第 62 卷　第 5 期　吉 林 大 学 学 报（理 学 版）　Vol. 62　No. 5
2024 年 9 月　Journal of Jilin University (Science Edition)　Sep　2024

doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2023542

带时滞的发展方程时间依赖拉回吸引子的存在性

高娟平，刘亭亭
（西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070）

摘要： 考虑一类带时滞的非自治二阶发展方程. 首先，利用 Faedo-Galerkin 逼近法得到其在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 上解的存在性和唯一性；其次，借助算子分解验证过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 上的 $\mathscr{D}_{C_{\mathscr{H}_t}}$-拉回渐近紧性，从而证明带时滞的发展方程时间依赖拉回吸引子的存在性.

关键词： 发展方程；算子分解；时间依赖拉回吸引子；存在性
中图分类号： O175.29　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671-5489(2024)05-1027-10

Existence of Time-Dependent Pullback Attractor for Evolution Equations with Delay

GAO Juanping, LIU Tingting
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: We considered a class of non-autonomous second-order evolution equations with delay. Firstly, we obtained the existence and uniqueness of solution by using Faedo-Galerkin approximation method in $C_{\mathscr{H}_t}$. Secondly, by means of operator decomposition, the $\mathscr{D}_{C_{\mathscr{H}_t}}$-pullback asymptotic compactness of the process $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ on $C_{\mathscr{H}_t}$ was verified, which proved the existence of time-dependent pullback attractor for evolution equations with delay.

Keywords: evolution equation; operator decomposition; time-dependent pullback attractor; existence

0　引　言

考虑带时滞的非自治二阶发展方程

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\varepsilon(t)\Delta u_{tt}+f(u)=g(t,u_t)+k(x,t), & x\in\Omega,\quad t>\tau, \\ u(x,t)=\phi(x,t-\tau), & x\in\Omega,\quad t\in[\tau-h,\tau], \\ \partial_t u(x,t)=\partial_t\phi(x,t-\tau), & x\in\Omega,\quad t\in[\tau-h,\tau], \\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\quad t>\tau, \end{cases} \tag{1}$$

其中：$\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $(N\geqslant3)$是具有光滑边界的有界区域；τ 是初始时间，$\varepsilon=\varepsilon(t)$是关于 t 的函数；ϕ 为区间$[\tau-h,\tau]$上的初始值；$h>0$ 表示时滞效应的长度；f 是非线性项；g 是时滞项；$k\in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R};L^2(\Omega))$是外力项；函数 u_t 和 ε_t 在$[-h,0]$上分别定义为 $u_t(\theta)=u(t+\theta)$，$\varepsilon_t=\varepsilon(t+\theta)$，$\theta\in[-h,0]$.

收稿日期： 2023-12-20.
第一作者简介： 高娟平(1997—)，女，汉族，硕士研究生，从事无穷维动力系统的研究，E-mail：2639665477@qq.com. **通信作者简介：** 刘亭亭(1991—)，女，回族，博士，副教授，从事无穷维动力系统的研究，E-mail：lttnwnu91@126.com.
基金项目： 国家自然科学基金(批准号：12101502；11961059).

假设以下条件成立：

(H_1) 函数 $\varepsilon\in C^1(\mathbb{R})$单调递减，并满足

$$\lim_{t\to+\infty}\varepsilon(t)=0;\tag{2}$$

特别地，存在 $L>0$，使得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}(|\varepsilon(t)|+|\varepsilon'(t)|)\leqslant L.\tag{3}$$

(H_2) 函数 $f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$，$f(0)=0$，并且满足以下条件：

$$f'(u)\geqslant -l,\qquad \forall u\in\mathbb{R},\tag{4}$$

其中 l 是正常数，当 $N\geqslant 3$ 时，有

$$|f'(u)|\leqslant C(1+|u|^{2/(N-2)}),\quad \forall u\in\mathbb{R},\tag{5}$$

$$2F(u)\geqslant -\mu u^2-c,\quad \forall u\in\mathbb{R},\tag{6}$$

$$2f(u)u\geqslant 2F(u)-\mu u^2-c,\quad \forall u\in\mathbb{R},\tag{7}$$

这里 $F(x,u)=\int_0^u f(x,s)\mathrm{d}s$，$0<\mu<\dfrac{1}{2}$，$c>0$ 是常数.

(H_3) 外力项 $k\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L^2(\Omega))$，并且有

$$\int_{\infty}^{t}\mathrm{e}^{\sigma s}\|k(x,s)\|^2\mathrm{d}s<\infty,\qquad \forall t\in\mathbb{R}.\tag{8}$$

(H_4) 定义时滞项 g：$\mathbb{R}\times C_{L^2(\Omega)}\mapsto L^2(\Omega)$满足下列条件：

1) 对所有的 $\xi\in C_{L^2(\Omega)}$，函数 $t\in\mathbb{R}\mapsto g(t,\xi)\in L^2(\Omega)$是可测的；

2) 对所有的 $t\in\mathbb{R}$，$g(t,0)=0$；

3) 存在 $C_g>0$，使得对任意的 $t\in\mathbb{R}$，$\xi,\eta\in C_{L^2(\Omega)}$，有

$$\|g(t,\xi)-g(t,\eta)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_g\|\xi-\eta\|_{C_{L^2(\Omega)}};\tag{9}$$

4) 存在 $m_0>0$，$L_g>0$，使得对任意的 $u,v\in C([\tau-h,t];L^2(\Omega))$和 $m\in[0,m_0]$，成立

$$\int_\tau^t\mathrm{e}^{ms}\|g(t,u_s)-g(t,v_s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant L_g^2\int_{\tau-h}^t\mathrm{e}^{ms}\|u(s)-v(s)\|^2_{C_{L^2}}\mathrm{d}s.\tag{10}$$

当方程(1)中的系数 $\varepsilon(t)=\varepsilon$ 且时滞项 $g(t,u_t)=0$ 时，文献[1-3]研究了半线性发展方程 $u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\varepsilon\Delta u_{tt}+f(u)=h(x)$解的渐近行为. 当方程(1)的系数 $\varepsilon=0$ 时，方程(1)即为通常的强阻尼波方程，其解的渐近行为在吸引子方面已得到广泛研究[4-5]. 在文献[1]的基础上，Zhang 等[6]考虑了记忆项的发展方程：

$$u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\int_0^\infty k_\varepsilon(s)\Delta u_t(t-s)\mathrm{d}s-\nu\Delta u_{tt}+f(u)=g(x,t),$$

并研究了其鲁棒指数吸引子的存在性.

