doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024019

一类 Conformable 分数阶发展方程温和解的存在性

安文艳，杨　和
（西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070）

摘要：用算子半群理论和上下解单调迭代方法讨论 Banach 空间中具有 Volterra 型积分算子的一类 Conformable 分数阶发展方程初值问题

$$\begin{cases} T_\alpha u(t)+Au(t)=f(t,u(t),Gu(t)), & t\in I,\\ u(0)=x_0 \end{cases}$$

温和解的存在性，其中：T_α 表示阶数为 $0<\alpha<1$ 的 Conformable 分数阶导数算子；A 为稠定闭线性算子，$-A$：$D(A)\subset E\to E$ 生成一致有界的 C_0-半群 $T(t)(t\geqslant 0)$；$f\in C(I\times E\times E,E)$，且 $I=[0,b]$；$Gu(t)=\int_0^t K(t,s)u(s)\mathrm{d}s$ 是 Voletrra 型积分算子，其积分核 $K\in C(\Delta,\mathbb{R}^+)$，$\Delta=\{(t,s)\mid 0\leqslant s\leqslant t\leqslant b\}$，记 $K_0=\max\limits_{(t,s)\in\Delta}K(t,s)$. 在非线性项满足适当的不等式条件下，得到了该方程温和解的存在性.

关键词：分数阶发展方程；温和解；上下解；单调迭代方法
中图分类号：O175.15　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5489(2024)05-1072-07

Existence of Mild Soulutions for a Class of Conformable Fractional Evolution Equations

AN Wenyan，YANG He
(*College of Mathematics and Statistics*，*Northwest Normal University*，*Lanzhou* 730070，*China*)

Abstract：By using operator semigroup theory and upper and lower solution monotone iterative methods，we discuss the existence of mild solutions to initial value problems

$$\begin{cases} T_\alpha u(t)+Au(t)=f(t,u(t),Gu(t)), & t\in I,\\ u(0)=x_0 \end{cases}$$

for a class of Conformable fractional evolution equations with Volterra-type integral operators in Banach spaces，where T_α represents the Conformable fractional derivative operator with order $0<\alpha<1$，A is a coherently closed linear operator，$-A$：$D(A)\subset E\to E$ generate uniformly bounded C_0-semigroup $T(t)(t\geqslant 0)$，$f\in C(I\times E\times E,E)$，and $I=[0,b]$，$Gu(t)=\int_0^t K(t,s)u(s)\mathrm{d}s$ is integral operator of Voletrra-type，integral kernel $K\in C(\Delta,\mathbb{R}^+)$，$\Delta=\{(t,s)\mid 0\leqslant s\leqslant t\leqslant b\}$，recorded as

收稿日期：2024-01-12.　**网络首发日期**：2024-07-15.
第一作者简介：安文艳(1997—)，女，汉族，硕士研究生，从事非线性泛函分析的研究，E-mail：aa18919176049@163.com. **通信作者简介**：杨　和(1982—)，男，汉族，博士，教授，从事非线性泛函分析的研究，E-mail：yanghe@nwnu.edu.cn.
基金项目：国家自然科学基金(批准号：12061062).
网络首发地址：https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20240710.1056.002.

$K_0=\max\limits_{(t,s)\in\Delta}K(t,s)$. Under the condition that the nonlinear term satisfies the appropriate inequality, the existence of the mild solution to the equation is obtained.

Keywords: fractional evolution equation; mild solution; upper and lower solution; monotone iterative method

0 引　言

在电磁学、力学、医学、信息处理等实际应用中，分数阶微分方程比整数阶微分方程应用更广泛．目前，对分数阶发展方程温和解的存在性和唯一性研究备受关注．El-Borai[1]通过引入概率密度函数研究分数阶微分发展方程，得到了其古典解的存在性；文献[2-4]分别研究了 $0<\alpha<1$ 和 $1<\alpha<2$ 分数阶发展方程温和解的存在性；Chen 等[5]用不动点定理研究了 Banach 空间 E 中分数阶发展方程初值问题

$$\begin{cases} D_0^\alpha u(t)+Au(t)=f(t,u(t)), & t\geqslant 0,\\ u(0)=x_0 \end{cases}$$

