doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023516

二阶非线性抛物方程的 B 样条有限元法

秦丹丹[1]，王大铭[1]，黄文竹[2]
(1. 空军航空大学 基础部，长春 130022；2. 贵州医科大学 生物与工程学院，贵阳 550025)

摘要： 首先，用二次 B 样条有限元法求解 Fisher-Kolmogorov(FK)方程，证明半离散格式与全离散格式解的稳定性与收敛性；其次，用 Crank-Nicolson 方法离散时间变量，得到近似解的收敛阶为 $O((\Delta t)^2+h^3)$；最后，用数值算例验证了理论分析结果及 B 样条有限元法的有效性.

关键词： Fisher-Kolmogorov 方程；二次 B 样条有限元法；稳定性；收敛性
中图分类号： O241.82　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671-5489(2024)04-0878-08

B-Spline Finite Element Method of Second Order Nonlinear Parabolic Equation

QIN Dandan[1], WANG Daming[1], HUANG Wenzhu[2]
(1. *Department of Foundation, Aviation University of Air Force, Changchun* 130022, *China*;
2. *School of Biology and Engineering, Guizhou Medical University, Guiyang* 550025, *China*)

Abstract: Firstly, we uesd the quadratic B-spline finite element method to solve the Fisher-Kolmogorov (FK) equation, and proved the stability and convergence of solutions for the semi-discrete scheme and the fully discrete scheme. Secondly, the time variable was discretized by using the Crank-Nicolson method and the convergence order of the approximate solution was $O((\Delta t)^2+h^3)$. Finally, the numerical example verified theoretical analysis results and the effectiveness of the B-spline finite element method.

Keywords: Fisher-Kolmogorov equation; quadratic B-spline finite element method; stability; convergence

B 样条是具有紧支集的分段多项式函数，由于其只有一种类型的基函数，因此有限元刚度矩阵对称稀疏且规模小于 Lagrange 和 Hermite 型有限元，从而节省存储空间，提高计算速度. 此外，B 样条的光滑性优于 Lagrange 和 Hermite 型函数. 基于上述因素，B 样条常被选为有限元基函数[1-4].

本文讨论 Fisher-Kolmogorov(FK)方程[5-6]的二次 B 样条有限元法，FK 方程研究了生物种群扩散与适应间的相互关系，形如：

$$u_t-\Delta u+u^3-u=0,\qquad (x,t)\in\Omega\times(0,T].$$

文献[7]和文献[8]将四阶导数项加入 FK 方程得到了扩展的 Fisher-Kolmogorov(EFK)方程.

1　半离散格式

考虑 FK 方程的初边值问题：

收稿日期： 2023-12-01.

第一作者简介： 秦丹丹(1982—)，女，汉族，博士，副教授，从事偏微分方程数值解的研究，E-mail: qdandan66@163.com. **通信作者简介：** 黄文竹(1983—)，女，汉族，博士，副教授，从事偏微分方程数值解的研究，E-mail: hwenzhu@gmc.edu.cn.

基金项目： 贵州省卫健委科技基金(批准号：gzwkj2023-591).

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u^3 - u = 0, & (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1). \end{cases} \tag{1}$$

记 $I=[0,1]$，$Du=\dfrac{\partial u}{\partial x}$，则问题(1)的变分形式是：求 $u=u(\cdot,t)\in H_0^1(I)(0\leqslant t\leqslant T)$，满足

$$\begin{cases} (u_t, v) + (Du, Dv) + (u^3 - u, v) = 0, & \forall\, v \in H_0^1(I), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in I. \end{cases} \tag{2}$$

整数节点的二次 B 样条函数表达式为

$$B_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2, & x \in [0,1], \\ -x^2 + 3x - \dfrac{3}{2}, & x \in [1,2], \\ \dfrac{1}{2}(x-3)^2, & x \in [2,3], \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

取均匀剖分 $0=x_0<x_1<\cdots<x_L=1$，在左右端点外分别引入虚拟节点 x_{-2},x_{-1} 和 x_{L+1},x_{L+2}。令 $\varphi_i(x)=B_2\left(\dfrac{x-x_i}{h}\right)$，得到以$\{x_i\}$为节点的 B 样条。为处理零边值条件，用线性变换修正基函数得到 $\{2\varphi_{-2}(x),\varphi_{-1}(x)-\varphi_{-2}(x),\varphi_0(x),\cdots,\varphi_{L-3}(x),\varphi_{L-2}(x)-\varphi_{L-1}(x),2\varphi_{L-1}(x)\}$，修正后的函数为有限元空间 U_h 的基函数，仍记为$\{\varphi_i(x)\}$。问题(1)的近似解 $u_h(x,t)\in U_h$ 表示为

$$u_h(x,t) = \sum_{i=-1}^{L-2} \mu_i(t)\varphi_i(x),$$

其中 $\mu_i(t)$是时间变量的函数。$u_h\in C^{(1)}$ 且 $u_h(0,t)=u_h(1,t)=0$，所以 $U_h\subset H_0^1(I)$。