当 $\varepsilon(t)$为一正递减有界函数，且在无穷远处趋于0时问题就变得更复杂. 这是因为即使外力项与时间无关，此时的问题仍需在非自治的情形下研究，由于系统的能量泛函依赖于时间 t，并且在 $t\to\infty$，$\varepsilon(t)\to 0$ 时系统的耗散性也发生了变化，一些古典理论(拉回吸引子，时间依赖吸引子)和方法解决这类问题受到限制，因此研究者们提出了时间依赖吸引子的概念，并得到广泛关注[7-10]. 时滞项是一类表示某种延迟、记忆或者遗传特征的算子，研究许多问题时不仅需考虑系统当前的状态，还要考虑其过去的行为. 关于时滞方程解的渐近性研究目前已有很多结果[11-17]：文献[9]研究了带时滞的非自治反应扩散方程

$$\partial u_t-\varepsilon(t)\partial_t\Delta u-a(l(u))\Delta u=f(u)+g(u,u_t)+h(t)$$

的时间依赖拉回吸引子的存在性和正则性；文献[14]考虑了带时滞的半线性阻尼波方程拉回吸引子的存在性；文献[15]讨论了带有遗传特征的非自治半线性二阶发展方程

$$u_{tt}-\Delta u-\Delta u_t-\nu\Delta u_{tt}=f(t,u(x,t-\rho(t)))+g(x,t)$$

拉回吸引子的存在性.

受上述研究工作的启发，本文考虑带时间依赖衰退系数 $\varepsilon(t)$以及时滞项 $g(t,u_t)$的时间依赖拉回吸引子的存在性，关于发展方程的时间依赖吸引子文献[8]已经考虑了 $g=0$ 时其存在性. 对于

方程(1)，本文通过借助文献[12]的方法，即先对方程(1)进行分解，将解过程分解为两部分，使得一部分满足紧性，另一部分衰退，从而验证了过程的拉回渐近紧性，证明了带时滞的发展方程时间依赖拉回吸引子的存在性.

1　预备知识

不失一般性，记 $H=L^2(\Omega)$，其对应的内积与范数分别记为$\langle\cdot\rangle$和$\|\cdot\|$. 对于 $0\leqslant s<2$，定义由 A 生成的 Hilbert 空间族 $H^s=D(A^{s/2})$，并赋予如下内积与范数：

$$\langle w,v\rangle_s=\langle A^{s/2}w,A^{s/2}v\rangle,\qquad \|w\|_s=\|A^{s/2}w\|,$$

对 $t\in\mathbb{R}$ 及 $0\leqslant s<2$，引入时间依赖空间 $\mathscr{H}_t=H_0^1\times H_t^1$，且对应的范数定义为

$$\|z\|_{\mathscr{H}_t}^2=\{\|u,u_t\|^2\}_{\mathscr{H}_t}=\|u\|_{H^1}^2+\|u_t\|_{H_t^1}^2,$$

其中$\|u_t\|_{H_t^1}^2$表示 H^1 空间中赋予范数$\|\cdot\|^2+\varepsilon_t\|\cdot\|_1^2$.

此外，定义 $C_{L^2(\Omega)}$为 $C\in([-h,0];X)$上赋予上确界范数$\|\cdot\|_{C\in([-h,0];X)}$的 Banach 空间，即

$$\|u\|_{C_{L^2}}=\max_{t\in[-h,0]}\|u\|,\qquad \forall u\in C_{L^2(\Omega)}.$$

类似地，定义

$$\|u\|_{C_{H^1}}=\max_{t\in[-h,0]}(\|u\|+\|\nabla u\|),\qquad \forall u\in C_{H^1(\Omega)}.$$

对$\forall t\in\mathbb{R}$，考虑时间依赖空间 $C_{\mathscr{H}_t}$并赋予以下范数：

$$\|z\|_{C_{\mathscr{H}_t}}^2=\{\|u,u_t\|^2\}_{C_{\mathscr{H}_t}}=\|\nabla u\|_{C_{L^2}}^2+\|u_t\|_{C_{L^2}}^2+\varepsilon_t\|\nabla u_t\|_{C_{L^2}}^2,$$

其中 $\varepsilon_t=\varepsilon(t+\theta)$，$\theta\in[-h,0]$.

定义 1[9]　若一族双参数映射$\{U(t,s)\mid t\geqslant s\}$满足下列性质，则称其是 Banach 空间 X_t 上的一个过程：

1) $U(t,t)x=x$，$\forall t\in\mathbb{R}$，$x\in X_t$；

2) $U(t,s)U(s,\tau)=U(t,\tau)$，$\forall t\geqslant s\geqslant\tau$.

若$(t,s,x)\to U(t,s)x(t\geqslant s,\ x\in X_t)$是连续的，则称$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$是一连续过程.

设 $\mathscr{D}_t$ 表示一族非空参数集族 $\widetilde{D}=\{D(t);\ t\in\mathbb{R}\}\subset\mathscr{P}(X_t)$，其中 $\mathscr{P}(X_t)$表示 X_t 上所有的非空子集族.

定义 2[9]　如果对每个 $\hat{D}=\{D(t)\}_{t\in\mathbb{R}}\in\mathscr{D}_t$，都有$\{\widetilde{D}(t):\widetilde{D}(t)$是 $D(t)$的非空子集，$\forall t\in\mathbb{R}\}\in\mathscr{D}_t$，则 X_t 非空子集的一些集族构成的集合 $\mathscr{D}_t$ 称为包含闭.

定义 3[12]　若对任意的 $t\in\mathbb{R}$ 及任意的 $\mathscr{B}=\{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}}\in\mathscr{D}_t$，存在 $t_0=t_0(\mathscr{B},t)\in\mathbb{R}^+$，使得

$$U(t,t-s)B(t-s)\subset Q(t),\qquad \forall s\geqslant t_0,$$

则称集族 $\mathscr{Q}=\{Q(t)\}_{t\in\mathbb{R}}\in\mathscr{D}_t$ 关于过程$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$是 $\mathscr{D}$-拉回吸收的.

定义 4[14]　设$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$是 X_t 上的过程，对任意的 $t\in\mathbb{R}$，$\mathscr{B}=\{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$，当 $s_n(n\to+\infty)\to-\infty$，$x_n\in B(t-s_n)$时，序列 $y_n\in U(t,t-s_n)x_n$ 在 X_t 中有一收敛的子列，则称$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$在 X_t 中是 $\mathscr{D}$-拉回渐近紧的.

定义 5[14]　如果一个非空子集 $\mathscr{A}_t=\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}\in\mathscr{D}_t$ 满足下列条件，则其称为过程$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$在 X_t 中的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子：

1) $\mathscr{A}_t=\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}\in\mathscr{D}_t$ 是不变的，即

$$U(t,\tau)\mathscr{A}_\tau=A(t),\quad \forall t\geqslant\tau,\quad \tau\in\mathbb{R};$$

2) $\mathscr{A}_t=\{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}\in\mathscr{D}_t$ 拉回 $\mathscr{D}$-吸引 X_t 中所有的有界集，即对任意的 $t\in\mathbb{R}$，$\hat{D}\in\mathscr{D}_t$，有

$$\lim_{\tau\to-\infty}\mathrm{dist}_{X_t}(U(t,\tau)D(\tau),\mathscr{A}_t)=0.$$

定理 1[13]　设$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$是 Banach 空间 X_t 上的过程，$\mathscr{Q}=\{Q(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$是 $\mathscr{D}$-拉回吸收集，对任意固定的 $t\in\mathbb{R}$，若$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$能分解成如下形式：

$$U(t,\tau)=U_1(t,\tau)+U_2(t,\tau),\qquad \forall t\geqslant\tau,$$

且 U_1 满足

$$\lim_{s\to\infty}\|U_1(t,t-s)Q(t-s)\|_{X_t}=0;$$
并且对任意固定的 $s>0$，存在 X_t 中的 Cauchy 序列 $\{y_n\}\in U_2(t,t-s)Q(t-s)$. 则过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 在 X_t 中是 $\mathscr{D}$-拉回渐近紧的.