温和解的存在性，其中 D_0^α 表示阶数为 $0<\alpha<1$ 的 Caputo 型分数阶导数，$-A$：$D(A)\subset E\to E$ 生成一致有界的 C_0-半群 $T(t)(t\geqslant 0)$ 的无穷小生成元．近年来，一种分数阶导数的新定义——Conformable 分数阶导数被广泛关注[2-4]．Conformable 分数阶导数的定义可满足经典分数阶导数不能满足的一些性质，如乘积法则、商法则、链式法则、Rolle 定理和中值定理等，其在生物物理学、电容理论、控制理论和实验数据拟合等领域应用广泛．受上述研究工作的启发，本文主要用算子半群理论和上下解单调迭代方法讨论具有 Voletrra 型积分算子的 Conformable 分数阶微分方程初值问题

$$\begin{cases} T_\alpha u(t)+Au(t)=f(t,u(t),Gu(t)), & t\in I,\\ u(0)=x_0 \end{cases}\tag{1}$$

温和解的存在性，其中：T_α 表示阶数为 $0<\alpha<1$ 的 Conformable 分数阶导数算子；A 为稠定闭线性算子，$-A$：$D(A)\subset E\to E$ 生成一致有界的 C_0-半群 $T(t)(t\geqslant 0)$，即存在常数 $M\geqslant 1$，使得 $\|T(t)\|\leqslant M$；$f\in C(I\times E\times E,E)$，且 $I=[0,b]$；$Gu(t)=\int_0^t K(t,s)u(s)\mathrm{d}s$ 是 Voletrra 型积分算子，其积分核 $K\in C(\Delta,\mathbb{R}^+)$，$\Delta=\{(t,s)\mid 0\leqslant s\leqslant t\leqslant b\}$，记 $K_0=\max\limits_{(t,s)\in\Delta}K(t,s)$．

1 预备知识

定义 1[6-8]　设 $\alpha\in(n,n+1)$，f：$[0,\infty)\to\mathbb{R}$，则 f 的 Conformable 分数阶导数可定义为

$$T_\alpha f(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{([n]-1)}(t+\varepsilon t^{([n]-\alpha)})-f^{([n]-1)}(t)}{\varepsilon},\qquad t>0,$$

其中$[n]$表示大于等于 n 的最小整数．特别地，当 $\alpha\in(0,1)$时，有

$$T_\alpha f(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{(1-\alpha)})-f(t)}{\varepsilon},\qquad t>0.$$

关于 Conformable 分数阶导数，有如下结果．

引理 1[6-8]　设 $\alpha\in(0,1)$，函数 f 和 g 在 $t>0$ 上可微，则：

1) $T_\alpha(af+bg)=aT_\alpha(f)+bT_\alpha(g)$，$\forall a,b\in\mathbb{R}$；

2) $T_\alpha(t^p)=pt^{p-1}$，$\forall p\in\mathbb{R}$；

3) $T_\alpha(\lambda)=0$，$\forall\lambda\in\mathbb{R}$；

4) $T_\alpha(fg)=fT_\alpha(g)+gT_\alpha(f)$；

5) $T_\alpha\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{gT_\alpha(f)-fT_\alpha(g)}{g^2}$；

6) $T_\alpha(f)(t)=t^{1-\alpha}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)$．

定义2[7] 设$\alpha\in(n,n+1)$，则函数f的α阶积分定义为

$$I^{\alpha}f(t)=\frac{1}{n!}\int_0^t(t-s)^n s^{\alpha-n-1}f(s)\mathrm{d}s,\qquad 0<\alpha<1.$$

定义3[9] 设E为Banach空间，S是E中的有界集. 令

$$\alpha(S)=\inf\{\delta>0\,|\,S=\bigcup_{i=1}^{m}S_i,\ d(S_i)\leqslant\delta,\ i=1,2,\cdots,m\},$$

则$\alpha(S)$称为集合S的Kuratowski非紧性测度，其中$d(S_i)$表示集合S_i的直径.