问题(2)的 B 样条有限元半离散格式是：求 $u_h=u_h(\cdot,t)\in U_h(0<t\leqslant T)$，满足

$$\begin{cases} (u_{h,t}, v_h) + (Du_h, Dv_h) + (u_h^3 - u_h, v_h) = 0, & \forall\, v_h \in U_h, \\ (u_h(x,0), v_h) = (u_{0h}(x), v_h), & \forall\, v_h \in U_h. \end{cases} \tag{3}$$

引入双线性投影算子 R_h：$H_0^1\to U_h$，满足

$$a(u - R_h u, v_h) = (D(u - R_h u), Dv_h) = 0, \qquad \forall\, v_h \in U_h, \tag{4}$$

则式(4)的解 $R_h u$ 唯一确定。假设弱形式(2)的解 $u\in H^3(I)$，则有如下估计[9]：

$$\| u - R_h u \| + h \| u - R_h u \|_1 \leqslant Ch^3 \| u \|_3. \tag{5}$$

本文分别用 $\|\cdot\|,\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_3,\|\cdot\|_{L^4}$ 表示 L^2,H^1,H^3,L^4 范数。

定理 1 对于 $u_{0h}\in H_0^1(I)\cap L^4(I)$，半离散问题(3)存在唯一解 $u_h\in U_h$，满足

$$\| u_h \|_1 \leqslant C \| u_{0h} \|_1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$

其中正常数 C 与 T 有关，与空间步长 h 无关。

证明：在半离散问题(3)中，取 $v_h=u_h$ 得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u_h \|^2 + \| Du_h \|^2 + \| u_h \|_{L^4}^4 \leqslant \| u_h \|^2. \tag{7}$$

显然，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u_h \|^2\leqslant 2\| u_h \|^2$，求解后有$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-2t}\| u_h \|^2)\leqslant 0$，说明 $\mathrm{e}^{-2t}\| u_h \|^2$ 单调递减，因此有 $\| u_h \|^2\leqslant \mathrm{e}^{2t}\| u_{0h} \|^2\leqslant \mathrm{e}^{2T}\| u_{0h} \|^2(0\leqslant t\leqslant T)$，即在 L^2 模下半离散问题的解有界：

$$\| u_h \|^2 \leqslant C \| u_{0h} \|^2, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{8}$$

对式(7)关于时间变量 t 积分得

$$\| u_h \|^2 - \| u_{0h} \|^2 + 2\int_0^t \| Du_h \|^2 \mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^t \| u_h \|^2 \mathrm{d}t.$$

又由式(8)知

$$\int_0^t \| Du_h \|^2 \mathrm{d}t \leqslant C \| u_{0h} \|^2. \tag{9}$$

在式(3)中, 令 $v_h = u_{h,t}$, 则

$$\| u_{h,t} \|^2 + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| Du_h \|^2 + (u_h^3 - u_h, u_{h,t}) = 0. \tag{10}$$

定义能量函数

$$E_h(t) = \frac{1}{2} \| Du_h \|^2 + \frac{1}{4}((1 - |u_h|^2)^2, 1). \tag{11}$$

对 $E_h(t)$ 关于时间变量 t 求导, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_h(t) = (Du_h, Du_{h,t}) + (u_h^3 - u_h, u_{h,t}).$$

由式(10)可推出 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_h(t) = -\| u_{h,t} \|^2$. 可见, $E_h(t)$ 单调递减, 即 $E_h(t) \leqslant E_h(0)$. 由定义式(11)知

$$\frac{1}{2} \| Du_h \|^2 + \frac{1}{4} \| u_h \|_{L^4}^4 - \frac{1}{2} \| u_h \|^2 \leqslant \frac{1}{2} \| Du_{0h} \|^2 + \frac{1}{4} \| u_{0h} \|_{L^4}^4 - \frac{1}{2} \| u_{0h} \|^2.$$

再由式(8)可得

$$\frac{1}{2} \| Du_h \|^2 + \frac{1}{4} \| u_h \|_{L^4}^4 + \frac{1}{2} \| u_{0h} \|^2 \leqslant \frac{1}{2} \| Du_{0h} \|^2 + \frac{1}{4} \| u_{0h} \|_{L^4}^4 + \frac{C}{2} \| u_{0h} \|^2,$$

整理后得

$$\| Du_h \|^2 \leqslant \| Du_{0h} \|^2 + \frac{1}{2} \| u_{0h} \|_{L^4}^4 + C \| u_{0h} \|^2.$$

从而得到了近似解的 H^1 半模有界性:

$$\| Du_h \|^2 \leqslant C \| Du_{0h} \|^2, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{12}$$

这里正常数 C 与空间步长无关. 由式(8)和式(12)知式(6)成立. 证毕.