定理 2[13] 设 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 是 Banach 空间 X_t 上的过程，对固定的 $t\geqslant\tau$，$\tau\in\mathbb{R}$，$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 是闭的，且 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 在 X_t 中是上半连续的，如果在 X_t 中 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 存在闭的 $\mathscr{D}$-拉回吸收集 $\mathscr{Q}=\{Q(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$，且是 $\mathscr{D}$-拉回渐近紧的，则存在唯一的 $\mathscr{D}$-拉回吸引子 $\mathscr{A}=\{A(t)\}$，其中
$$A(t)=\bigcap_{T\in\mathbb{R}^+}\overline{\bigcup_{s\geqslant T}U(t,t-s)Q(t-s)},\qquad t\in\mathbb{R}.$$

2 解的存在性和唯一性

定理 3 假设条件(H_1)～(H_4)成立，初值 $\phi\in C_{\mathscr{H}_t}$，则方程(1)存在弱解 $z(t)=(u(t),\partial_t u)$，且
$$z\in C([\tau-h,T],\mathscr{H}_t(\Omega)),$$
$$u\in C([\tau-h,T];H^1(\Omega)),\qquad \partial_t u\in C([\tau-h,T];H^1(\Omega)).$$

证明：1) 存在性. 下面用标准的 Fadeo-Galerkin 逼近方法证明方程(1)解的存在性. 根据经典的谱算子理论，假设存在 L^2 中的正交基 x_i 构成了 $A=-\Delta$ 的特征向量，对应的特征值为 λ_i $(i=1,2,\cdots)$，满足
$$Ax_i=\lambda_i x_i,\qquad \forall\, i\in\mathbb{N}.$$
对每个 m，根据经典的常微分方程理论，假设存在近似解 u_m，其形式为
$$u_m(t)=\sum_{i=1}^{m}u_{m_i}x_i,$$
且满足
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2u_m}{\mathrm{d}t^2}-\Delta u_m-\Delta\dfrac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t}-\varepsilon(t)\Delta\dfrac{\mathrm{d}^2u_m}{\mathrm{d}t^2}+f(u_m)=g(t,u_{t,m})+P_mk(x,t),\quad t>\tau,\\ u_m(x,t)=P_m\phi(x,t-\tau),\quad x\in\Omega,\quad t\in[\tau-h,\tau],\\ \dfrac{\mathrm{d}u_m(x,t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}P_m\phi(x,t-\tau)}{\mathrm{d}t},\quad x\in\Omega,\quad t\in[\tau-h,\tau],\\ u_m(x,t)=0,\quad x\in\partial\Omega,\quad t>\tau,\end{cases}\tag{11}$$
其中 $P_m: L^2\to\mathscr{H}_{t,m}$ 为正交投影且 $\mathscr{H}_{t,m}=\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$.

下面推导 Galerkin 近似解的先验估计. 用 $v_m=u_m'+\alpha u_m$ 与方程(11)在 L^2 中做内积，有
$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|v_m\|^2+\varepsilon(t)\|\nabla v_m\|^2+\alpha^2\|u_m\|^2+(1-\alpha+\alpha^2\varepsilon(t))\|\nabla u_m\|^2)-\\&\quad 2\alpha\|v_m\|^2+(2-\varepsilon'(t)-2\alpha\varepsilon(t))\|\nabla v_m\|^2+2\alpha^3\|u_m\|^2+\\&\quad \alpha(2-2\alpha-\alpha\varepsilon'(t)+2\alpha^2\varepsilon(t))\|\nabla u_m\|^2+2(f(u_m),v_m)=\\&\quad 2(g(t,u_{t,m}),v_m)+2(k(t),v_m).\end{aligned}\tag{12}$$
由 Cauchy 和 Young 不等式以及式(6),(7)，有
$$\begin{aligned}2(f(u_m),v_m)&=2(f(u_m),u_m'+\alpha u_m)\geqslant\\&\quad 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F(u_m),1)+2\alpha(F(u_m),1)-\alpha\mu\|u_m\|^2-\alpha c,\end{aligned}\tag{13}$$
$$2(g(t,u_{t,m}),v_m)\leqslant\frac{2}{\alpha}\|g(t,u_{t,m})\|^2+\frac{\alpha}{2}\|v_m\|^2,\tag{14}$$
$$2(k(t),v_m)\leqslant\frac{2}{\alpha}\|k\|^2+\frac{\alpha}{2}\|v_m\|^2.\tag{15}$$
把式(13)～(15)代入式(12)，并由 Poíncare 不等式 $\lambda_1\|v_m\|^2\leqslant\|\nabla v_m\|^2$，可得
$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|v_m\|^2+\varepsilon(t)\|\nabla v_m\|^2+\alpha^2\|u_m\|^2+(1-\alpha+\alpha^2\varepsilon(t))\|\nabla u_m\|^2+2(F(u_m),1))+\\&\quad(\lambda_1-3\alpha)\|v_m\|^2+(1-\varepsilon'(t)-2\alpha\varepsilon(t))\|\nabla v_m\|^2+(2\alpha^3-\alpha\mu)\|u_m\|^2+\end{aligned}$$

$$\alpha(2-2\alpha-\alpha\varepsilon'(t)+2\alpha^2\varepsilon(t))\|\nabla u_m\|^2+2\alpha(F(u_m),1)\leqslant$$
$$\frac{2}{\alpha}\|g(t,u_{t,m})\|^2+\frac{2}{\alpha}\|k\|^2+\alpha c. \tag{16}$$

再由式(2),(3)及 $\varepsilon'(t)<0$，取 $\mu<\alpha^2$，有

$$(\lambda_1-3\alpha)\|v_m\|^2+(1-\varepsilon'(t)-2\alpha\varepsilon(t))\|\nabla v_m\|^2+(2\alpha^3-\alpha\mu)\|u_m\|^2+$$
$$\alpha(2-2\alpha-\alpha\varepsilon'(t)+2\alpha^2\varepsilon(t))\|\nabla u_m\|^2\geqslant$$
$$\alpha\|v_m\|^2+\alpha\varepsilon(t)\|\nabla v_m\|^2+\alpha^3\|u_m\|^2+\alpha(1-\alpha+\alpha^2\varepsilon(t))\|\nabla u_m\|^2, \tag{17}$$

