambda)} & 0 & \frac{m\beta}{(\beta+k)^2(\gamma-\lambda)} \\ -\frac{m\beta}{(\beta+k)^2(\gamma-\lambda)} & 1 & -\frac{\lambda m\beta}{\gamma(\beta+k)^2(\gamma-\lambda)} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{k}\bar{G}^2 - \frac{\lambda}{k}\bar{G}\bar{N} \\ -\frac{mk}{\beta+k} + \frac{m(\bar{G}+k)}{\beta+k+\bar{G}} - \frac{m\beta\bar{G}}{(\beta+k)^2} \\ \alpha\bar{A}\bar{N} \end{pmatrix}.$$

记  $T^{-1}\mathbf{F}=(f_1, f_2, f_3)^T$ , 则有

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \mathbf{B}\mathbf{Z} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \\ \frac{dy_3}{dt} = 0y_3 + f_3, \end{cases} \tag{4}$$

其中  $\mathbf{B}=\text{diag}(-\lambda, -\gamma)$ ,  $\mathbf{Z}=(y_1, y_2)^T$ . 显然  $f_i \in C^2$ ,  $f_i(0,0,0)=0$ ,  $Df_i(0,0,0)=\mathbf{0}$ ,  $i=1,2,3$ . 由中心流形定理可知, 存在一个中心流形  $\mathbf{Z}=\mathbf{h}(y_3)=(h_1(y_3), h_2(y_3))^T$ , 满足

$$\mathbf{B}\mathbf{h}(y_3) + \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{h}(y_3), y_3) \\ f_2(\mathbf{h}(y_3), y_3) \end{pmatrix} = D\mathbf{h}(y_3)f_3(\mathbf{h}(y_3), y_3).$$

假设

$$y_1 = h_1(y_3) = e_2 y_3^2 + e_3 y_3^3 + o(y_3^3), \quad y_2 = h_2(y_3) = r_2 y_3^2 + r_3 y_3^3 + o(y_3^3),$$

则有  $f_3(\mathbf{h}(y_3), y_3) = C_{33}y_3^2 + o(y_3^2)$ , 其中  $C_{33} = \alpha m \beta / (\gamma(\beta + k)^2) > 0$ . 系统(4)零解的动力学行为可由  $f_3(\mathbf{h}(y_3), y_3)$  决定. 由于  $C_{33} > 0$ , 所以  $y_3 = 0$  是不稳定的. 因此, 当  $m = m_0$  时, 系统(2)的平衡解  $E_1$  是不稳定的. 证毕.

### 1.3 正平衡点的稳定性及 Hopf 分支分析

系统(2)在  $E_* = (G_*, A_*, N_*)$  处的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J}(m) := \begin{pmatrix} -\frac{\lambda G_*}{k} & 0 & -\frac{\lambda G_*}{k} \\ \frac{m\beta}{(G_* + \beta)^2} & -\gamma & 0 \\ 0 & \alpha N_* & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$\mathbf{J}(m)$  的特征方程为

$$x^3 + a_2(m)x^2 + a_1(m)x + a_0(m) = 0, \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned} a_2(m) &:= \frac{\lambda G_*}{k} + \gamma = \frac{\lambda \gamma \rho \beta}{k(\alpha m - \gamma \rho)} + \gamma, \\ a_1(m) &:= \frac{\lambda \gamma G_*}{k} = \frac{\lambda \gamma^2 \rho \beta}{k(\alpha m - \gamma \rho)}, \\ a_0(m) &:= \frac{\alpha \beta m \lambda G_* N_*}{k(\beta + G_*)^2} = \frac{\lambda \gamma \rho [k(\alpha m - \gamma \rho) - \beta \gamma \rho]}{k \alpha m}. \end{aligned}$$

当  $m > m_0$  时,  $E_*$  是系统(2)的唯一正平衡解. 定义

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{m : a_1(m)a_2(m) - a_0(m) > 0\}, \\ \Gamma_2 &= \{m : a_1(m)a_2(m) - a_0(m) < 0\}, \\ \Gamma_3 &= \{m : a_1(m)a_2(m) - a_0(m) = 0, a'_1(m)a_2(m) + a_1(m)a'_2(m) - a'_0(m) \neq 0\}. \end{aligned} \tag{7}$$

**引理 1** 假设  $m > m_0$ , 则有下列结论:

- 1) 如果  $m \in \Gamma_1$ , 则  $E_*$  是局部渐近稳定的;
- 2) 如果  $m \in \Gamma_2$ , 则  $E_*$  是不稳定的;
- 3) 如果  $m \in \Gamma_3$ , 则系统(2)在  $E_*$  处产生 Hopf 分支.

证明: 1) 根据 Routh-Hurwitz 准则知,  $E_*$  是局部渐近稳定的当且仅当

$$a_0(m) > 0, \quad a_2(m) > 0, \quad a_1(m)a_2(m) - a_0(m) > 0.$$

由  $m > m_0$ , 有  $a_0(m) > 0$  和  $a_2(m) > 0$ , 因此如果  $m \in \Gamma_1$ , 则  $E_*$  是局部渐近稳定的.