定理2 设 u 和 u_h 分别是弱形式(2)和半离散问题(3)的解, 并且有 $u_0 \in H^3(I)$, $u, u_t \in L^2(0, T; H^3(I))$, 则当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时, 数值解的 L^2 模有如下误差估计:

$$\| u - u_h \| \leqslant \| u_0 - u_{0h} \| + Ch^3 \left(\| u_0 \|_3^2 + \int_0^t (\| u \|_3^2 + \| u_t \|_3^2) \mathrm{d}\tau \right)^{1/2}, \tag{13}$$

其中正常数 C 与步长 h 无关.

证明: 记 $\theta(t) = R_h u - u_h$, $\rho(t) = u - R_h u$, 则 $u - u_h = \theta(t) + \rho(t)$, 只估计 $\| \theta(t) \|$. 由式(2)~(4)得

$$(\theta_t, v_h) + (D\theta, Dv_h) = -(u^3 - u_h^3, v_h) + (u - u_h, v_h) - (\rho_t, v_h). \tag{14}$$

在式(14)中, 取 $v_h = \theta$, 则

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \theta \|^2 + \| D\theta \|^2 \leqslant |-(u^3 - u_h^3, \theta)| + |(\theta + \rho, \theta)| + |(\rho_t, \theta)|.$$

由 Sobolev 空间嵌入定理知, $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$, 则 $|u|_\infty \leqslant C \| u \|_1$, $|u_h|_\infty \leqslant C \| u_h \|_1$. 由 ε-不等式知

$$\begin{aligned} |-(u^3 - u_h^3, \theta)| &= |-((|u|^2 + uu_h + |u_h|^2)\theta, \theta + \rho)| \leqslant \\ & \big| |u|^2 + uu_h + |u_h|^2 \big|_\infty \cdot \| \theta \| \cdot \| \theta + \rho \| \leqslant \\ & C \| \theta \| (\| \theta + \rho \|) \leqslant C(\| \theta \|^2 + \| \rho \|^2). \end{aligned} \tag{15}$$

此外, 易得

$$|(\theta + \rho, \theta)| \leqslant C(\| \theta \|^2 + \| \rho \|^2), \qquad |(\rho_t, \theta)| \leqslant C(\| \rho_t \|^2 + \| \theta \|^2). \tag{16}$$

由式(15),(16)可知

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \theta \|^2 + \| D\theta \|^2 \leqslant C(\| \theta \|^2 + \| \rho \|^2 + \| \rho_t \|^2).$$

根据连续的 Gronwall 定理知

$$\| \theta \|^2 \leqslant C\left(\| \theta(0) \|^2 + \int_0^t (\| \rho \|^2 + \| \rho_t \|^2) \mathrm{d}\tau \right). \tag{17}$$

由三角不等式得

$$\|\theta(0)\| = \|u_0 - u_{0h} + R_h u_0 - u_0\| \leqslant \|u_0 - u_{0h}\| + \|\rho(0)\|, \tag{18}$$

所以当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时，联立式(5)，(17)，(18)知式(13)成立．证毕．

定理 3　设 u 是变分形式(2)的解，u_h 是半离散问题(3)的解，$u_0 \in H^3(I)$，$u, u_t \in L^2(0, T; H^3(I))$，则近似解的误差估计如下：

$$|u - u_h|_1 \leqslant |u_0 - u_{0h}|_1 + Ch^2\left(\|u_0\|_3^2 + h^2\int_0^t (\|u\|_3^2 + \|u_t\|_3^2)\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}, \tag{19}$$

这里正常数 C 与步长 h 无关．

证明：在式(14)中，选取 $v_h = \theta_t$，则

$$\|\theta_t\|^2 + (D\theta, D\theta_t) = -(u^3 - u_h^3, \theta_t) + (u - u_h, \theta_t) - (\rho_t, \theta_t).$$

结合导数运算性质和 Cauchy 不等式，可得

$$\|\theta_t\|^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D\theta\|^2 \leqslant 2\|u^3 - u_h^3\|^2 + 2\|u - u_h\|^2 + 2\|\rho_t\|^2 + \frac{3}{8}\|\theta_t\|^2.$$

由 Sobolev 空间嵌入定理知

$$\|u^3 - u_h^3\| = \|(u^2 + uu_h + u_h^2)(u - u_h)\| \leqslant$$
$$(|u|_\infty^2 + |u|_\infty |u_h|_\infty + |u_h|_\infty^2)\|u - u_h\| \leqslant C(\|\theta\| + \|\rho\|),$$

进而得

$$\|\theta_t\|^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D\theta\|^2 \leqslant C(\|\theta\|^2 + \|\rho\|^2 + \|\rho_t\|^2) + \frac{3}{8}\|\theta_t\|^2. \tag{20}$$