其中 $\alpha<\min\left\{\frac{\lambda_1}{4},\frac{1+L}{3\varepsilon(t)}\right\}$. 从而可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|v_m\|^2+\varepsilon(t)\|\nabla v_m\|^2+\alpha^2\|u_m\|^2+(1-\alpha+\alpha^2\varepsilon(t))\|\nabla u_m\|^2+2(F(u_m),1))+$$
$$\alpha(\|v_m\|^2+\varepsilon(t)\|\nabla v_m\|^2+\alpha^2\|u_m\|^2+$$
$$(1-\alpha+\alpha^2\varepsilon(t))\|\nabla u_m\|^2+2(F(u_m),1))\leqslant$$
$$\frac{2}{\alpha}\|g(t,u_{t,m})\|^2+\frac{2}{\alpha}\|k\|^2+\alpha c. \tag{18}$$

记

$$E_m(t)=\|v_m\|^2+\varepsilon(t)\|\nabla v_m\|^2+\alpha^2\|u_m\|^2+(1-\alpha+\alpha^2\varepsilon(t))\|\nabla u_m\|^2+2(F(u_m),1),$$

则式(18)可以重写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_m(t)+\alpha E_m(t)\leqslant\frac{2}{\alpha}\|g(t,u_{t,m})\|^2+\frac{2}{\alpha}\|k\|^2+\alpha c. \tag{19}$$

用 $\mathrm{e}^{\alpha t}$ 乘以式(19)，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\alpha t}E_m(t))\leqslant\frac{2}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha t}\|g(t,u_{t,m})\|^2+\frac{2}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha t}\|k\|^2+\alpha c\,\mathrm{e}^{\alpha t}, \tag{20}$$

在 τ 到 t 对式(20)积分，有

$$\mathrm{e}^{\alpha t}E_m(t)\leqslant\mathrm{e}^{\alpha t}E_m(\tau)+\frac{2}{\alpha}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\alpha s}\|g(s,u_{s,m})\|^2\mathrm{d}s+\frac{2}{\alpha}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\alpha s}\|k(s)\|^2\mathrm{d}s+\alpha c\int_\tau^t\mathrm{e}^{\alpha s}\mathrm{d}s. \tag{21}$$

由式(10)，有

$$\int_\tau^t\mathrm{e}^{\alpha s}\|g(s,u_{s,m})\|^2\mathrm{d}s=\int_\tau^t\mathrm{e}^{\alpha s}\|g(s,u_{s,m})-g(s,0)\|^2\mathrm{d}s\leqslant L_g^2\int_{\tau-h}^t\mathrm{e}^{\alpha s}\|u_m\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}\mathrm{d}s=$$
$$L_g^2\int_{\tau-h}^\tau\mathrm{e}^{\alpha s}\|u_m\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}\mathrm{d}s+L_g^2\int_\tau^t\mathrm{e}^{\alpha s}\|u_m\|^2_{C_{L^2(\Omega)}}\mathrm{d}s. \tag{22}$$

将式(22)代入式(21)，并应用积分形式的 Gronwall 引理，可得

$$\mathrm{e}^{\alpha t}E_m(t)\leqslant\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{C_1(t-\tau)}E_m(\tau)+C_2\mathrm{e}^{C_1t}\int_\tau^t\mathrm{e}^{(\alpha-C_1)s}\|k(s)\|^2\mathrm{d}s+$$
$$C_3\mathrm{e}^{\alpha\tau}\mathrm{e}^{C_1(t-\tau)}\|\phi\|^2_{\mathscr{H}_t}+C_4\mathrm{e}^{C_1t}\int_\tau^t\mathrm{e}^{(\alpha-C_1)s}\mathrm{d}s, \tag{23}$$

其中 $C_1=\frac{2L_g^2}{\alpha}$，$C_2=\frac{2}{\alpha}$，$C_3=\frac{2hL_g^2}{\alpha}$，$C_4=\alpha c$. 对式(23)两边同时除以 $\mathrm{e}^{\alpha t}$，有

$$E_m(t)\leqslant\mathrm{e}^{-(\alpha-C_1)(t-\tau)}E_m(\tau)+C_2\mathrm{e}^{-(\alpha-C_1)t}\int_\tau^t\mathrm{e}^{(\alpha-C_1)s}\|k(s)\|^2\mathrm{d}s+$$
$$C_3\mathrm{e}^{-(\alpha-C_1)(t-\tau)}\|\phi\|^2_{\mathscr{H}_t}+C_4\mathrm{e}^{-(\alpha-C_1)t}\int_\tau^t\mathrm{e}^{(\alpha-C_1)s}\mathrm{d}s. \tag{24}$$

记 $\alpha-C_1=\beta$，则

$$E_m(t)\leqslant E_m(\tau)\mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)}+C_2\mathrm{e}^{-\beta t}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\beta s}\|k(s)\|^2\mathrm{d}s+C_3\mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)}\|\phi\|^2_{\mathscr{H}_t}+C_4\mathrm{e}^{-\beta t}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\beta s}\mathrm{d}s. \tag{25}$$

结合式(24)和式(25)，可得 $\{u_m,u_m'\}$ 在 $L^\infty(\tau-h,T;\mathscr{H}_t(\Omega))$ 上有界. 因此，存在一个子列(仍记作 u_m,∂_tu_m)，结合式(25)，当 $m\to\infty$ 时可得：$u_m\to u$ 弱 * 收敛于 $L^\infty(\tau-h,T;H_0^1(\Omega))$；$\partial_tu_m\to\partial_tu$ 弱 * 收敛于 $L^\infty(\tau-h,T;H^1(\Omega))$；对几乎每个 $(t,x)\in[\tau-h,T]\times\Omega$，$u_m\to u$；$f(u_m)\to f(u)$ 弱收敛于

$L^2(\tau-h,T;L^{2N/(N-2)}(\Omega))$. 对式(11)两边取极限可得方程(1)的解 u，它满足 $u(t)\in L^\infty(\tau-h,T;H^1(\Omega))$，$\partial_t u\in L^\infty(\tau-h,T;H^1(\Omega))$，且

$$u(t)\in C(\tau-h,T;H^1(\Omega)),\qquad \partial_t u\in C(\tau-h,T;H^1(\Omega)).$$

2) 唯一性. 设 u^1,u^2 是方程(1)对应初值 $\phi,\psi\in C_{\mathscr{H}_t}$ 的解，常数 $C_0=C_0(C,\lambda_1,C_g)>0$. 令 $\xi(t)=u^1(t)-u^2(t)$，则 $\xi(t)$满足

$$\xi_{tt}-\Delta\xi-\Delta\xi_t-\varepsilon(t)\Delta\xi_{tt}+f(u^1)-f(u^2)=g(t,u_t^1)-g(t,u_t^2),\quad x\in\Omega,\quad t\geqslant\tau. \tag{26}$$

