

# 一类具有交叉反应扩散的 捕食-食饵模型的动态分岔

亓子成, 刘瑞宽, 吴辰龙  
(西南石油大学 理学院, 成都 610500)

**摘要:** 考虑一类具有 Holling-II 型功能反应函数的交叉反应扩散模型在非齐次 Dirichlet 边界条件下的动态分岔问题. 首先, 用谱分析理论得到对应的线性化问题特征值的临界穿越条件; 其次, 选取环境承载系数为分岔参数, 利用中心流形约化和动态分岔理论得到该系统的动态跃迁类型和分岔解的解析表达式. 最后, 利用有限差分法, 在不同的参数情形下给出系统的斑图变化模式.

**关键词:** 反应扩散模型; 特征值分析; 动态跃迁; 数值模拟

**中图分类号:** O175.29 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)05-1063-09

## Dynamic Bifurcation of a Class of Predator-Prey Models with Cross Reaction Diffusion

QI Zicheng, LIU Ruikuan, WU Chenlong  
(School of Science, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China)

**Abstract:** We considered the dynamic bifurcation problem of a class of cross-reaction-diffusion models with Holling-II functional response function under non-homogeneous Dirichlet boundary conditions. Firstly, the critical crossing conditions for the corresponding linearization problem eigenvalues were obtained by using the spectral analysis theory. Secondly, the environmental carrying coefficient was selected as the bifurcation parameter, the analytical expression of the dynamic transition type and bifurcation solution of the system was obtained by using the center manifold reduction and the dynamic bifurcation theory. Finally, by using the finite difference method, the pattern change patterns of the system were given under different parameter conditions.

**Keywords:** reaction-diffusion model; eigenvalue analysis; dynamic transition; numerical simulation

## 0 引言

考虑如下一类具有 Holling-II 型功能反应函数且具有交叉扩散效应的模型:

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + d_2 \Delta v + u - K^{-1} u^2 - muv(1+u)^{-1}, & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \\ v_t = d_3 \Delta u + d_4 \Delta v - \theta v + muv(1+u)^{-1}, & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0, \quad v(0, x) = v_0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = u^*, \quad v|_{\partial\Omega} = v^*, & t \in (0, \infty), \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2024-01-25.

**第一作者简介:** 亓子成(2000—), 男, 汉族, 硕士研究生, 从事偏微分方程适定性的研究, E-mail: 19940661850@163.com. **通信作者简介:** 刘瑞宽(1989—), 男, 汉族, 博士, 讲师, 从事非线性微分方程及其应用的研究, E-mail: liuruikuan2008@163.com.

**基金项目:** 四川省自然科学基金面上项目(批准号: 20222NSFSC0529)和南充市-西南石油大学市校科技战略合作专项基金(批准号: 23XNSYJG0005).

其中  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  为有界光滑区域,  $u$  和  $v$  分别表示食饵和捕食者的种群密度,  $K$  为环境承载能力,  $d_1$  和  $d_4$  是物种的扩散系数,  $d_2$  和  $d_3$  是交叉扩散系数,  $\theta$  为捕食者的死亡率,  $\frac{mu}{1+u}$  是 Holling-II 功能反应函数(该函数能较准确地反映真实世界中无脊椎动物与其捕食者之间的生物学相互作用),  $m$  表示相互作用对两种物种相对影响的强度,  $u_0 \geq 0$  和  $v_0 \geq 0$  为初值,  $u^* = \frac{\theta}{m-\theta}$  和  $v^* = \frac{1}{m-\theta} \left( 1 - \frac{\theta}{(m-\theta)K} \right)$  为系统(1)的一个稳态解.