2) 如果  $m \in \Gamma_2$ , 则特征方程(6)会存在具有正实部的根, 因此  $E_*$  在  $\Gamma_2$  中是不稳定的.

3) 假设存在  $m^* \in \Gamma_3$ , 则有  $a_1(m^*)a_2(m^*) - a_0(m^*) = 0$ , 特征方程(6)可化为

$$(x^2(m^*) + a_1(m^*))(x(m^*) + a_2(m^*)) = 0,$$

它有 3 个根:  $x_1 = i\sqrt{a_1(m^*)}$ ,  $x_2 = -i\sqrt{a_1(m^*)}$ ,  $x_3 = -a_2(m^*) < 0$ . 因此特征方程(6)有一对纯虚根

和一个负根. 对任意的  $m(m > m_0)$ , 假设特征方程(6)的根为

$$x_1(m) = \alpha(m) + i\beta(m), \quad x_2(m) = \alpha(m) - i\beta(m), \quad x_3(m) = -a_2(m),$$

则显然有  $\alpha(m^*) = 0$  和  $\beta(m^*) = \sqrt{a_1(m^*)}$ .

下面证明横截条件  $\alpha'(m^*) \neq 0$  成立. 对特征方程(6)关于  $m$  求导, 并分离实部和虚部, 可得

$$\begin{aligned} A_1(m)\alpha'(m) - A_2(m)\beta'(m) + A_3(m) &= 0, \\ A_2(m)\alpha'(m) + A_1(m)\beta'(m) + A_4(m) &= 0, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A_1(m) &= 3\alpha^2(m) + 2a_2(m)\alpha(m) + a_1(m) - 3\beta^2(m), \\ A_2(m) &= 6\alpha(m)\beta(m) + 2a_2(m)\beta(m), \\ A_3(m) &= \alpha^2(m)a_2'(m) + a_1'(m)\alpha(m) + a_0'(m) - a_2'(m)\beta^2(m), \\ A_4(m) &= 2\alpha(m)\beta(m)a_2'(m) + a_1'(m)\beta(m). \end{aligned}$$

注意到  $\alpha(m^*) = 0$  和  $\beta(m^*) = \sqrt{a_1(m^*)}$ , 有

$$\begin{aligned} A_1(m^*) &= -2a_1(m^*), & A_2(m^*) &= 2a_2(m^*)\sqrt{a_1(m^*)}, \\ A_3(m^*) &= a_0'(m^*) - a_2'(m^*)a_1(m^*), & A_4(m^*) &= a_1'(m^*)\sqrt{a_1(m^*)}. \end{aligned}$$

经计算可得

$$\alpha'(m^*) = -\frac{a_1'(m^*)a_2(m^*) + a_1(m^*)a_2'(m^*) - a_0'(m^*)}{2(a_2^2(m^*) + a_1(m^*))}.$$

由于  $a_1(m) > 0, a_2(m) > 0$ , 因此  $\alpha'(m^*) \neq 0$  等价于

$$a_1'(m^*)a_2(m^*) + a_1(m^*)a_2'(m^*) - a_0'(m^*) \neq 0.$$

从而根据 Hopf 分支理论<sup>[10]</sup>可知, 当  $m = m^* \in \Gamma_3$  时, 系统(2)在  $E_*$  处产生 Hopf 分支. 证毕.

根据引理 1, 可得如下关于  $E_*$  的稳定性和 Hopf 分支的定理.

**定理 2** 假设  $m > m_0$  成立, 则:

- 1) 当  $m \in (m_0, m_1)$  时, 系统(2)的平衡解  $E_*$  是局部渐近稳定的;
- 2) 当  $m \in (m_1, +\infty)$  时, 系统(2)的平衡解  $E_*$  是不稳定的;
- 3) 当  $m = m_1$  时, 系统(2)在平衡解  $E_*$  处经历 Hopf 分支.

其中定义  $m_1 := \frac{x_1 + \gamma\rho}{\alpha} > m_0$ .

证明: 经计算可得

$$a_1(m)a_2(m) - a_0(m) = \frac{\lambda\gamma\rho}{k^2 m \alpha (am - \gamma\rho)^2} F(m),$$

其中

$$F(m) = am\rho\beta^2\gamma^2\lambda + kam\beta\gamma^2(am - \gamma\rho) - k(am - \gamma\rho)^2[(am - \gamma\rho) - \gamma\beta\rho].$$

因为  $m > m_0$ , 所以有  $\frac{\lambda\gamma\rho}{k^2 m \alpha (am - \gamma\rho)^2} > 0$ . 因此当  $m \in (m_0, +\infty)$  时,  $a_1(m)a_2(m) - a_0(m)$  的符号与  $F(m)$  的符号相同. 令  $x = am - \gamma\rho$ , 则有

$$F(m) := T(x) = -k^2x^3 + k\beta\gamma(\gamma + \rho)x^2 + (k\beta\gamma^3\rho + \beta^2\gamma^2\lambda\rho)x + \beta^2\gamma^3\lambda\rho^2.$$

由于  $m > m_0$  等价于  $x > \frac{\gamma\rho\beta}{k}$ , 因此下面讨论当  $x \in \left(\frac{\gamma\rho\beta}{k}, +\infty\right)$  时  $T(x)$  根的情况.