用 $\omega=\xi_t+\eta\xi(0<\eta<1)$与方程(26)在 L^2 中做内积，计算得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\omega\|^2+\varepsilon(t)\|\nabla\omega\|^2+\eta^2\|\xi\|^2+(1-\eta+\eta^2\varepsilon(t))\|\nabla\xi\|^2)-2\eta\|\omega\|^2+\\&\quad(2-\varepsilon'(t)-2\eta\varepsilon(t))\|\nabla\omega\|^2+2\eta^3\|\xi\|^2+\\&\quad\eta(2-2\eta-\eta\varepsilon'(t)+2\eta^2\varepsilon(t))\|\nabla\xi\|^2=\\&\quad-2(f(u^1)-f(u^2),\omega)+2(g(t,u_t^1)-g(t,u_t^2),\omega).\end{aligned} \tag{27}$$

由条件(5)、Young 和 Hölder 不等式以及 $H_0^1\hookrightarrow L^{2N/(N-2)}$，可得

$$\begin{aligned}-2(f(u^1)-f(u^2),\omega)\leqslant{}&2C\int_\Omega(1+|u^1|^{2/(N-2)}+|u^2|^{2/(N-2)})|\xi||\omega|\mathrm{d}x\leqslant\\&2C\left[\int_\Omega(1+|u^1|^{2/(N-2)}+|u^2|^{2/(N-2)})^2|\xi|^2\mathrm{d}x\right]^{1/2}\left(\int_\Omega|\omega|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant\\&2C\left\{\left[\int_\Omega(1+|u^1|^{2N/(N-2)}+|u^2|^{2N/(N-2)})\mathrm{d}x\right]^{2/N}\times\right.\\&\left.\left(\int_\Omega|\xi|^{2N/(N-2)}\mathrm{d}x\right)^{(N-2)/N}\right\}^{1/2}\left(\int_\Omega|\omega|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant\\&2C\left[\int_\Omega(1+|u^1|^{2N/(N-2)}+|u^2|^{2N/(N-2)})\mathrm{d}x\right]^{1/N}\|\nabla\xi\|\,\|\nabla\omega\|\leqslant\\&2C(1+\|\nabla u^1\|^2+\|\nabla u^2\|^2)^{1/(N-2)}\|\nabla\xi\|\,\|\nabla\omega\|\leqslant\\&C_*(\|\nabla\xi\|^2+\|\nabla\omega\|^2).\end{aligned} \tag{28}$$

再利用条件(9)、Young 和 Hölder 不等式，得

$$\begin{aligned}2(g(t,u_t^1)-g(t,u_t^2),\omega)\leqslant{}&2\|g(t,u_t^1)-g(t,u_t^2)\|\cdot\|\omega\|\leqslant\\&\|g(t,u_t^1)-g(t,u_t^2)\|^2+\|\omega\|^2\leqslant\\&C_g\|u_t^1-u_t^2\|_{C_{L^2}}^2+\|\omega\|^2=C_g\|\xi_t\|_{C_{L^2}}^2+\|\omega\|^2.\end{aligned} \tag{29}$$

将式(28)和式(29)代入式(27)，并由 Poíncare 不等式 $\lambda_1\|\omega\|^2\leqslant\|\nabla\omega\|^2$，再取 $\eta<\min\left\{\dfrac{4}{\lambda_1},\dfrac{1+L}{4\varepsilon(t)}\right\}$，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|\omega\|^2+\varepsilon(t)\|\nabla\omega\|^2+\eta^2\|\xi\|^2+(1-\eta+\eta^2\varepsilon(t))\|\nabla\xi\|^2]+\\&\quad 2\eta[\|\omega\|^2+\varepsilon(t)\|\nabla\omega\|^2+\eta^2\|\xi\|^2+(1-\eta+\eta^2\varepsilon(t))\|\nabla\xi\|^2]\leqslant\\&\quad C_*(\|\nabla\xi\|^2+\|\nabla\omega\|^2)+C_g\|\xi_t\|_{C_{L^2}}^2+\|\omega\|^2,\end{aligned} \tag{30}$$

在 τ 到 t 上对式(30)积分，有

$$\begin{aligned}&\|\omega(t)\|^2+\varepsilon(t)\|\nabla\omega(t)\|^2+\eta^2\|\xi(t)\|^2+(1-\eta+\eta^2\varepsilon(t))\|\nabla\xi(t)\|^2\leqslant\\&\quad\|\omega(\tau)\|^2+\varepsilon(\tau)\|\nabla\omega(\tau)\|^2+\eta^2\|\xi(\tau)\|^2+(1-\eta+\eta^2\varepsilon(\tau))\|\nabla\xi(\tau)\|^2+\\&\quad\int_\tau^t[C_*(\|\nabla\xi(s)\|^2+\|\nabla\omega(s)\|^2)+C_g\|\xi_s\|_{C_{L^2}}^2+\|\omega(s)\|^2]\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{31}$$

用 $t+\theta$ 代替 t，并由 Poíncare 不等式，得

$$\begin{aligned}&\|\omega_t\|^2+\varepsilon_t\|\nabla\omega_t\|^2+\eta^2\|\xi_t\|^2+(1-\eta+\eta^2\varepsilon_t)\|\nabla\xi_t\|^2\leqslant\\&\quad\|\omega(\tau)\|^2+\varepsilon(\tau)\|\nabla\omega(\tau)\|^2+\eta^2\|\xi(\tau)\|^2+(1-\eta+\eta^2\varepsilon(\tau))\|\nabla\xi(\tau)\|^2+\\&\quad\int_\tau^t[C_*(\|\nabla\xi_s\|^2+\|\nabla\omega_s\|^2)+C_g\|\xi_s\|_{C_{L^2}}^2+\|\omega_s\|^2]\mathrm{d}s\leqslant\end{aligned}$$

$$\|\omega(\tau)\|^2+\varepsilon(\tau)\|\nabla\omega(\tau)\|^2+\eta^2\|\xi(\tau)\|^2+(1-\eta+\eta^2\varepsilon(\tau))\|\nabla\xi(\tau)\|^2+$$
$$\left(C_*+\frac{C_g}{\lambda_1}\right)\int_\tau^t\|\nabla\xi_s\|^2\mathrm{d}s+\left(C_*+\frac{1}{\lambda_1}\right)\int_\tau^t\|\nabla\omega_s\|^2\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\|\omega(\tau)\|^2+\varepsilon(\tau)\|\nabla\omega(\tau)\|^2+\eta^2\|\xi(\tau)\|^2+(1-\eta+\eta^2\varepsilon(\tau))\|\nabla\xi(\tau)\|^2+$$
$$C_0\int_\tau^t(\|\nabla\xi_s\|^2+\|\nabla\omega_s\|^2)\mathrm{d}s,\tag{32}$$

其中 $C_0=\max\left\{C_*+\dfrac{C_g}{\lambda_1},C_*+\dfrac{1}{\lambda_1}\right\}$.