对式(20)积分后有

$$\|D\theta\|^2 \leqslant \|D\theta(0)\|^2 + C\int_0^t (\|\theta\|^2 + \|\rho\|^2 + \|\rho_t\|^2)\mathrm{d}\tau. \tag{21}$$

再由三角不等式可得

$$\|D\theta(0)\| \leqslant \|Du_0 - Du_{0h}\| + \|DR_h u_0 - Du_0\|. \tag{22}$$

联立式(21)和式(22)，得到近似解的误差估计式(19)．证毕．

2　全离散格式

问题(2)的 Crank-Nicolson 全离散格式为：求 $u_h^n = u_h(x, t_n) \in U_h (n = 1, 2, \cdots, N)$，满足

$$(\partial_t u_h^n, v_h) + \left(\frac{Du_h^n + Du_h^{n-1}}{2}, Dv_h\right) + \left(\frac{H(u_h^n) - H(u_h^{n-1})}{u_h^n - u_h^{n-1}}, v_h\right) = 0, \tag{23}$$

其中 N 为时间剖分数，$\Delta t = T/N$，$t_n = n\Delta t$，$\partial_t u_h^n = (u_h^n - u_h^{n-1})/\Delta t$，

$$H(u_h^n) = \frac{1}{4}(1 - |u_h^n|^2)^2. \tag{24}$$

定理 4　设 $u_h^0 \in H_0^1(I) \cap L^4(I)$，则全离散问题(23)存在唯一解 u_h^n，且满足

$$\|u_h^n\|_1 \leqslant C\|u_h^0\|_1, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{25}$$

其中 C 是依赖于 T 的正常数．

证明：由式(24)可得非线性项的等价变形

$$\frac{H(u_h^n) - H(u_h^{n-1})}{u_h^n - u_h^{n-1}} = \frac{1}{4}(u_h^n + u_h^{n-1})(|u_h^n|^2 + |u_h^{n-1}|^2) - \frac{1}{2}(u_h^n + u_h^{n-1}) =$$
$$\frac{1}{4}((u_h^n)^3 + |u_h^n|^2 u_h^{n-1} + u_h^n |u_h^{n-1}|^2 + (u_h^{n-1})^3) - \frac{1}{2}(u_h^n + u_h^{n-1}). \tag{26}$$

先在式(23)中，取 $v_h = u_h^n + u_h^{n-1}$，有

$$\frac{1}{\Delta t}(\|u_h^n\|^2 - \|u_h^{n-1}\|^2) + \frac{1}{2}\|Du_h^n + Du_h^{n-1}\|^2 + \frac{1}{4}((u_h^n + u_h^{n-1})^2, |u_h^n|^2 + |u_h^{n-1}|^2) =$$
$$\frac{1}{2}\|u_h^n + u_h^{n-1}\|^2,$$

进一步有

$$\frac{1}{\Delta t}(\|u_h^n\|^2-\|u_h^{n-1}\|^2)\leqslant\frac{1}{2}\|u_h^n+u_h^{n-1}\|^2\leqslant\|u_h^n\|^2+\|u_h^{n-1}\|^2.$$

整理后得递推关系式：

$$\|u_h^n\|^2\leqslant\frac{1+\Delta t}{1-\Delta t}\|u_h^{n-1}\|^2\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{1+\Delta t}{1-\Delta t}\right)^n\|u_h^0\|^2.$$

如果 Δt 足够小且 $n\Delta t\leqslant T$，则全离散问题的解在 L^2 模下有界：

$$\|u_h^n\|^2\leqslant\exp\left\{\frac{2T}{1-\Delta t}\right\}\|u_h^0\|^2\leqslant C\|u_h^0\|^2. \tag{27}$$

在式(23)中，令 $v_h=\partial_t u_h^n$，可得

$$\|\partial_t u_h^n\|^2+\frac{1}{2\Delta t}((|Du_h^n|^2-|Du_h^{n-1}|^2),1)+\frac{1}{\Delta t}(H(u_h^n)-H(u_h^{n-1}),1)=0.$$

易见

$$\left(\frac{1}{2}|Du_h^n|^2+H(u_h^n),1\right)\leqslant\left(\frac{1}{2}|Du_h^{n-1}|^2+H(u_h^{n-1}),1\right). \tag{28}$$

联合式(24),(27),(28)知

$$\|Du_h^n\|\leqslant C\|Du_h^0\|. \tag{29}$$

从而由式(27)和式(29)可得全离散问题解的稳定性式(25). 证毕.

定理5 设 u^n 是问题(2)的解，u_h^n 是全离散问题(23)的解，$u(0)\in H^3(I)$，$u_t\in L^2(0,T;L^4(I))\cap L^2(0,T;H^3(I))$，$u_{ttt}\in L^2(0,T;L^2(I))$，则全离散问题解的误差估计如下：

$$\|u^n-u_h^n\|\leqslant C\Big(\|u^0-u_h^0\|+h^3\|u^0\|_3+((\Delta t)^2+h^3)\times \int_0^{t_n}(\|u_t\|^4+\|u_t\|_3^2+\|u_{ttt}\|^2)^{1/2}\mathrm{d}t\Big), \tag{30}$$

其中 C 与时间步长 Δt 和空间步长 h 无关.