显然,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = -\infty$ . 另一方面, 有

$$\begin{aligned} T\left(\frac{\gamma\rho\beta}{k}\right) &= -\frac{\gamma^3\rho^3\beta^3}{k} + \frac{\gamma^3\rho^3\beta^3 + \gamma^4\rho^2\beta^3}{k} + \frac{k\gamma^4\rho^2\beta^2 + \lambda\gamma^3\rho^2\beta^3}{k} + \lambda\gamma^3\rho^2\beta^2 = \\ &\gamma^3\beta^2\rho^2(\gamma + \lambda)\left(\frac{\beta}{k} + 1\right) > 0. \end{aligned}$$

由  $T(x)$  在  $\left(\frac{\gamma\rho\beta}{k}, +\infty\right)$  中的连续性知,  $T(x)$  在  $\left(\frac{\gamma\rho\beta}{k}, +\infty\right)$  中至少存在一个根, 记为  $x_1$ . 此外, 对于多

项式函数  $T(x)$ , 易见  $x^3$  的系数为负, 而  $x^2, x$  和  $x^0$  的系数均为正. 相邻的非零系数符号的变化次数为 1 次, 由笛卡尔符号法则可知,  $T(x)$  最多有一个正根. 根据上述分析可知,  $T(x)$  在  $\left(\frac{\gamma\rho\beta}{k}, +\infty\right)$  中存在唯一的正根. 此外, 根据三次函数图像的性质, 有

$$T(x) \begin{cases} > 0, & x \in \left(\frac{\gamma\rho\beta}{k}, x_1\right), \\ < 0, & x \in (x_1, +\infty), \end{cases} \quad T'(x_1) < 0.$$

根据  $m_1$  的定义, 有

$$a_1(m_1)a_2(m_1) - a_0(m_1) = 0, \\ a_1(m)a_2(m) - a_0(m) \begin{cases} > 0, & m \in (m_0, m_1), \\ < 0, & m \in (m_1, +\infty). \end{cases}$$

因为  $F'(m_1) = \alpha T'(x_1) < 0$ , 从而有

$$a'_1(m_1)a_2(m_1) + a_1(m_1)a'_2(m_1) - a'_0(m_1) = \frac{\lambda\gamma\rho}{k^2 m_1 \alpha (\alpha m_1 - \gamma\rho)^2} F'(m_1) < 0.$$

由式(7)定义可知,  $\Gamma_1 = (m_0, m_1)$ ,  $\Gamma_2 = (m_1, +\infty)$ ,  $\Gamma_3 = \{m_1\}$ . 由引理 1 可得结论. 证毕.

### 1.4 Hopf 分支周期解的稳定性分析

下面讨论系统(2)由 Hopf 分支产生的周期解  $(G^p(t), A^p(t), N^p(t))$  的稳定性. 令  $y_1 = G - G_*$ ,  $y_2 = A - A_*$ ,  $y_3 = N - N_*$ , 则系统(2)可改写为

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \lambda(y_1 + G_*) \left(1 - \frac{y_1 + y_3 + G_* + N_*}{k}\right), \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{m(y_1 + G_*)}{\beta + y_1 + G_*} - \gamma(y_2 + A_*), \\ \frac{dy_3}{dt} = \alpha(y_2 + A_*)(y_3 + N_*) - \rho(y_3 + N_*). \end{cases} \quad (8)$$

系统(8)可记为如下形式:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{J}(m)\mathbf{Y} + \mathbf{F}(\mathbf{Y}), \quad (9)$$

这里  $\mathbf{J}(m)$  由式(5)定义,  $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = (F_1(\mathbf{Y}), F_2(\mathbf{Y}), F_3(\mathbf{Y}))^T$ , 其中

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{Y}) &:= -\frac{\lambda}{k} y_1 (y_1 + y_3), \\ F_2(\mathbf{Y}) &:= \frac{m}{\beta + y_1 + G_*} y_1 - \frac{m\beta}{(\beta + G_*)^2} y_1 + \frac{mG_*}{\beta + y_1 + G_*} - \gamma A_*, \\ F_3(\mathbf{Y}) &:= \alpha y_2 y_3. \end{aligned} \quad (10)$$

如果  $m = m_1$ , 则  $\mathbf{J}(m)$  的特征值为

$$x_1(m_1) = i\omega_0, \quad x_2(m_1) = -i\omega_0, \quad x_3(m_1) = -a_2(m_1) < 0.$$