记

$$y(t)=\|\omega_t\|^2+\varepsilon_t\|\nabla\omega_t\|^2+\eta^2\|\xi_t\|^2+(1-\eta+\eta^2\varepsilon_t)\|\nabla\xi_t\|^2,$$

则有

$$y(t)\leqslant y(\tau)+C_0\int_\tau^t y(s)\mathrm{d}s,\tag{33}$$

应用 Gronwall 引理，可得

$$y(t)\leqslant y(\tau)\mathrm{e}^{C_0(t-\tau)}.$$

证毕.

根据定理 3，可定义过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 为

$$U(t,\tau):C_{\mathscr{H}_t}\to C_{\mathscr{H}_t},\qquad\forall\, t\geqslant\tau,$$

且 $U(t,\tau)\phi=\{u_t(\cdot;\tau;\phi)\,|\,u(\cdot)$ 是方程(1)的解，$\phi\in C_{\mathscr{H}_t}\}$，同时过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中是连续的.

3　时间依赖 $\mathscr{D}_\beta$ 拉回吸引子的存在性

记 $\mathscr{D}_\beta$ 为所有非空子集 $\hat{D}=\{D(t);\ t\in\mathbb{R}\}\subset\mathscr{P}(C_{\mathscr{H}_t})$ 组成的集类，且

$$\lim_{t\to-\infty}(\mathrm{e}^{\beta t}\sup_{z\in D(t)}\|z\|^2_{C_{\mathscr{H}_t}})=0,\tag{34}$$

其中 $\beta>0$.

引理 1　假设条件(H_1)～(H_4)成立，初值 $\phi\in C_{\mathscr{H}_t}$，则方程(1)的解 $z=(u(t),\partial_t u)$ 满足下列估计式：

$$\|\nabla u_t\|^2_{C_{L^2}}+\|u_t'\|^2_{C_{L^2}}+\varepsilon_t\|\nabla u_t'\|^2_{C_{L^2}}\leqslant$$
$$(\|\nabla u(\tau)\|^2_{C_{L^2}}+\|u(\tau)'\|^2_{C_{L^2}}+\varepsilon(\tau)\|\nabla u(\tau)'\|^2_{C_{L^2}})\mathrm{e}^{-\beta(t-h-\tau)}+$$
$$C_2\mathrm{e}^{-\beta(t-h)}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\beta s}\|k(s)\|^2\mathrm{d}s+C_3\mathrm{e}^{-\beta(t-h-\tau)}\|\phi\|^2_{\mathscr{H}_t}+\frac{C_4}{\beta},\tag{35}$$

其中 $C_1=\dfrac{2L_g^2}{\alpha}$，$C_2=\dfrac{2}{\alpha}$，$C_3=\dfrac{2hL_g^2}{\alpha}$，$C_4=\alpha c$，$\alpha-C_1=\beta$.

证明：用 $v=u'+\alpha u$ 与方程(1)在 L^2 中做内积，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|v\|^2+\varepsilon(t)\|\nabla v\|^2+\alpha^2\|u\|^2+(1-\alpha+\alpha^2\varepsilon(t))\|\nabla u\|^2]-$$
$$2\alpha\|v\|^2+(2-\varepsilon'(t)-2\alpha\varepsilon(t))\|\nabla v\|^2+$$
$$\alpha^3\|u\|^2+\alpha(2-2\alpha-\alpha\varepsilon'(t)+2\alpha^2\varepsilon(t))\|\nabla u\|^2+$$
$$2(f(u),v)=2(g(t,u_t),v)+2(k(t),v).\tag{36}$$

类似于定理 3 的证明，有

$$\|v(t)\|^2+\varepsilon(t)\|\nabla v(t)\|^2+\alpha^2\|u(t)\|^2+(1-\alpha+\alpha^2\varepsilon(t))\|\nabla u(t)\|^2+2(F(u(t)),1)\leqslant$$
$$[\|v(\tau)\|^2+\varepsilon(\tau)\|\nabla v(\tau)\|^2+\alpha^2\|u(\tau)\|^2+$$
$$(1-\alpha+\alpha^2\varepsilon(\tau))\|\nabla u(\tau)\|^2+2(F(u(\tau)),1)]\mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)}+$$
$$C_2\mathrm{e}^{-\beta t}\int_\tau^t\mathrm{e}^{\beta s}\|k(s)\|^2\mathrm{d}s+C_3\mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)}\|\phi\|^2_{\mathscr{H}_t}+\frac{C_4}{\beta}.\tag{37}$$

用 $t+\theta$ 代替 $t(\theta\in[-h,0])$，可得

$$\|z\|^2_{C_{\mathscr{H}_t}}=\|\nabla u_t\|^2_{C_{L^2}}+\|u_t'\|^2_{C_{L^2}}+\varepsilon_t\|\nabla u_t'\|^2_{C_{L^2}}\leqslant$$
$$(\|\nabla u(\tau)\|^2_{C_{L^2}}+\|u(\tau)'\|^2_{C_{L^2}}+\varepsilon(\tau)\|\nabla u(\tau)'\|^2_{C_{L^2}})\mathrm{e}^{-\beta(t-h-\tau)}+$$
$$C_2\mathrm{e}^{-\beta(t-h)}\int_\tau^t \mathrm{e}^{\beta s}\|k(s)\|^2\mathrm{d}s+C_3\mathrm{e}^{-\beta(t-h-\tau)}\|\phi\|^2_{\mathscr{H}_t}+\frac{C_4}{\beta}. \tag{38}$$

定理4(**拉回 $\mathscr{D}_\beta$-吸收集**) 假设条件(H_1)~(H_4)成立,$\hat{D}_1=\{D_1(t);\ t\in\mathbb{R}\}$且$D_1(t)=\widetilde{B}_{\mathscr{H}_t}(0,\rho(t))$表示以零为中心、半径为$\rho(t)$的闭球,其中
$$\rho^2(t)=C_2\mathrm{e}^{-\beta(t-h)}\int_\tau^t \mathrm{e}^{\beta s}\|k(s)\|^2\mathrm{d}s+\frac{C_4}{\beta}<\infty, \tag{39}$$
则对应方程(1)的过程$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$是拉回$\mathscr{D}_\beta$-吸收的,而且$\hat{D}_1\in\mathscr{D}_\beta$.

证明:根据引理1的结果可知,$\hat{D}_1$是方程(1)的拉回$\mathscr{D}_\beta$-吸收集,由式(34)和式(39),当$t\to-\infty$时,有$\mathrm{e}^{\beta t}\rho^2(t)\to 0$,则$\hat{D}_1\in\mathscr{D}_\beta$. 证毕.

定理5 假设条件(H_1)~(H_4)成立,则过程$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$在$C_{\mathscr{H}_t}$中是$\mathscr{D}_{C_{\mathscr{H}_t}}$-拉回渐近紧的.

证明:对任意的$T\geqslant t-s$且$s\geqslant 0$,有
$$\{U(T,t-s)\}\phi=\{u_T(\cdot;t-s;\phi)\mid u(\cdot)\text{是方程(1)的解, 且}\ \phi\in Q(t-s)\},$$
其中$\mathscr{Q}_{C_{\mathscr{H}_t}}=\{Q(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$是$C_{\mathscr{H}_t}$中的$\mathscr{D}_{C_{\mathscr{H}_t}}$-拉回吸收集.