引理2[9] 非紧性测度$\alpha(\cdot)$有如下性质：

1) $\alpha(S)=0\Leftrightarrow S$为相对紧集；

2) $S\subset T\Rightarrow\alpha(S)\leqslant\alpha(T)$；

3) $\alpha(S\cup T)\leqslant\max\{\alpha(S),\alpha(T)\}$；

4) $\alpha(aS)=|a|\alpha(S)$，$aS=\{x\,|\,x=ay,\ y\in S\}$，$a\in\mathbb{R}$；

5) $\alpha(S+T)\leqslant\alpha(S)+\alpha(T)$，其中$S+T=\{x\,|\,x=y+z,\ y\in S,\ z\in T\}$；

6) $\alpha(\overline{\mathrm{co}}\,S)=\alpha(S)$.

其中S,T表示E中的有界集.

引理3[10] 设E为Banach空间，若$W=\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C(I,E)$是有界可数集，则$\alpha(W(t))$在$[a,b]$上Lebesgue有界可测，且

$$\alpha\left(\left\{\int_I u_n(s)\mathrm{d}s\right\}\right)\leqslant 2\int_I\alpha(W(t))\mathrm{d}t.$$

考虑非线性发展方程初值问题

$$\begin{cases}T_{\alpha}u(t)+Au(t)+Cu(t)=f(t,u(t),Gu(t))+Cu(t), & t\in I,\\ u(0)=x_0,\end{cases}\tag{2}$$

其中$C>0$为常数，$-(A+CI)$为C_0-半群$S(t)=\mathrm{e}^{-Ct}T(t)(t\geqslant0)$的无穷小生成元. 显然，问题(2)与问题(1)同解.

定义4[11] 称$u\in C(I,E)$是问题(2)的温和解，当且仅当u满足积分方程

$$u(t)=S\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^{\alpha}-s^{\alpha}}{\alpha}\right)(f(s,u(s),Gu(s))+Cu(s))\mathrm{d}s,\qquad t\in I.\tag{3}$$

定义5 如果u满足

$$u(t)\leqslant S\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^{\alpha}-s^{\alpha}}{\alpha}\right)(f(s,u(s),Gu(s))+Cu(s))\mathrm{d}s,\qquad t\in I,\tag{4}$$

则u称为问题(2)的下温和解；如果

$$u(t)\geqslant S\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^{\alpha}-s^{\alpha}}{\alpha}\right)(f(s,u(s),Gu(s))+Cu(s))\mathrm{d}s,\qquad t\in I,\tag{5}$$

则u称为问题(2)的上温和解.

引理4[12] 设K为非负常数，$f(t)$和$g(t)$为区间$[a,b]$上的非负连续函数，且满足不等式

$$f(t)\leqslant K+\int_0^t f(s)g(s)\mathrm{d}s,\qquad t\in[\alpha,\beta].$$

则

$$f(t)\leqslant K\exp\left\{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right\}.$$

2 主要结果

假设条件：

(H_1) 存在常数$C>0$，使得对$\forall\,t\in I$，$v_0(t)\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant w_0(t)$，$Gv_0(t)\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant Gw_0(t)$，有

$$f(x_1,y_1,z_1)-f(x_2,y_2,z_2)\geqslant -C(x_2-x_1);$$

(H_2) 存在常数$L>0$，使得对$\forall\,t\in I$及单调序列$\{x_n(t)\}\subset[v_0(t),w_0(t)]$和$\{y_n(t)\}\subset$

$[Gv_0(t),Gw_0(t)]$，有

$$\alpha(\{f(t,x_n,y_n)\})\leqslant L(\alpha(\{x_n\})+\alpha(\{y_n\})).$$

定理 1　设 E 为有序的 Banach 空间，其正元锥 P 为正规锥. 假设 $-A$ 生成 C_0-半群 $T(t)(t\geqslant 0)$ 是正的紧半群，v_0,w_0 分别是问题(2)的下温和解与上温和解，且 $v_0\leqslant w_0$，$f\in C(I\times E\times E,E)$ 满足条件(H_1). 则分数阶发展方程初值问题(1)在 v_0 和 w_0 之间存在极小温和解和极大温和解.