证明：在问题(2)中，分别取 $t=t_{n-1}$ 和 $t=t_n$ 可得

$$\left(\frac{u_t^n+u_t^{n-1}}{2},v_h\right)+\left(\frac{Du^n+Du^{n-1}}{2},Dv_h\right)+\left(\frac{(u^n)^3+(u^{n-1})^3-u^n-u^{n-1}}{2},v_h\right)=0. \tag{31}$$

为方便，引入记号

$$F(u^n,u^{n-1},u_h^n,u_h^{n-1})=\frac{(u^n)^3+(u^{n-1})^3-u^n-u^{n-1}}{2}-\frac{H(u_h^n)-H(u_h^{n-1})}{u_h^n-u_h^{n-1}}. \tag{32}$$

联立式(31),(32),(23)得

$$\left(\frac{u_t^n+u_t^{n-1}}{2}-\partial_t u_h^n,v_h\right)+\left(\frac{Du^n+Du^{n-1}-Du_h^n-Du_h^{n-1}}{2},Dv_h\right)+(F(u^n,u^{n-1},u_h^n,u_h^{n-1}),v_h)=0.$$

记 $\rho^n=u^n-R_hu^n$，$\theta^n=R_hu^n-u_h^n$，则 $\|u^n-u_h^n\|\leqslant\|\rho^n\|+\|\theta^n\|$. 利用式(4)可得

$$(\partial_t\theta^n,v_h)+\frac{1}{2}(D\theta^n+D\theta^{n-1},Dv_h)=(r^n,v_h)-(F(u^n,u^{n-1},u_h^n,u_h^{n-1}),v_h), \tag{33}$$

其中 $r^n=\partial_tR_hu(t_n)-\partial_tu^n+\partial_t u^n-\dfrac{u_t^n+u_t^{n-1}}{2}$. 在式(33)中取 $v_h=\theta^n+\theta^{n-1}$，由 ε-不等式可知

$$\frac{1}{\Delta t}(\|\theta^n\|^2-\|\theta^{n-1}\|^2)+\frac{1}{2}\|D\theta^n+D\theta^{n-1}\|^2\leqslant\frac{1}{2}\|\theta^n+\theta^{n-1}\|^2+\|r^n\|^2+\|F(u^n,u^{n-1},u_h^n,u_h^{n-1})\|^2. \tag{34}$$

首先，估计 $\|F(u^n,u^{n-1},u_h^n,u_h^{n-1})\|^2$. 直接计算得

$$\begin{aligned}\|F(u^n,u^{n-1},u_h^n,u_h^{n-1})\|=\Big\|&\frac{1}{2}((u^n)^3+(u^{n-1})^3)-\frac{1}{4}(u^n+u^{n-1})(|u^n|^2+|u^{n-1}|^2)+\\&\frac{1}{4}(u^n+u^{n-1})(|u^n|^2+|u^{n-1}|^2)-\frac{1}{4}(u_h^n+u_h^{n-1})(|u_h^n|^2+|u_h^{n-1}|^2)-\\&\frac{1}{2}(u^n+u^{n-1})+\frac{1}{2}(u_h^n+u_h^{n-1})\Big\|.\end{aligned}$$

利用微积分基本公式和 Hölder 不等式可知

$$\| u^n - u^{n-1} \|^2 = \left\| \int_{t_{n-1}}^{t_n} u_t(t)\mathrm{d}t \right\|^2 \leqslant \Delta t \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| u_t(t) \|^2 \mathrm{d}t. \tag{35}$$

由 Sobolev 空间嵌入定理和式(35)得

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{2}((u^n)^3 + (u^{n-1})^3) - \frac{1}{4}(u^n + u^{n-1})(|u^n|^2 + |u^{n-1}|^2) \right\| = \\ &\frac{1}{4} \| (u^n)^3 - |u^n|^2 u^{n-1} - u^n |u^{n-1}|^2 + (u^{n-1})^3 \| = \frac{1}{4} \| (u^n + u^{n-1})(u^n - u^{n-1})^2 \| \leqslant \\ &\frac{1}{4}(|u^n|_\infty + |u^{n-1}|_\infty) \| (u^n - u^{n-1})^2 \| \leqslant C\Delta t \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| u_t(t) \|^2 \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{36}$$