令$u=v+w$,将方程(1)做如下分解:
$$\begin{cases} v_{TT}-\Delta v-\Delta v_T-\varepsilon(T)\Delta v_{TT}+f(u)=g(T,u_T)+k(x,t), & T\geqslant t-s,\\ v(x,T)=0, & t-s-h\leqslant T\leqslant t-s,\\ \partial_T v(x,T)=0, & t-s-h\leqslant T\leqslant t-s,\\ v|_{\partial\Omega}=0, & T\geqslant t-s; \end{cases} \tag{40}$$
$$\begin{cases} w_{TT}-\Delta w-\Delta w_T-\varepsilon(T)\Delta w_{TT}=0, & T\geqslant t-s,\\ w(x,T)=\phi(x,T-t+s), & t-s-h\leqslant T\leqslant t-s,\\ \partial_T w(x,T)=\partial_T\phi(x,T-t+s), & t-s-h\leqslant T\leqslant t-s,\\ w|_{\partial\Omega}=0, & T\geqslant t-s. \end{cases} \tag{41}$$
对于方程(41),根据式(38),当$f=g=k=0$时,有
$$\|z_\omega\|^2_{C_{\mathscr{H}_t}}\leqslant C_1\mathrm{e}^{-\beta s}\|\phi\|^2_{C_{\mathscr{H}_t}}. \tag{42}$$

下面估计满足式(40)的解,设u^1和u^2是方程(1)的解,对应的初值为ϕ^1和ϕ^2,令$y(T)=v^1-v^2$,其中v^1和v^2是方程(40)的解,则$y(T)$满足下列方程:
$$\begin{cases} y_{TT}-\Delta y-\Delta y_T-\varepsilon(T)\Delta y_{TT}+f(u^1)-f(u^2)=g(T,u_T^1)-g(T,u_T^2), & T\geqslant t-s,\\ y(x,T)=0, & t-s-h\leqslant T\leqslant t-s,\\ \partial_T y(x,T)=0, & t-s-h\leqslant T\leqslant t-s,\\ y|_{\partial\Omega}=0, & T\geqslant t-s. \end{cases} \tag{43}$$
用$y'(T)$与方程(43)在L^2中做内积,可得
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|y'(T)\|^2+\|\nabla y(T)\|^2+\varepsilon(T)\|\nabla y'(T)\|)+(2-\varepsilon'(T))\|\nabla y'(T)\|=$$
$$(f(u^2)-f(u^1),y'(T))+(g(T,u_T^1)-g(T,u_T^2),y'(T)), \tag{44}$$
将式(44)在$[t-s,t+\theta]$上积分(其中$\theta\in[-h,0]$),有
$$\|y'(t+\theta)\|^2+\|\nabla y(t+\theta)\|^2+\varepsilon(t+\theta)\|\nabla y'(t+\theta)\|\leqslant$$
$$2\int_{t-s}^{t+\theta}(f(u^2(T))-f(u^1(T)),y'(T))\mathrm{d}T+$$
$$2\int_{t-s}^{t+\theta}(g(T,u_T^1)-g(T,u_T^2),y'(T))\mathrm{d}T. \tag{45}$$
由式(4),有
$$(f(u^2(T))-f(u^1(T)),y'(T))\leqslant\|f(u^2(T))-f(u^1(T))\|\cdot\|y'(T)\|\leqslant$$

$$l\cdot\|u^1(T)-u^2(T)\|\cdot\|y'(T)\|. \tag{46}$$

将式(46)代入式(45)可得

$$\begin{aligned}&\|y'(t+\theta)\|^2+\|\nabla y(t+\theta)\|^2+\varepsilon(t+\theta)\|\nabla y'(t+\theta)\|\leqslant\\&\qquad 2l\cdot\|u^2(T)-u^1(T)\|_{L^2(\Omega\times[t-s,t])}\cdot\|y'(T)\|_{L^2(\Omega\times[t-s,t])}+\\&\qquad 2\|g(T,u_T^1)-g(T,u_T^2)\|_{L^2(\Omega\times[t-s,t])}\cdot\|y'(T)\|_{L^2(\Omega\times[t-s,t])}.\end{aligned}\tag{47}$$

设 $u_{nT}\in U(T,t-s)\phi_n$ 且 $\phi_n\in Q(t-s)$，根据式(38)可设：$u_n\to u$ 弱 * 收敛于 $L^\infty(t-s-h,t;H^1(\Omega))$；$\partial_t u_n\to u$ 弱 * 收敛于 $L^\infty(t-s-h,t;H_0^1(\Omega))$. 因此 $u_n\to u$ 弱收敛于 $L^2(t-s-h,t;H^1(\Omega))$.

由于 g：$\mathbb{R}\times C_{L^2(\Omega)}\mapsto L^2(\Omega)$，对每个 a. e$\sim(T,x)\in[t-s-h,t]\times\Omega$，有 $g(T,u_{nT})\to g(T,u_T)$ $(n\to\infty)$，根据 Lebesgue 控制收敛定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\|g(T,u_{nT})\|-g(T,u_{mT})\|_{L^2(\Omega\times[t-s,t])}=0, \tag{48}$$

所以

$$\begin{aligned}&\|v_{nt}-v_{mt}\|_{C_{H^1}}^2+\|v'_{nt}-v'_{mt}\|_{C_{L^2}}^2+\varepsilon(t)\|\nabla v'_{nt}-\nabla v'_{mt}\|_{C_{L^2}}^2=\\&\qquad\sup_{\theta\in[-h,0]}(\|v_n(t+\theta)-v_m(t+\theta)\|^2+\|v'_n(t+\theta)-v'_m(t+\theta)\|^2+\\&\qquad\varepsilon(t+\theta)\|\nabla v'_n(t+\theta)-\nabla v'_m(t+\theta)\|^2)\leqslant\\&\qquad 2l\cdot\|u^1(T)-u^2(T)\|_{L^2(\Omega\times[t-s,t])}\cdot\|y'(T)\|_{L^2(\Omega\times[t-s,t])}+\\&\qquad 2\|g(T,u_T^1)-g(T,u_T^2)\|_{L^2(\Omega\times[t-s,t])}\cdot\|y'(T)\|_{L^2(\Omega\times[t-s,t])}.\end{aligned}$$

结合式(47)和式(48)得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\|v_{nt}-v_{mt}\|_{C_{H^1}}^2+\|v'_{nt}-v'_{mt}\|_{C_{L^2}}^2+\varepsilon(t)\|\nabla v'_{nt}-\nabla v'_{mt}\|_{C_{L^2}}^2=0, \tag{49}$$

再结合式(44)～(49)和定理 1 知，过程$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$是 $\mathscr{D}_{C_{\mathscr{H}_t}}$-拉回渐近紧的. 证毕.