当  $d_2 = d_3 = 0$  (即不考虑交叉扩散效应)时, 系统(1)即退化为经典的具有 Holling-II 型功能反应函数的捕食-食饵反应扩散模型, 对该模型全局解的存在性、正则性和稳定性研究目前已得到广泛关注<sup>[1-20]</sup>. 例如: Bie 等<sup>[3]</sup> 针对类似的交叉扩散模型的定态过程, 探讨了交叉扩散对正常数平衡点稳定性的影响; Peng 等<sup>[4]</sup> 通过正解的先验估计, 证明了当  $m$  足够大时, 经典的 Holling-II 型反应扩散系统不存在非常数正平衡解; Sun 等<sup>[5]</sup> 讨论了具有捕食者同类相食行为的 Holling-II 型捕食-食饵模型的 Turing 不稳定性, 得到了该模型 Turing 斑图出现的条件; Wang 等<sup>[6]</sup> 研究了具有强 Allee 效应的 Holling-II 型反应扩散系统的动力学行为, 在强 Allee 效应的条件下获得了该系统不存在非常数正稳态解; Han 等<sup>[7]</sup> 提出了一类具有时滞扩散效应的 Holling-II 型种群内捕食模型, 并利用规范化方法和中心流形约化方法, 给出了该模型 Hopf 分歧方向和稳定性结果; Yang 等<sup>[13]</sup> 针对一类具有避难和时滞效应且具有双曲型死亡率的捕食-食饵系统, 分别获得了避难效应和时滞效应引起的 Turing 不稳定性和 Hopf 分歧结果; Rao<sup>[14]</sup> 研究了一类具有 Holling-II 型功能反应函数的有毒浮游植物与浮游动物空间模型的复杂动力学行为.

受上述研究的启发, 本文借助非线性演化方程的动态分歧和跃迁定理<sup>[21-22]</sup>, 选取模型中的环境承载能力为分歧参数, 得到具有交叉扩散效应且具有 Holling-II 型功能反应函数的非线性反应扩散系统(1)的动态跃迁类型和分歧解的解析表达式, 并给出相关的数值结果. 针对该类交叉扩散模型研究一般采用类似文献[3]的经典方法, 本文用另一种特征值谱分析与动态跃迁结果相结合的方法<sup>[23]</sup> 进行研究. 在引入交叉扩散后临界穿越参数不具有理想分离的情况下, 给出一些假设条件证明对应的临界穿越条件, 最后结合动态跃迁定理分析其跃迁类型.

### 1 预备知识

参考文献[21-22], 设  $H$  和  $H_1$  为 Hilbert 空间,  $H_1 \subset H$  是稠密紧包含. 考虑如下非线性演化方程:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = L_\lambda \omega + G(\omega, \lambda), \\ \omega(0) = \varphi, \end{cases} \tag{2}$$

其中:  $\lambda$  是参数;  $\omega: [0, +\infty) \rightarrow H$  是未知函数;  $L_\lambda: H_1 \rightarrow H$  为一个连续依赖于  $\lambda$  的线性全连续场, 满足

$$\begin{cases} L_\lambda = -A + B_\lambda \text{ 是一个扇形算子,} \\ A: H_1 \rightarrow H \text{ 是一个线性同胚,} \\ B_\lambda: H_1 \rightarrow H \text{ 是一个紧算子,} \end{cases} \tag{3}$$

$G(\cdot, \lambda): H_\sigma \rightarrow H (0 \leq \sigma < 1)$  是  $C^r (r \geq 1)$  有界映射, 且

$$G(\cdot, \lambda) = o(\|\omega\|_{H_\sigma}). \tag{4}$$

下面始终假设式(3)和式(4)成立.

**定义 1**<sup>[21]</sup> 若系统(2)对某个  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  满足下列条件:

- 1) 当  $\lambda < \lambda_0$  时,  $\omega = 0$  是系统(2)的一个渐近稳定的平衡解;
- 2) 当  $\lambda > \lambda_0$  时, 存在  $\omega = 0$  的一个与参数  $\lambda$  无关的邻域  $U \subset H$ , 满足

$$\begin{cases} \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\omega_\lambda(t; \varphi)\|_H \geq \delta(\lambda) > 0, & \forall \varphi \in \Gamma_\lambda/U, \\ \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \delta(\lambda) = \delta \geq 0, \end{cases}$$

其中  $\omega_\lambda(t; \varphi)$  为系统(2)以  $\varphi$  为初值的解,  $\Gamma_\lambda$  为  $\omega = 0$  的稳定流形. 则称系统(2)在  $(\omega, \lambda) = (0, \lambda_0)$  处发生跃迁.