此外，还可得

$$\begin{aligned} &\| (u^n + u^{n-1})(|u^n|^2 + |u^{n-1}|^2) - (u_h^n + u_h^{n-1})(|u_h^n|^2 + |u_h^{n-1}|^2) \| = \\ &\| (u^n + u^{n-1})(|u^n|^2 + |u^{n-1}|^2) - (u_h^n + u_h^{n-1})(|u^n|^2 + |u^{n-1}|^2) + \\ &(u_h^n + u_h^{n-1})(|u^n|^2 + |u^{n-1}|^2) - (u_h^n + u_h^{n-1})(|u_h^n|^2 + |u_h^{n-1}|^2) \| \leqslant \\ &(|u^n|_\infty^2 + |u^{n-1}|_\infty^2) \| (u^n + u^{n-1}) - (u_h^n + u_h^{n-1}) \| + \\ &(|u_h^n|_\infty + |u_h^{n-1}|_\infty) \| (u^n + u_h^n)(u^n - u_h^n) + (u^{n-1} + u_h^{n-1})(u^{n-1} - u_h^{n-1}) \| \leqslant \\ &(|u^n|_\infty^2 + |u^{n-1}|_\infty^2)(\| \theta^n + \theta^{n-1} \| + \| \rho^n + \rho^{n-1} \|) + \\ &(|u_h^n|_\infty + |u_h^{n-1}|_\infty)(|u^n|_\infty + |u_h^n|_\infty + |u^{n-1}|_\infty + |u_h^{n-1}|_\infty) \times \\ &(\| \theta^n + \theta^{n-1} \| + \| \rho^n + \rho^{n-1} \|) \leqslant C(\| \theta^n + \theta^{n-1} \| + \| \rho^n + \rho^{n-1} \|). \end{aligned} \tag{37}$$

根据三角不等式又有

$$\| (u^n + u^{n-1}) - (u_h^n + u_h^{n-1}) \| = \| \theta^n + \rho^n + \theta^{n-1} + \rho^{n-1} \| \leqslant \| \theta^n + \theta^{n-1} \| + \| \rho^n + \rho^{n-1} \|. \tag{38}$$

结合式(36)～(38)以及三角不等式可得

$$\begin{aligned} \| F(u^n, u^{n-1}, u_h^n, u_h^{n-1}) \|^2 \leqslant & C\left(\| \theta^n + \theta^{n-1} \|^2 + \| \rho^n + \rho^{n-1} \|^2 + \left(\Delta t \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| u_t(t) \|^2 \mathrm{d}t\right)^2 \right) \leqslant \\ & C\left(\| \theta^n \|^2 + \| \theta^{n-1} \|^2 + h^6 + (\Delta t)^3 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| u_t(t) \|^4 \mathrm{d}t \right). \end{aligned} \tag{39}$$

其次，估计 $\| r^n \|^2$. 记 $r^n = r_1^n + r_2^n$，其中

$$r_1^j = \partial_t R_h u^j - \partial_t u^j = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (R_h - I) u_t \mathrm{d}t, \qquad r_2^j = \partial_t u^j - \frac{u_t^j + u_t^{j-1}}{2}.$$

由投影算子 R_h 的性质知

$$\| r_1^j \| \leqslant \frac{1}{\Delta t} C h^3 \int_{t_{j-1}}^{t_j} \| u_t \|_3 \mathrm{d}t \leqslant C(\Delta t)^{-1/2} h^3 \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \| u_t \|_3^2 \mathrm{d}t \right)^{1/2}.$$

利用 Taylor 定理可推出

$$\| r_2^j \| \leqslant C\Delta t \int_{t_{j-1}}^{t_j} \| u_{ttt} \| \mathrm{d}t \leqslant C(\Delta t)^{3/2} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \| u_{ttt} \|^2 \mathrm{d}t \right)^{1/2}.$$

进而

$$\sum_{j=1}^{n} \| r^j \|^2 \leqslant C(\Delta t)^{-1}((\Delta t)^4 + h^6) \int_0^{t_n} (\| u_t \|_3^2 + \| u_{ttt} \|^2) \mathrm{d}t. \tag{40}$$

结合式(34)，(39)，(40)，可得

$$\begin{aligned} (\| \theta^n \|^2 - \| \theta^{n-1} \|^2) + \frac{\Delta t}{2} \| D\theta^n + D\theta^{n-1} \|^2 \leqslant & C\Big(\Delta t(\| \theta^n \| + \| \theta^{n-1} \|^2 + h^6) + ((\Delta t)^4 + h^6) \times \\ & \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\| u_t \|^4 + \| u_t \|_3^2 + \| u_{ttt} \|^2) \mathrm{d}t \Big). \end{aligned} \tag{41}$$

当 $n\Delta t = t_n \leqslant T$ 时，关于正整数 n 求和得

$$\| \theta^n \|^2 - \| \theta^0 \|^2 + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^{n} \| D\theta^i + D\theta^{i-1} \|^2 \leqslant$$

$$C\left(\Delta t\sum_{i=1}^{n}(\|\theta^{i}\|^{2}+\|\theta^{i-1}\|^{2})+Th^{6}+((\Delta t)^{4}+h^{6})\int_{0}^{t_{n}}(\|u_{t}\|^{4}+\|u_{t}\|_{3}^{2}+\|u_{ttt}\|^{2})\mathrm{d}t\right).$$