证明：由于 $T(t)(t\geqslant 0)$ 是正的紧半群，所以 $S(t)$ 是正的紧半群，并且有 $\|S(t)\|\leqslant M$. 定义算子 Q：$[v_0,w_0]\to C(I,E)$ 为

$$(Qu)(t)=S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)(f(s,u(s),Gu(s))+Cu(s))\mathrm{d}s. \tag{6}$$

显然，Q：$[v_0,w_0]\to C(I,E)$ 为连续算子，且问题(1)的温和解等价于算子 Q 的不动点. 下面分四步完成证明.

1) 证明 Q：$[v_0,w_0]\to C(I,E)$ 等度连续. 设 $\forall u\in[v_0,w_0]$，$0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant b$，则

$$\begin{aligned}\|Qu(t_2)-Qu(t_1)\|=&\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha}{\alpha}\right)x_0+\int_0^{t_2}s^{\alpha-1}S\left(\frac{t_2^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)(f(s,u(s),Gu(s))+Cu(s))\mathrm{d}s-\right.\\&\left.S\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)x_0-\int_0^{t_1}s^{\alpha-1}S\left(\frac{t_1^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)(f(s,u(s),Gu(s))+Cu(s))\mathrm{d}s\right\|\leqslant\\&\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha}{\alpha}\right)x_0-S\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)x_0\right\|+\\&\int_{t_1}^{t_2}s^{\alpha-1}\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\right\|\|(f(s,u(s),Gu(s))+Cu(s))\|\mathrm{d}s+\\&\int_0^{t_1}s^{\alpha-1}\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)-S\left(\frac{t_1^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\right\|\|(f(s,u(s),Gu(s))+Cu(s))\mathrm{d}s\|\triangleq\\&I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

只需证明当 $t_2-t_1\to 0$ 时，$I_i\to 0(i=1,2,3)$.

对于 I_1，由于 $S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)$ 是强连续的，所以

$$\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha}{\alpha}\right)x_0-S\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)x_0\right\|\to 0,\qquad t_2-t_1\to 0,$$

从而当 $t_2-t_1\to 0$ 时，有 $I_1\to 0$. 由条件(H_1)及锥 P 的正规性知，存在 $M_0>0$，使得

$$\|(f(t,u(t),Gu(t))+Cu(t))\|\leqslant M_0,\quad t\in I,\quad u\in[v_0,w_0], \tag{7}$$

因此，当 $t_2-t_1\to 0$ 时，

$$I_2=\int_{t_1}^{t_2}s^{\alpha-1}\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\right\|\|(f(s,u(s),Gu(s))+Cu(s))\|\mathrm{d}s\leqslant\frac{MM_0}{\alpha}(t_2^\alpha-t_1^\alpha)\to 0.$$

若 $t_1=0$ 且 $t_2>0$，则易见 $I_3=0$. 对于 $t_1=0$ 且 $\varepsilon>0$ 足够小，有

$$\begin{aligned}I_3=&\int_0^{t_1}s^{\alpha-1}\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)-S\left(\frac{t_1^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\right\|\|(f(s,u(s),Gu(s))+Cu(s))\|\mathrm{d}s\leqslant\\&M_0\int_0^{t_1-\varepsilon}s^{\alpha-1}\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)-S\left(\frac{t_1^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\right\|\mathrm{d}s+\\&M_0\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1}s^{\alpha-1}\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)-S\left(\frac{t_1^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\right\|\mathrm{d}s\leqslant\\&M_0\sup_{s\in[0,t_1-\varepsilon]}\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)-S\left(\frac{t_1^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\right\|\int_0^{t_1-\varepsilon}s^{\alpha-1}\mathrm{d}s+2MM_0\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1}s^{\alpha-1}\mathrm{d}s\leqslant\\&\sup_{s\in[0,t_1-\varepsilon]}\left\|S\left(\frac{t_2^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)-S\left(\frac{t_1^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\right\|\frac{M_0(t_1-\varepsilon)^\alpha}{\alpha}+\\&2MM_0\frac{t_1^\alpha-(t_1-\varepsilon)^\alpha}{\alpha}\to 0\quad(t_2-t_1\to 0,\ \varepsilon\to 0),\end{aligned}$$

所以由半群 $S(t)(t\geqslant 0)$ 的紧性可知，当 $t_2-t_1\to 0$ 时，$I_3\to 0$. 从而 $\|Qu(t_2)-Qu(t_1)\|\to 0(t_2-t_1\to 0$，

$\varepsilon\to 0$). 故 Q: $[v_0,w_0]\to C(I,E)$等度连续.