令  $\xi_1$  和  $\xi_2$  分别为  $\mathbf{J}(m_1)$  的特征值  $i\omega_0$  和  $-a_2(m_1)$  对应的特征向量. 经计算可得

$$\xi_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\gamma - \omega_0 i}{\alpha N_*} \\ -1 - \frac{k\omega_0 i}{\lambda G_*} \end{pmatrix}, \quad \xi_2 := \begin{pmatrix} \frac{\lambda G_*}{k\gamma} \\ -\frac{a_2(m_1)}{\alpha N_*} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

定义

$$\mathbf{P} := (\text{Re}(\xi_1), -\text{Im}(\xi_1), \xi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\lambda G_*}{k\gamma} \\ \frac{\gamma}{\alpha N_*} & \frac{\omega_0}{\alpha N_*} & -\frac{a_2(m_1)}{\alpha N_*} \\ -1 & \frac{k\omega_0}{\lambda G_*} & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\det|\mathbf{P}|} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{\omega_0}{\alpha N_*} + \frac{k\omega_0 a_2(m_1)}{\lambda \alpha N_* G_*}, & p_{12} &= \frac{\omega_0}{\gamma}, & p_{13} &= -\frac{\lambda \omega_0 G_*}{k\gamma \alpha N_*}, \\ p_{21} &= \frac{a_2(m_1) - \gamma}{\alpha N_*}, & p_{22} &= 1 + \frac{\lambda G_*}{k\gamma}, & p_{23} &= \frac{a_2(m_1)}{\alpha N_*} + \frac{\lambda G_*}{k\alpha N_*}, \\ p_{31} &= \frac{k\gamma \omega_0}{\lambda \alpha N_* G_*} + \frac{\omega_0}{\alpha N_*}, & p_{32} &= -\frac{k\omega_0}{\lambda G_*}, & p_{33} &= \frac{\omega_0}{\alpha N_*}, \\ \det|\mathbf{P}| &= \frac{\omega_0}{\alpha N_*} \left( 3 + \frac{k\gamma}{\lambda G_*} + \frac{\lambda G_*}{k\gamma} \right). \end{aligned}$$

令  $\mathbf{Y} = \mathbf{PZ}$ , 其中  $\mathbf{Z} := (z_1, z_2, z_3)^\top$ , 则系统(9)可写为

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{J}(m_1) \mathbf{PZ} + \mathbf{G}(\mathbf{Z}),$$

其中

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{J}(m_1) \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2(m_1) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{Z}) := (G_1(\mathbf{Z}), G_2(\mathbf{Z}), G_3(\mathbf{Z}))^\top = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{PZ}).$$

记  $\mathbf{F}(\mathbf{PZ}) = (f_1(\mathbf{Z}), f_2(\mathbf{Z}), f_3(\mathbf{Z}))^\top$ , 则由式(10), 可得

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{Z}) &= -\frac{\lambda}{k} \left( z_1 + \frac{\lambda G_*}{k\gamma} z_3 \right) \left( \frac{k\omega_0}{\lambda G_*} z_2 + \left( 1 + \frac{\lambda G_*}{k\gamma} \right) z_3 \right), \\ f_2(\mathbf{Z}) &= \frac{m_1 \left( G_* + z_1 + \frac{\lambda G_*}{k\gamma} z_3 \right)}{\beta + G_* + z_1 + \frac{\lambda G_*}{k\gamma} z_3} - \gamma A_* - \frac{m_1 \beta}{(\beta + G_*)^2} \left( z_1 + \frac{\lambda G_*}{k\gamma} z_3 \right), \\ f_3(\mathbf{Z}) &= \frac{1}{N_*} (\gamma z_1 + \omega_0 z_2 - a_2(m_1) z_3) \left( -z_1 + \frac{k\omega_0}{\lambda G_*} z_2 + z_3 \right). \end{aligned}$$

进一步计算可得

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{Z}) &= \frac{p_{11} f_1(\mathbf{Z}) + p_{12} f_2(\mathbf{Z}) + p_{13} f_3(\mathbf{Z})}{\det|\mathbf{P}|}, \\ G_2(\mathbf{Z}) &= \frac{p_{21} f_1(\mathbf{Z}) + p_{22} f_2(\mathbf{Z}) + p_{23} f_3(\mathbf{Z})}{\det|\mathbf{P}|}, \\ G_3(\mathbf{Z}) &= \frac{p_{31} f_1(\mathbf{Z}) + p_{32} f_2(\mathbf{Z}) + p_{33} f_3(\mathbf{Z})}{\det|\mathbf{P}|}. \end{aligned}$$