当 Δt 足够小，且 $C\Delta t<1-\delta_0(0<\delta_0<1)$时，有

$$\|\theta^{n}\|^{2}\leqslant\frac{1+C\Delta t}{1-C\Delta t}\|\theta^{0}\|^{2}+\frac{C}{1-C\Delta t}\times$$
$$\left(\Delta t\sum_{i=1}^{n-1}\|\theta^{i}\|^{2}+((\Delta t)^{4}+h^{6})\int_{0}^{t_{n}}(\|u_{t}\|^{4}+\|u_{t}\|_{3}^{2}+\|u_{ttt}\|^{2})\mathrm{d}t\right).$$

利用离散的 Gronwall 定理可知

$$\|\theta^{n}\|\leqslant C\left(\|\theta^{0}\|+((\Delta t)^{2}+h^{3})\int_{0}^{t_{n}}(\|u_{t}\|^{4}+\|u_{t}\|_{3}^{2}+\|u_{ttt}\|^{2})^{1/2}\mathrm{d}t\right).$$

又由式(5)得到式(30). 证毕.

定理 6 设 u^n 是问题(2)的解，u_h^n 是全离散问题(23)的解，$u^0\in H^3(I)$，$u_t\in L^2(0,T;L^4(I))\cap L^2(0,T;H^3(I))$，$u_{ttt}\in L^2(0,T;L^2(I))$，则全离散问题的解有如下误差估计：

$$|u^{n}-u_{h}^{n}|_{1}\leqslant C\Big(|u^{0}-u_{h}^{0}|_{1}+h^{2}\|u^{0}\|_{3}+((\Delta t)^{2}+h^{3})\times$$
$$\int_{0}^{t_{n}}(\|u_{t}\|^{4}+\|u_{t}\|_{3}^{2}+\|u_{ttt}\|^{2})^{1/2}\mathrm{d}t\Big),\tag{42}$$

其中 C 与时间步长 Δt 和空间步长 h 无关.

证明：在式(34)中取 $v_h=\partial_t\theta^n$，由 ε-不等式可知

$$\|\partial_{t}\theta^{n}\|^{2}+\frac{1}{2\Delta t}(\|D\theta^{n}\|^{2}-\|D\theta^{n-1}\|^{2})\leqslant$$
$$\|r^{n}\|^{2}+\|F(Du^{n},Du^{n-1},Du_{h}^{n},Du_{h}^{n-1})\|^{2}+\frac{1}{2}\|\partial_{t}\theta^{n}\|^{2},$$

整理得

$$\|D\theta^{n}\|^{2}-\|D\theta^{n-1}\|^{2}\leqslant2\Delta t(\|r^{n}\|^{2}+\|F(Du^{n},Du^{n-1},Du_{h}^{n},Du_{h}^{n-1})\|^{2}).$$

当 $n\Delta t=t_n\leqslant T$ 时，关于正整数 n 求和得

$$\|D\theta^{n}\|^{2}-\|D\theta^{0}\|^{2}\leqslant2\Delta t\sum_{i=1}^{n}(\|r^{n}\|^{2}+\|F(Du^{n},Du^{n-1},Du_{h}^{n},Du_{h}^{n-1})\|^{2}).\tag{43}$$

由式(39)知

$$\sum_{i=1}^{n}\|F(u^{n},u^{n-1},u_{h}^{n},u_{h}^{n-1})\|^{2}\leqslant C\left(\sum_{i=0}^{n}\|\theta^{i}\|^{2}+nh^{6}+(\Delta t)^{3}\int_{t_{0}}^{t_{n}}\|u_{t}(t)\|^{4}\mathrm{d}t\right).\tag{44}$$

结合式(40),(43),(44)，可得

$$\|D\theta^{n}\|^{2}-\|D\theta^{0}\|^{2}\leqslant C\left(\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|\theta^{i}\|^{2}+Th^{6}+((\Delta t)^{4}+h^{6})\int_{0}^{t_{n}}(\|u_{t}\|^{4}+\|u_{t}\|_{3}^{2}+\|u_{ttt}\|^{2})\mathrm{d}t\right).$$

再利用离散的 Gronwall 定理得

$$\|D\theta^{n}\|\leqslant C\left(\|D\theta^{0}\|+((\Delta t)^{2}+h^{3})\int_{0}^{t_{n}}(\|u_{t}\|^{4}+\|u_{t}\|_{3}^{2}+\|u_{ttt}\|^{2})^{1/2}\mathrm{d}t\right).$$

又由式(5)得到式(42). 证毕.