2) 证明 Q: $[v_0,w_0]\to[v_0,w_0]$是连续增算子.

首先, 由定义5, 对 $t\in I$, 有

$$v_0(t)\leqslant S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)(f(s,v_0(s),Gv_0(s))+Cv_0(s))\mathrm{d}s=Qv_0(t),$$

所以 $v_0\leqslant Qv_0$, 同理可得 $Qw_0\leqslant w_0$.

其次, 对 $u_1,u_2\in[v_0,w_0]$且 $u_1\leqslant u_2$, $t\geqslant 0$, 有

$$v_0(t)\leqslant u_1(t)\leqslant u_2(t)\leqslant w_0(t),\qquad Gv_0(t)\leqslant Gu_1(t)\leqslant Gu_2(t)\leqslant Gw_0(t).$$

根据条件(H_1)可得

$$f(t,u_2(t),Gu_2(t))+Cu_2(t)\geqslant f(t,u_1(t),Gu_1(t))+Cu_1(t),$$

因此, 由半群 $S(t)(t\geqslant 0)$的正性, 有

$$\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)(f(s,u_2(s),Gu_2(s))+Cu_2(s))\,\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)(f(s,u_1(s),Gu_1(s))+Cu_1(s))\,\mathrm{d}s.$$

再结合式(6)可得 $Qu_1\leqslant Qu_2$. 从而 Q: $[v_0,w_0]\to[v_0,w_0]$是单调增算子, 并且连续.

定义两个迭代序列$\{v_n\}$和$\{w_n\}$分别为

$$v_n=Qv_{n-1},\quad w_n=Qw_{n-1},\quad n=1,2,\cdots \tag{8}$$

根据算子 Q 的序增性, 有

$$v_0\leqslant v_1\leqslant v_2\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant w_n\leqslant w_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant w_2\leqslant w_1\leqslant w_0. \tag{9}$$

从而可知序列$\{v_n\}$和$\{w_n\}$是$[v_0,w_0]$中的单调有界序列.

3) 证明$\{v_n(t)\}$和$\{w_n(t)\}$在 E 中相对紧.

记 $\Lambda=\{v_n\}$, $\Lambda_0=\Lambda\cup\{v_0\}$. 显然, 对 $\forall t\in I$, $\Lambda(t)=Q\Lambda_0(t)$. 当 $0\leqslant t\leqslant b$ 时, 对 $\forall\varepsilon\in(0,t)$, 定义集合

$$W_\varepsilon(t)=\{Q_\varepsilon v_n(t):\ v_n\in\Lambda_0\},$$

其中

$$Q_\varepsilon v_n(t)=S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)v_{n-1}(0)+\int_0^{t-\varepsilon}s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)(f(s,v_{n-1}(s),Gv_{n-1}(s))+Cv_{n-1}(s))\mathrm{d}s=$$
$$S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)v_{n-1}(0)+S\left(\frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha}\right)\int_0^{t-\varepsilon}s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}-\frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha}\right)(f(s,v_{n-1}(s),Gv_{n-1}(s))+Cv_{n-1}(s))\mathrm{d}s.$$

由 $S\left(\frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha}\right)$的紧性可知, 集合 $W_\varepsilon(t)$在 E 中相对紧. 对 $\forall v_n\in\Lambda_0$, $\forall t\in I$, 有

$$\|Qv_n(t)-Q_\varepsilon v_n(t)\|=\left\|\int_0^{t-\varepsilon}s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)(f(s,v_{n-1}(s),Gv_{n-1}(s))+Cv_{n-1}(s))\mathrm{d}s-\right.$$
$$\left.\int_0^{t-\varepsilon}s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}-\frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha}\right)(f(s,v_{n-1}(s),Gv_{n-1}(s))+Cv_{n-1}(s))\mathrm{d}s\right\|\leqslant$$
$$\int_{t-\varepsilon}^t s^{\alpha-1}\left\|S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)\right\|\|(f(s,v_{n-1}(s),Gv_{n-1}(s))+Cv_{n-1}(s))\|\,\mathrm{d}s\leqslant$$
$$M_0M\frac{t^\alpha-(t-\varepsilon)^\alpha}{\alpha}\to 0\quad(\varepsilon\to 0),$$