为研究 Hopf 分支周期解的稳定性, 需要在  $m = m_1$  和  $(z_1, z_2, z_3) = (0, 0, 0)$  时计算以下变量<sup>[10-11]</sup>:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{1}{4} [(G_1)_{z_1 z_1} + (G_1)_{z_2 z_2} + i((G_2)_{z_1 z_1} + (G_2)_{z_2 z_2})], \\ g_{02} &= \frac{1}{4} [(G_1)_{z_1 z_1} - (G_1)_{z_2 z_2} - 2(G_2)_{z_1 z_2} + i((G_2)_{z_1 z_1} - (G_2)_{z_2 z_2} + 2(G_1)_{z_1 z_2})], \\ g_{20} &= \frac{1}{4} [(G_1)_{z_1 z_1} - (G_1)_{z_2 z_2} + 2(G_2)_{z_1 z_2} + i((G_2)_{z_1 z_1} - (G_2)_{z_2 z_2} - 2(G_1)_{z_1 z_2})], \\ \tau_{11} &= \frac{1}{4a_2(m_1)} ((G_3)_{z_1 z_1} + (G_3)_{z_2 z_2}), \\ \tau_{20} &= \frac{1}{4} (a_2(m_1) + 2i\omega_0)^{-1} ((G_3)_{z_1 z_1} - (G_3)_{z_2 z_2} - 2i(G_3)_{z_1 z_2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{110} &= \frac{1}{2}[(G_1)_{z_1 z_3} + (G_2)_{z_2 z_3} + i((G_2)_{z_1 z_3} - (G_1)_{z_2 z_3})], \\
G_{101} &= \frac{1}{2}[(G_1)_{z_1 z_3} - (G_2)_{z_2 z_3} + i((G_2)_{z_1 z_3} + (G_1)_{z_2 z_3})], \\
G_{21} &= \frac{1}{8}[(G_1)_{z_1 z_1 z_1} + (G_1)_{z_1 z_2 z_2} + (G_2)_{z_1 z_1 z_2} + (G_2)_{z_2 z_2 z_2} + \\
&\quad i((G_2)_{z_1 z_1 z_1} + (G_2)_{z_1 z_2 z_2} - (G_1)_{z_1 z_1 z_2} - (G_1)_{z_2 z_2 z_2})], \\
g_{21} &= G_{21} + 2G_{110}\tau_{11} + G_{101}\tau_{20}.
\end{aligned}$$

由文献[10], 定义第一 Lyapunov 系数  $c_1(m_1)$  为

$$c_1(m_1) = \frac{i}{2\omega_0} \left( g_{11}g_{20} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3} \right) + \frac{g_{21}}{2}.$$

因此

$$\operatorname{Re}(c_1(m_1)) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(g_{21}) - \frac{1}{2\omega_0}(\operatorname{Re}(g_{11})\operatorname{Im}(g_{20}) + \operatorname{Im}(g_{11})\operatorname{Re}(g_{20})). \tag{11}$$

由定理 2 的证明, 可知

$$a_1(m_1)a_2'(m_1) + a_1'(m_1)a_2(m_1) - a_0'(m_1) < 0,$$

故  $\alpha'(m_1) > 0$ . 综上可得如下定理.

**定理 3** 对于系统(2)的 Hopf 分支周期解, 有如下结论:

- 1) 如果  $\operatorname{Re}(c_1(m_1)) < 0$ , 则 Hopf 分支周期解是轨道渐近稳定的, 且分支方向是向前的;
- 2) 如果  $\operatorname{Re}(c_1(m_1)) > 0$ , 则 Hopf 分支周期解是不稳定的, 且分支方向是向后的.

## 2 反应扩散系统的动力学行为

文献[12]研究表明, 扩散能使一个系统的稳态解失去稳定性, 这种不稳定性即为由扩散引起的不稳定性或 Turing 不稳定性. 下面讨论在常微分系统(2)中稳定的常数平衡解, 当扩散介入后其稳定性是否发生变化, 即研究系统(1)常数稳态解是否会发生 Turing 不稳定性.

**定理 4** 对于系统(1), 有如下结论:

- 1) 如果  $m \in (0, m_0)$ , 则系统(1)的平衡解  $E_1$  是局部渐近稳定的;
- 2) 如果  $m \in (m_0, m_1)$ , 则系统(1)的平衡解  $E_*$  是局部渐近稳定的.

证明: 系统(1)在  $E_1$  处线性化系统系数矩阵为

$$\bar{J}(E_1) := \begin{pmatrix} -\lambda + d_G \Delta & 0 & -\lambda \\ \frac{m\beta}{(\beta+k)^2} & -\gamma + d_A \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mak}{\gamma(\beta+k)} - \rho + d_N \Delta \end{pmatrix},$$

根据文献[13-14]可知,  $\bar{J}(E_1)$  的特征值可由  $\bar{J}_n$  确定:

$$\bar{J}_n := \begin{pmatrix} -\lambda - d_G \mu_n & 0 & -\lambda \\ \frac{m\beta}{(\beta+k)^2} & -\gamma - d_A \mu_n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mak}{\gamma(\beta+k)} - \rho - d_N \mu_n \end{pmatrix},$$

其中  $0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n < \dots$  为  $-\Delta$  在区域  $\Omega$  上满足齐次 Neumann 边界条件的特征值. 当  $m \in (0, m_0)$  时, 对任意  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\bar{J}_n$  的特征值为

$$-\lambda - d_G \mu_n < 0, \quad -\gamma - d_A \mu_n < 0, \quad \frac{mak - k\gamma\alpha - \beta\gamma\rho}{\gamma(\beta+k)} - d_N \mu_n < 0.$$

所以系统(1)的平衡解  $E_1$  是局部渐近稳定的.