3 数值算例

为方便分析误差与收敛阶，考虑如下非齐次微分方程的初边值问题：

$$\begin{cases}u_{t}-u_{xx}+u^{3}-u=g(x,t), & (x,t)\in[0,1]\times(0,1),\\ u(0,t)=u(1,t)=0, & t\in(0,1),\\ u(x,0)=u_{0}(x), & x\in[0,1].\end{cases}\tag{45}$$

取 $u(x,t)=t^2[1-\cos(2\pi x)]$为解析解. 表 1 列出了 $t=1$ 时不同空间步长 h 对应的误差和收敛阶. 由表 1 可见，当时间步长固定时，近似解的 L^2 模和 H^1 模收敛精度分别是三阶和二阶. 表 2 列出了 $t=1$ 时不同时间步长 Δt 对应的误差和收敛阶. 由表 2 可见，空间步长取定时，近似解在 L^2 和 H^1 模下达

到二阶收敛.

表 1　$t=1$ 时不同空间步长 h 对应的误差和收敛阶

Table 1　Error and convergence order corresponding to different spatial step sizes h when $t=1$

$(\Delta t,h)$	$\Vert u-u_h \Vert$	收敛阶	$\Vert u-u_h \Vert_1$	收敛阶
(1/100 000,1/8)	$3.249\,2\times10^{-3}$		$1.533\,3\times10^{-1}$	
(1/100 000,1/16)	$3.631\,7\times10^{-4}$	3.161 4	$3.672\,1\times10^{-2}$	2.062 0
(1/100 000,1/32)	$4.400\,3\times10^{-5}$	3.044 9	$9.067\,4\times10^{-3}$	2.017 8
(1/100 000,1/64)	$5.456\,2\times10^{-6}$	3.011 6	$2.259\,4\times10^{-3}$	2.004 7

表 2　$t=1$ 时不同时间步长 Δt 对应的误差和收敛阶

Table 2　Error and convergence order corresponding to different time step sizes Δt when $t=1$

$(\Delta t,h)$	$\Vert u-u_h \Vert$	收敛阶	$\Vert u-u_h \Vert_1$	收敛阶
(1/20,1/1 000)	$1.196\,8\times10^{-3}$		$3.844\,8\times10^{-3}$	
(1/40,1/1 000)	$2.995\,8\times10^{-4}$	1.998 2	$9.623\,8\times10^{-4}$	1.998 2
(1/80,1/1 000)	$7.491\,8\times10^{-5}$	1.999 6	$2.408\,3\times10^{-4}$	1.998 6
(1/160,1/1 000)	$1.873\,1\times10^{-5}$	1.999 9	$6.087\,5\times10^{-5}$	1.984 1

综上所述，B 样条有限元法是求解 FK 方程的有效方法，二次 B 样条 Crank-Nicolson 全离散格式达到最优阶收敛精度 $O((\Delta t)^2+h^3)$. 应用 MATLAB 编程计算数值算例，采用 Picard 迭代处理非线性项，数值实验结果表明，Picard 迭代次数为 6～10 次可以保证格式的收敛精度，极大提高了计算效率.

参　考　文　献

[1] MAGOME N，MORITA N，KANEKO S，et al. Higher-Continuity *s*-Version of Finite Element Method with B-Spline Functions [J]. J Comput Phys，2024，497：112593-1-112593-18.

[2] JENA S R，SENAPATI A. One-Dimensional Heat and Advection-Diffusion Equation Based on Improvised Cubic B-Spline Collocation，Finite Element Method and Crank-Nicolson Technique [J]. Int Commun Heat Mass Tran，2023，147：106958-1-106958-24.

[3] HEPSON O E. A Quartic Trigonometric Tension B-Spline Finite Element Method for Solving Gardner Equation [J]. Numer Methods Partial Differential Equations，2022，38(4)：1055-1067.

[4] QIN D D，TAN J W，LIU B，et al. A B-Spline Finite Element Method for Solving a Class of Nonlinear Parabolic Equations Modeling Epitaxial Thin-Film Growth with Variable Coefficient [J/OL]. Adv Difference Equ，(2020-04-22)[2023-06-30]. https://doi.org/10.1186/s13662-020-02629-6.

[5] DANUMJAYA P. Finite Element Methods for One Dimensional Fourth Order Semilinear Partial Differential Equation [J]. Int J Appl Comput Math，2016，2(3)：395-410.

[6] FISHER R A. The Wave of Advance of Advantageous Genes [J]. Ann Eugen，1937，7：355-369.

[7] DEE G T，VAN SAARLOOS W. Bistable Systems with Propagating Fronts Leading to Pattern Formation [J]. Phys Rev Lett，1988，60(25)：2641-2644.

[8] COULLET P，ELPHICK C，REPAUX D. Nature of Spatial Chaos [J]. Phys Rev Lett，1987，58(5)：431-434.

[9] CIARLET P G. The Finite Element Method for Ellipitic Problems [M]. Studies in Mathematics and Its Applicaitons，Vol.4. Amsterdam：North-Hollard Publishing Co，1978：559.

（责任编辑：赵立芹）