因此对 $\forall t\in I$, $\{v_n(t)\}$在 E 中相对紧. 同理可得$\{w_n(t)\}$在 E 中相对紧. 由 Arzela-Ascoli 定理可知, $\{v_n\}$和$\{w_n\}$在$[v_0,w_0]$中相对紧. 因此$\{v_n\}$和$\{w_n\}$有收敛子列, 结合式(9)和锥 P 的正规性可知, $\{v_n\}$和$\{w_n\}$本身收敛, 即存在 $\underline{u},\overline{u}\in[v_0,w_0]$, 使得 $\underline{u}=\lim\limits_{n\to\infty}v_n$, $\overline{u}=\lim\limits_{n\to\infty}w_n$. 在式(8)中取极限, 有 $Q\underline{u}=\underline{u}$, $Q\overline{u}=\overline{u}$. 所以 $\underline{u},\overline{u}\in[v_0,w_0]$是 Q 的不动点, 即 $\underline{u},\overline{u}$ 是问题(1)的温和解.

4) 证明 $\underline{u},\overline{u}$ 是问题(1)的极小温和解和极大温和解.

设 $u\in[v_0,w_0]$是 Q 的不动点, 则对 $\forall t\in I$, $v_0(t)\leqslant u(t)\leqslant w_0(t)$, 根据 Q 的单调性, 有

$$v_1(t)=Qv_0(t)\leqslant Qu(t)=u(t)\leqslant Qw_0(t)=w_1(t),$$

即 $v_1\leqslant u\leqslant w_1$，重复上述过程 n 次可得

$$v_n\leqslant u\leqslant w_n,\qquad n=1,2,\cdots.$$

令 $n\to\infty$，则有 $\underline{u}\leqslant u\leqslant\overline{u}$. 所以 $\underline{u}$ 和 $\overline{u}$ 分别为 Q 在 $[v_0,w_0]$ 中的极小不动点和极大不动点，因此它们分别是问题(1)的极小温和解和极大温和解. 证毕.

在定理 1 中去掉紧半群的限制，增加锥 P 是正则锥的条件可得以下结论.

定理 2　设 E 为有序的 Banach 空间，P 为 E 中的正则锥. 假设 $-A$ 生成正的 C_0-半群 $T(t)(t\geqslant0)$，v_0,w_0 分别是问题(2)的下温和解与上温和解，且 $v_0\leqslant w_0$，如果 $f\in C(I\times E\times E,E)$ 满足条件(H_1)，则问题(1)在 v_0 和 w_0 之间存在极小温和解和极大温和解.

证明：由定理 1 可知，算子 Q 为增算子，且满足 $v_0\leqslant Qv_0$，$Qw_0\leqslant w_0$. 按照式(8)做迭代序列 $\{v_n(t)\}$ 和 $\{w_n(t)\}$，则 $\{v_n(t)\}$ 和 $\{w_n(t)\}$ 是 E 中的单调有界序列. 由锥 P 的正则性可知，$\underline{u}=\lim\limits_{n\to\infty}v_n$，$\overline{u}=\lim\limits_{n\to\infty}w_n$. 在式(8)中取极限，由 Q 的连续性可知，$Q\underline{u}=\underline{u}$，$Q\overline{u}=\overline{u}$. 故问题(1)在 v_0 和 w_0 之间存在极小温和解 $\underline{u}$ 和极大温和解 $\overline{u}$. 证毕.

如果半群 $T(t)(t\geqslant0)$ 是非紧的，并且正元锥 P 也没有正则锥的假设，则通过给空间增加条件可得如下结论.

定理 3　设 E 为弱序列完备的 Banach 空间，正元锥 P 为正锥规. 假设 $-A$ 生成正的 C_0-半群 $T(t)(t\geqslant0)$，v_0,w_0 分别是问题(2)的下温和解与上温和解，且 $v_0\leqslant w_0$，如果 $f\in C(I\times E\times E,E)$ 满足条件(H_1)，则问题(1)在 v_0 和 w_0 之间存在极小温和解和极大温和解.