系统(1)在  $E_*$  处线性化系统系数矩阵为

$$\bar{J}^* := \begin{pmatrix} a_{11}(m) + d_G \Delta & 0 & a_{13}(m) \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) + d_A \Delta & 0 \\ 0 & a_{32}(m) & d_N \Delta \end{pmatrix}.$$

同理,  $\bar{J}(E_*)$  的特征值可由  $\bar{J}_n^*$  确定:

$$\bar{J}_n^* := \begin{pmatrix} a_{11}(m) - d_G \mu_n & 0 & a_{13}(m) \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) - d_A \mu_n & 0 \\ 0 & a_{32}(m) & -d_N \mu_n \end{pmatrix},$$

$\bar{J}_n^*$  的特征方程为

$$x^3 + a_{2,n}(m)x^2 + a_{1,n}(m)x + a_{0,n}(m) = 0,$$

其中

$$a_{2,n}(m) := (d_G + d_A + d_N)\mu_n + a_2(m),$$

$$a_{1,n}(m) := (d_G d_A + d_G d_N + d_A d_N)\mu_n^2 -$$

$$[a_{22}(m)d_G + a_{11}(m)d_A + (a_{11}(m) + a_{22}(m))d_N]\mu_n + a_1(m),$$

$$a_{0,n}(m) := d_G d_A d_N \mu_n^3 - (d_G d_N a_{22}(m) + d_A d_N a_{11}(m))\mu_n^2 + (a_{11}(m)a_{22}(m)d_N)\mu_n + a_0(m),$$

这里  $a_2(m)$ ,  $a_1(m)$  和  $a_0(m)$  与式(6)相同. 当  $m \in (m_0, m_1)$  时,

$$a_0(m) > 0, \quad a_1(m) > 0, \quad a_2(m) > 0, \quad a_1(m)a_2(m) - a_0(m) > 0.$$

注意到  $d_G > 0$ ,  $d_A > 0$ ,  $d_N > 0$ ,  $a_{11}(m) < 0$ ,  $a_{22}(m) < 0$ , 可得

$$a_{2,n}(m) > 0, \quad a_{1,n}(m) > 0, \quad a_{0,n}(m) > 0.$$

直接计算可得

$$a_{2,n}(m)a_{1,n}(m) - a_{0,n}(m) := h_1 \mu_n^3 + h_2 \mu_n^2 + h_3 \mu_n + h_4,$$

其中

$$h_1 = (d_G + d_A)(d_G + d_N)(d_A + d_N),$$

$$h_2 = -(d_A + d_N)(2d_G + d_A + d_N)a_{11}(m) - a_{22}(m)(d_G + d_N)(d_G + 2d_A + d_N),$$

$$h_3 = [2a_{11}(m)a_{22}(m) + a_{22}^2(m)]d_G + [2a_{11}(m)a_{22}(m) + a_{11}^2(m)]d_A + [(a_{11}(m) + a_{22}(m))^2]d_N,$$

$$h_4 = a_2(m)a_1(m) - a_0(m).$$

当  $m \in (m_0, m_1)$  时, 易得  $h_i > 0 (i=1, 2, 3, 4)$ , 从而  $a_{2,n}(m)a_{1,n}(m) - a_{0,n}(m) > 0$ . 所以当  $m \in (m_0, m_1)$  时, 系统(1)的平衡解  $E_*$  是局部渐近稳定的. 证毕.

### 3 数值模拟

下面通过数值模拟验证上述理论分析结果. 选取如下参数值:

$$\lambda = 0.48, \quad \beta = 0.1, \quad \gamma = 2.185, \quad \alpha = 0.6, \quad k = 1, \quad \rho = 0.9.$$

经计算得  $m_0 = 3.6025$ ,  $m_1 = 5.5891$ .

对于常微分系统(2), 根据定理 1 和定理 2 知, 若  $m \in (0, 3.6025)$ , 则系统(2)的平衡解  $E_1$  是局部渐近稳定的; 若  $m \in (3.6025, 5.5891)$ , 则系统(2)的平衡解  $E_*$  是局部渐近稳定的; 若  $m > 5.5891$ , 则系统(2)的平衡解  $E_*$  是不稳定的. 当  $m = 5.5891$  时, 系统(2)会产生 Hopf 分支, 在  $E_*$  附近分支出一族周期解, 此时  $E_* = (0.1418, 1.5, 0.8582)$ . 利用 1.4 节中给出的计算公式, 计算可得:

$$g_{11} = -0.1020 + 0.0365i, \quad g_{02} = 0.2116 - 0.3325i,$$

$$g_{20} = -0.0410 + 0.1411i, \quad g_{21} = -0.0425 - 0.0074i,$$

$$\tau_{11} = 0.1610, \quad \tau_{20} = -0.1508 + 0.0500i,$$

$$G_{21} = -0.0529 + 0.0913i, \quad G_{110} = -0.3312 + 0.0954i,$$

$$G_{101} = -0.2336 + 0.000036i.$$

从而  $\text{Re}(c_1(m_1)) = -0.0416 < 0$ . 由定理 3 知, 分支周期解是轨道渐近稳定的, 且分支方向是向前的. 取  $m = 5.6$ , 可观察到系统(2)存在周期解, 如图 1 所示. 选取  $d_G = 10$ ,  $d_A = 1$ ,  $d_N = 20$ . 当  $m = 2 \in$