定理 6(**$\mathscr{D}_{C_{\mathscr{H}_t}}$-拉回吸引子的存在性**)　假设引理 1 的条件成立，则过程$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中有唯一的时间依赖拉回吸引子$\{\mathscr{A}_{C_{\mathscr{H}_t}}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}\in\mathscr{D}_{C_{\mathscr{H}_t}}$.

证明：根据定理 4 和定理 5 可知，方程(1)的过程族$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 中存在一个 $\mathscr{D}_{C_{\mathscr{H}_t}}$-拉回吸收集和 $\mathscr{D}_{C_{\mathscr{H}_t}}$-拉回渐近紧的. 为得到 $\mathscr{D}_{C_{\mathscr{H}_t}}$-拉回吸引子的存在性，只需证明$\{\mathscr{A}_{C_{\mathscr{H}_t}}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}\in\mathscr{D}_{C_{\mathscr{H}_t}}$ 的正不变性，其中

$$\{\mathscr{A}_{C_{\mathscr{H}_t}}(t)\}=w_t(\mathscr{Q}_{C_{\mathscr{H}_t}})=\bigcap_{T\in\mathbb{R}^+}\overline{\bigcup_{s\geqslant\tau}U(t,t-s)Q(t-s)},\qquad\forall t\in\mathbb{R},$$

且 $\mathscr{Q}_{C_{\mathscr{H}_t}}=\{Q(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$是过程$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$在 $C_{\mathscr{H}_t}$ 上的 $\mathscr{D}_{C_{\mathscr{H}_t}}$-拉回吸收集.

设 $y\in\mathscr{A}_{C_{\mathscr{H}_t}}(t)$，存在序列 $s_n\in\mathbb{R}^+(s_n\to+\infty)$，$x_n\in Q(t-s_n)$和 $y_n\in U(t,t-s_n)x_n$，使得当 $n\to\infty$ 时，在 $C_{\mathscr{H}_t}(t)$上 $y_n\to y$. 另一方面，对充分大的 n，有

$$y_n\in U(t,t-s)x_n=U(t,\tau)U(\tau,t-s_n)x_n. \tag{50}$$

由过程$\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$是 $\mathscr{D}$-拉回渐近紧的知，存在一个子序列

$$\tilde{x}_n\in U(\tau,t-s_n)x_n=U(\tau,\tau-(\tau+s_n-t))x_n,$$

仍记作 $\tilde{x}_n$，使得 $y_n\in U(t,\tau)\tilde{x}_n$，且在 $C_{\mathscr{H}_t}(t)$上，有

$$\tilde{x}_n\to x,\qquad n\to\infty. \tag{51}$$

则显然有 $x\in\mathscr{A}_{C_{\mathscr{H}_t(\Omega)}}$，由定理 3 解的存在性可知，在 $L^2(-h,0;\mathscr{H}_t(\Omega))$中，有

$$y_n(\cdot)\rightharpoonup u(\cdot+t,\tau,x),$$

其中 u 是方程(1)的解，结合式(50)，(51)，可得 $y\in U(t,\tau)x\subset U(t,\tau)\mathscr{A}_{C_{\mathscr{H}_t}}(\tau)$. 证毕.

参 考 文 献

[1] SUN C Y，YANG L，DUAN J Q. Asymptotic Behavior for a Semilinear Second Order Evolution Equation [J]. Transactions of the American Mathematical Society，2011，363(11)：6085-6109.

[2] XIE Y Q，ZHONG C K. Asymptotic Behavior of a Class of Nonlinear Evolution Equations [J]. Nonlinear

Analysis: Theory Methods & Applications, 2009, 71(11): 5095-5105.

[3] XIE Y Q, ZHONG C K. The Existence of Global Attractors for a Class Nonlinear Evolution Equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 336(1): 54-69.

[4] CARVALHO A N, CHOLEWA J W. Attractors for Strongly Damped Wave Equations with Critical Nonlinearities [J]. Pacific Journal of Mathematics, 2002, 207(2): 287-310.

[5] CARVALHO A N, CHOLEWA J W, DLOTKO T. Strongly Damped Wave Problems: Bootstrapping and Regularity of Solutions [J]. Journal of Differential Equations, 2008, 244(9): 2310-2333.

[6] ZHANG F H, WANG S L, WANG L. Robust Exponential Attractors for a Class of Non-autonomous Semi-linear Second-Order Evolution Equation with Memory and Critical Nonlinearity [J]. Applicable Analysis, 2019, 98(6): 1052-1084.

[7] 白京, 汪璇. 衰退记忆型无阻尼吊桥方程的时间依赖拉回吸引子 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2023, 61(2): 189-202. (BAI J, WANG X. Time-Dependent Pullback Attractors for Non-damping Suspension Bridge Equation with Fading Memory [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2023, 61(2): 189-202.)

[8] LIU T T, MA Q Z. Time-Dependent Global Attractor of Nolinear Evolution Equation with Nolinear Damping [J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 2017, 54(5): 917-924.

[9] QIN Y M, YANG B. Existence and Regularity of Pullback Attractors for a Non-autonomous Diffusion Equation with Delay and Nonlocal Diffusion in Time-Dependent Spaces [J]. Applied Mathematics and Optimization, 2023, 88(1): 10-1-10-25.

[10] LIU T T, SHARFI T M H, MA Q Z. Time-Dependent Asymptotic Behavior of the Solution for Evolution Equation with Linear Memory [J]. AIMS Mathematics, 2023, 8(7): 16208-16227.

[11] MARÍN-RUBIO P, REAL J. Pullback Attractors for 2D-Navier-Stokes Equations with Delay in Continuous and Sub-linear Operators [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2010, 26(3): 989-1006.

[12] RAN Y P, SHI Q H. Pullback Attractors for Nonautonomous Damped Wave Equation with Infinite Delays in Weighted Space [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2018, 41(12): 4612-4640.

[13] WANG Y J. Pullback Attractors for a Damped Wave Equation with Delays [J]. Stochastics and Dynamics, 2015, 15(1): 1550003-1-1550003-21.

[14] ZHU K X, XIE Y Q, ZHOU F. Pullback Attractors for a Damped Semilinear Wave Equation with Delays [J]. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2018, 34(7): 1131-1150.

[15] ZHANG F H, CHEN X H. Pullback Attractors for a Class of Semilinear Second-Order Nonautonomous Evolution Equations with Hereditary Characteristics [J/OL]. Journal of Mathematics, (2022-10-12)[2023-12-15]. https://doi.org/10.1155/2022/8264550.

[16] CHUESHOV I, REZOUNENKO A. Dynamics of Second Order in Time Evolution Equations with State-Dependent Delay [J]. Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications, 2015, 123/124: 126-149.

[17] CHUESHOV I, KLOEDEN P E, YANG M H. Long Term Dynamics of Second Order-in-Time Stochastic Evolution Equations with State-Dependent Delay [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems: Serier B, 2018, 23(3): 991-1009.

(责任编辑: 赵立芹)