证明：因为在弱序列完备的 Banach 空间中，正规锥即是正则锥，故由定理 2 可得结论. 证毕.

定理 4　设 E 为有序的 Banach 空间，其正元锥 P 为正锥规. 假设 $-A$ 生成正的等度连续半群 $T(t)(t\geqslant0)$，v_0,w_0 分别是问题(2)的下温和解与上温和解，且 $v_0\leqslant w_0$，如果 $f\in C(I\times E\times E,E)$ 满足条件(H_1)和(H_2)，则分数阶发展方程初值问题(1)在 v_0 和 w_0 之间存在极小温和解和极大温和解.

证明：按照式(6)定义算子 Q，由定理 1 的证明可知，Q：$[v_0,w_0]\to[v_0,w_0]$ 是连续增算子，且 $v_0\leqslant Qv_0$，$Qw_0\leqslant w_0$. 因此对于迭代序列式(9)，根据定理 1 的证明可知，$\{v_n\}$ 和 $\{w_n\}$ 在 $[v_0,w_0]$ 上一致有界且等度连续. 下证 $\{v_n\}$ 和 $\{w_n\}$ 在 I 一致收敛.

记 $\Lambda=\{v_n\mid n\in\mathbb{N}\}$，$\Lambda_0=\{v_{n-1}\mid n\in\mathbb{N}\}$，因为 $\Lambda_0=\Lambda\cup\{v_0\}$，所以对 $\forall\, t\in I$，$\alpha(\Lambda_0(t))=\alpha(\Lambda(t))$. 令

$$\varphi(t)=\alpha(\Lambda_0(t))=\alpha(\Lambda(t)).\tag{10}$$

下面证明 $\varphi(t)=0$，$t\in I$. 由引理 3，有

$$\alpha(G(\Lambda_0)(t))=\alpha\left(\left\{\int_0^t K(t,s)v_{n-1}(s)\mathrm{d}s\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}\right)\leqslant 2\int_0^t\alpha(\{K(t,s)v_{n-1}(s)\mid n\in\mathbb{N}\})\mathrm{d}s=$$
$$2\int_0^t K(t,s)\alpha(\{v_{n-1}(s)\mid n\in\mathbb{N}\})\mathrm{d}s\leqslant 2K_0\int_0^t\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $K_0=\max\limits_{(t,s)\in\Delta}K(t,s)$. 因此

$$\int_0^t s^{\alpha-1}\alpha(G(\Lambda_0)(s))\mathrm{d}s\leqslant 2K_0\int_0^t s^{\alpha-1}\left(\int_0^s\varphi(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s=\frac{2K_0}{\alpha}\int_0^t(t^\alpha-s^\alpha)\varphi(s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\frac{2K_0}{\alpha}\int_0^t(t-s)^\alpha\varphi(s)\mathrm{d}s,\quad t\in I.$$

对 $\forall\, t\in I$，由引理 3 和式(10)，有

$$\varphi(t)=\alpha(Q(\Lambda_0)(t))=\alpha(\Lambda(t))=$$
$$\alpha\left(\left\{S\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)(f(s,v_{n-1}(s),Gv_{n-1}(s))+Cv_{n-1}(s))\mathrm{d}s\right\}\right)=$$
$$\alpha\left(\left\{\int_0^t s^{\alpha-1}S\left(\frac{t^\alpha-s^\alpha}{\alpha}\right)(f(s,v_{n-1}(s),Gv_{n-1}(s))+Cv_{n-1}(s))\mathrm{d}s\right\}\right)\leqslant$$