(0,  $m_0$ )时, 根据定理 4, 系统(1)的平衡解  $E_1 = (1, 0.832\ 1, 0)$  是局部渐近稳定的, 如图 2 所示. 如果选取  $m = 4 \in (m_0, m_1)$ , 根据定理 4 知, 系统(1)的平衡解  $E_* = (0.453\ 6, 1.5, 0.546\ 4)$  是局部渐近稳定的, 如图 3 所示.

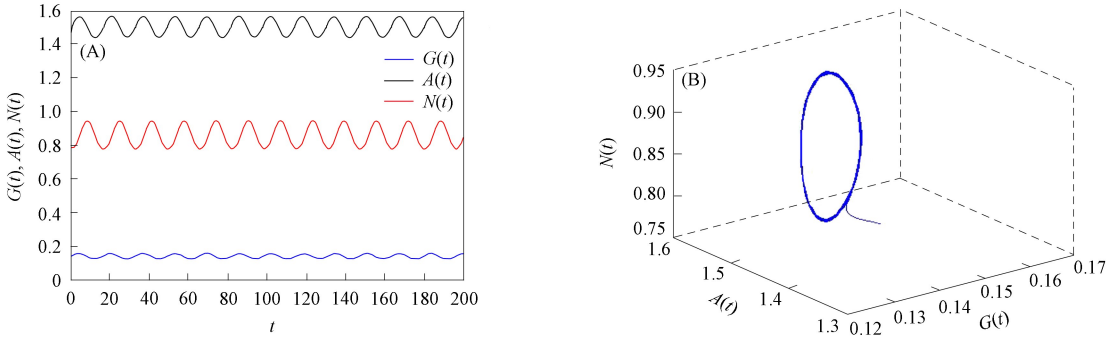


图 1 当  $m = 5.6$  时系统(2)产生的稳定周期解

Fig. 1 Stable periodic solutions generated by system (2) when  $m = 5.6$

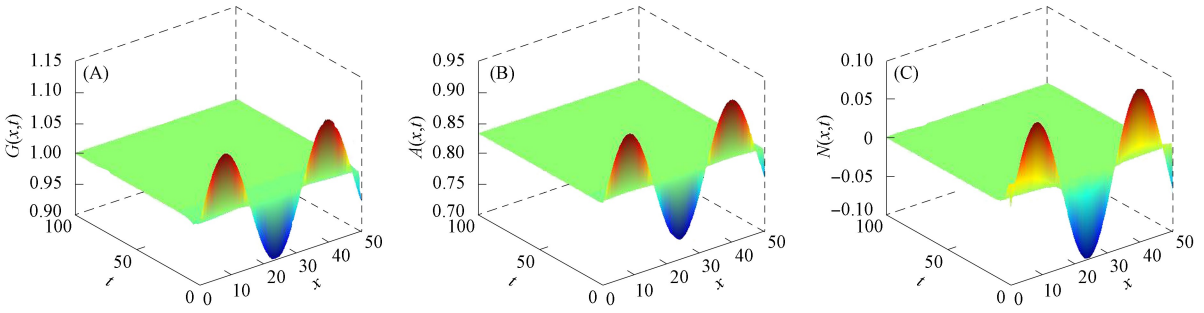


图 2 当  $m = 2$  时系统(1)的平衡解  $E_1 = (1, 0.832\ 1, 0)$  的局部渐近稳定性

Fig. 2 Local asymptotic stability of equilibrium solution  $E_1 = (1, 0.832\ 1, 0)$  of system (1) when  $m = 2$

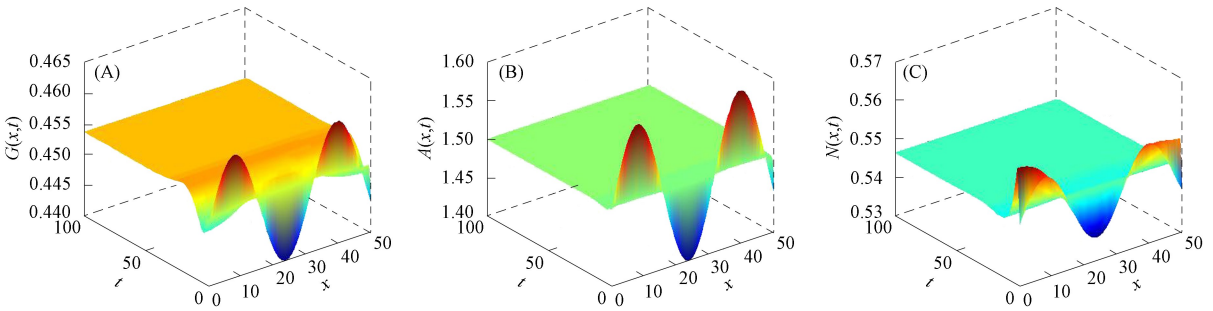


图 3 当  $m = 4$  时系统(1)平衡解  $E_* = (0.453\ 6, 1.5, 0.546\ 4)$  的局部渐近稳定性

Fig. 3 Local asymptotic stability of equilibrium solution  $E_* = (0.453\ 6, 1.5, 0.546\ 4)$  of system (1) when  $m = 4$

综上, 本文在齐次 Neumann 边界条件下研究了一类 PDGF 诱导的肿瘤反应扩散模型. 首先, 通过以趋化剂产生的速率  $m$  为分支参数, 给出了该模型在正平衡点附近 Hopf 分支的存在性, 并通过规范型理论和中心流形定理给出了判断由 Hopf 分支产生的周期解稳定性的公式. 其次, 对反应扩散系统的研究表明, 当扩散介入后稳态解不会产生 Turing 不稳定性. 因此经典的自扩散不能导致 Turing 斑图的出现, 数值模拟也证实了该结论.

参 考 文 献

[1] 吴菲, 林国桢, 张晋昕. 我国恶性肿瘤发病现状及趋势 [J]. 中国肿瘤, 2012, 21(2): 81-85. (WU F, LIN G Z, ZHANG J X. An Overview of Cancer Incidence and Trend in China [J]. China Cancer, 2012, 21(2): 81-85.)

- [2] 杨艳红, 伏升茂. 一类带时滞的肿瘤免疫模型的 Hopf 分支 [J]. 数学进展, 2021, 50(3): 383-398. (YANG Y H, FU S M. Hopf Bifurcation of a Tumor Immune Model with Time Delay [J]. Advances in Mathematics, 2021, 50(3): 383-398.)
- [3] EFTIMIE R, BRAMSON J L, EARN D J D. Interactions between the Immune System and Cancer: A Brief Review of Non-spatial Mathematical Models [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2011, 73: 2-32.
- [4] LEDER K, PITTER K, LAPLANT Q, et al. Mathematical Modeling of PDGF-Driven Glioblastoma Reveals Optimized Radiation Dosing Schedules [J]. Cell, 2014, 156(3): 603-616.
- [5] NIU B, ZENG X Y, PHAN T A, et al. Mathematical Modeling of PDGF-Driven Glioma Reveals the Dynamics of Immune Cells Infiltrating into Tumors [J]. Neoplasia, 2020, 22(9): 323-332.
- [6] PHAN T A, NGUYEN H D, TIAN J P. Deterministic and Stochastic Modeling for PDGF-Driven Gliomas Reveals a Classification of Gliomas [J]. Journal of Mathematical Biology, 2021, 83(2): 22-1-22-51.
- [7] 刘琪, 常笑源. 带有 Allee 效应的扩散时滞单种群模型的分支分析 [J]. 东北师大学报(自然科学版), 2023, 55(2): 11-15. (LIU Q, CHANG X Y. Bifurcation Analysis of a Diffusive Single Population Model with Allee Effect and Time Delay [J]. Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition), 2023, 55(2): 11-15.)
- [8] 高鹤, 李秀玲. 二维具时滞捕食-食饵共生模型的 Hopf 分支 [J]. 东北师大学报(自然科学版), 2024, 56(1): 23-28. (GAO H, LI X L. Hopf Bifurcation of a Two-Dimensional Predator-Prey Symbiotic Model with Time Delay [J]. Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition), 2024, 56(1): 23-28.)
- [9] 赵洽弛, 李杰梅. 一类肿瘤-免疫模型的稳定性与 Hopf 分支分析 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2024, 62(2): 189-196. (ZHAO H C, LI J M. Stability and Hopf Bifurcation Analysis of a Class of Tumor-Immune Models [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2024, 62(2): 189-196.)
- [10] HASSARD D D, KAZARINOFF N D, WAN Y H. Theory and Applications of Hopf Bifurcation [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981: 86-91.
- [11] WANG M, YI F. On the Dynamics of the Diffusive Field-Noyes Model for the Belousov-Zhabotinskii Reaction [J]. Journal of Differential Equations, 2022, 318(13): 443-479.
- [12] TURING A M. The Chemical Basis of Morphogenesis [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series B: Biological Sciences, 1952, 237: 37-72.
- [13] JANG J, NI W M, TANG M. Global Bifurcation and Structure of Turing Patterns in the 1-D Lengyel-Epstein Model [J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2004, 16(2): 297-320.
- [14] YI F, WEI J, SHI J. Bifurcation and Spatiotemporal Patterns in a Homogenous Diffusive Predator-Prey System [J]. Journal of Differential Equations, 2009, 246(5): 1944-1977.

(责任编辑: 李琦)