$$2\int_0^t \alpha\left(\left\{s^{\alpha-1} S\left(\frac{t^\alpha - s^\alpha}{\alpha}\right)(f(s, v_{n-1}(s), Gv_{n-1}(s)) + Cv_{n-1}(s))\right\}\right) \mathrm{d}s \leqslant$$
$$2M\int_0^t s^{\alpha-1} \alpha(\{f(s, v_{n-1}(s), Gv_{n-1}(s)) + Cv_{n-1}(s)\}) \mathrm{d}s =$$
$$2M(L + C)\int_0^t s^{\alpha-1} \alpha(\Lambda_0(s)) \mathrm{d}s + 2ML\int_0^t s^{\alpha-1} \alpha(G(\Lambda_0)(s)) \mathrm{d}s \leqslant$$
$$2M(L + C)\int_0^t s^{\alpha-1} \varphi(s) \mathrm{d}s + \frac{4MLK_0}{\alpha}\int_0^t (t^\alpha - s^\alpha)\varphi(s) \mathrm{d}s \leqslant$$
$$\int_0^t \left[2M(L + C)s^{\alpha-1} + \frac{4MLK_0}{\alpha}(t - s)^\alpha\right]\varphi(s) \mathrm{d}s.$$

应用引理4，有 $\varphi(t)=0$. 特别地，$\alpha(\Lambda_0(t))=\alpha(\Lambda(t))=\varphi(t)=0$. 即 $\Lambda(t)$ 和 $\Lambda_0(t)$ 在 E 中相对紧. 因此 $\{v_n(t)\}$ 在 E 中相对紧. 由 Arzela-Ascoli 定理可知，$\{v_n\}$ 在 $[v_0, w_0]$ 中相对紧. 类似地，可得 $\{w_n\}$ 在 $[v_0, w_0]$ 中相对紧. 根据定理1证明可知，分数阶发展方程初值问题(1)在 $[v_0, w_0]$ 上存在极小温和解与极大温和解. 证毕.

参 考 文 献

[1] EL-BORAI M M. Some Probability Densities and Fundamental Solutions of Fractional Evolution Equations [J]. Chaos Solitions Fractals, 2002, 14(3): 433-440.

[2] ZHOU Y, JIAO F. Nonlocal Cauchy Problem for Fractional Evolution Equations [J]. Nonlinear Anal: Real World Appl, 2010, 11(5): 4465-4475.

[3] ZHOU Y, JIAO F. Existence of Mild Solution for Fractional Neutral Evolution Equations [J]. Comput Math Appl, 2010, 59(3): 1063-1077.

[4] 张敏, 周文学, 黎文博. 一致分数阶时滞微分方程边值问题解的存在性与唯一性 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2023, 61(5): 1007-1013. (ZHANG M, ZHOU W X, LI W B. Existence and Uniqueness of Solutions to Boundary Value Problems of Uniform Fractional Order Delay Differential Equations [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2023, 61(5): 1007-1013.)

[5] CHEN P Y, LI Y X, CHEN Q Y, et al. On the Initial Value Problem of Fractional Evolution Equations with Noncompact Semigroup [J]. Comput Math Appl, 2014, 67(5): 1108-1115.

[6] KHALIL R, AL HORANI M, YOUSEF A, et al. A New Definition of Fractional Derivative [J]. J Comput Appl Math, 2014, 264: 65-70.

[7] ABDELJAWAD T. On Conformable Fractional Calculus [J]. J Comput Appl Math, 2015, 279: 57-66.

[8] BIRGANI O T, CHANDOK S, DEDOVIC N, et al. A Note on Some Recent Results of the Conformable Derivative [J]. Adv Nonlinear Anal Appl, 2018, 3(1): 11-17.

[9] 郭大钧, 孙经先. 抽象空间常微分方程 [M]. 2版. 济南: 山东科学技术出版社, 2003: 1-306. (GUO D J, SUN J X. Ordinary Differential Equations in Abstract Space [M]. 2nd ed. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 2003: 1-306.)

[10] HENIZ H P. On the Behaviour of Measures of Noncompactness with Respect to Differentiation and Integration of Vector-Valued Functions [J]. Nonlinear Anal: Theory, Method Appl, 1983, 7(12): 1351-1371.

[11] LIANG Y. Optimal Controls for a Class of Conformable Fractional Evolution Systems [J]. Fractal Fract, 2023, 7(9): 640-1-640-12.

[12] ALQIFIARY Q H, JUNG S M. On the Hyers-Ulam Stability of Differential Equations of Second Order [J/OL]. Abstr Appl Anal, (2014-07-07)[2023-12-06]. https://doi.org/10.1155/2014/483707.

(责任编辑: 赵立芹)