假设  $\{\beta_j(\lambda) \in \mathbb{C} \mid j \in \mathbb{N}^*\}$  为算子  $L_\lambda$  的特征值, 且对某个  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  满足如下条件:

$$\begin{cases} < 0, & \lambda < \lambda_0, \\ \text{Re } \beta_j(\lambda) \begin{cases} = 0, & \lambda = \lambda_0, \\ > 0, & \lambda > \lambda_0, \end{cases} & \forall 1 \leq j \leq m, \end{cases} \tag{5}$$

$$\text{Re } \beta_j(\lambda_0) < 0, \quad \forall j \geq m + 1.$$

**引理 1**<sup>[21]</sup> 若条件(5)成立, 则系统(2)在  $(\omega, \lambda) = (0, \lambda_0)$  处发生跃迁, 且跃迁类型必为下列 3 种情形之一:

1) (连续型跃迁) 存在  $\omega = 0$  的某个邻域  $U \subset H$ , 使得对任意的  $\varphi \in U$ , 系统(2)的解  $\omega_\lambda(t; \varphi)$  满足

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\omega_\lambda(t; \varphi)\|_H = 0;$$

2) (跳跃型跃迁) 对任意的  $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \epsilon (\epsilon > 0)$ , 存在一个稠密开子集  $U_\lambda \subset U$ , 使得对任意的  $\varphi \in U_\lambda$ , 有  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\omega_\lambda(t; \varphi)\|_H \geq \delta \geq 0$ , 其中常数  $\delta > 0$ , 且与参数  $\lambda$  无关;

3) (混合型跃迁) 对任意的  $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \epsilon (\epsilon > 0)$ ,  $U$  可分解为  $\bar{U} = \bar{U}_1^1 \cup \bar{U}_2^1$ ,  $\bar{U}_1^1 \cap \bar{U}_2^1 = \emptyset$ , 其中  $U_1^1$  和  $U_2^1$  均为开集(但不一定连通), 且系统(2)的解  $\omega_\lambda(t; \varphi)$  满足:

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\omega_\lambda(t; \varphi)\|_H = 0, & \forall \varphi \in U_1^1, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \|\omega_\lambda(t; \varphi)\|_H \geq \delta \geq 0, & \forall \varphi \in U_2^1, \end{cases}$$

$U_1^1$  称为稳定型区域,  $U_2^1$  称为跳跃型区域.

## 2 特征值分析与临界穿越条件

为方便, 不妨取  $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2) (L_1, L_2 > 0)$ . 易知无量纲方程(1)存在如下 3 个常数稳态解:

$$\omega_0 = (0, 0)^T, \quad \omega_1 = (K, 0)^T, \quad \omega_2 = (u^*, v^*)^T,$$

其中  $u^* = \frac{\theta}{m - \theta}, v^* = \frac{1}{m - \theta} \left( 1 - \frac{\theta}{(m - \theta)K} \right)$ .

事实上, 只有正的稳态解在生物系统长期演化中才有意义. 因此, 为使系统(1)存在正的常数稳态解 ( $u^* > 0, v^* > 0$ ), 需给出如下假设:

(H<sub>1</sub>)  $0 < \theta / (m - \theta) < K$ .

对系统(1)做如下平移变换:  $u = \tilde{u} + u^*, v = \tilde{v} + v^*$ , 则有

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = d_1 \Delta \tilde{u} + d_2 \Delta \tilde{v} + (\tilde{u} + u^*) - m(\tilde{v} + v^*) - \frac{1}{K}(\tilde{u} + u^*)^2 + m \frac{(\tilde{v} + v^*)}{1 + (\tilde{u} + u^*)}, \\ \tilde{v}_t = d_3 \Delta \tilde{u} + d_4 \Delta \tilde{v} + (m - \theta)(\tilde{v} + v^*) - m \frac{(\tilde{v} + v^*)}{1 + (\tilde{u} + u^*)}, \\ u(x, 0) = u_0 - u^*, \quad v(x, 0) = v_0 - v^*, \\ u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

下面讨论系统(6)在  $(0, 0)$  处的稳定性. 对系统(6)中的非线性项在  $(0, 0)$  处进行 Taylor 展开(仍将  $(\tilde{u}_t, \tilde{u}, \tilde{v}_t, \tilde{v})$  记作  $(u_t, u, v_t, v)$ ), 则有

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + d_2 \Delta v + \left( 1 - \frac{2u^*}{K} - p^2 m v^* \right) u + m(p - 1)v + p^3 m v^* u^2 - \frac{u^2}{K} - p^2 m u v + o(2) + C, \\ v_t = d_3 \Delta u + d_4 \Delta v + p^2 m v^* u + (m - \theta - mp)v - p^3 m v^* u^2 + p^2 m u v + o(2) + C, \\ u(x, 0) = u_0 - u^*, \quad v(x, 0) = v_0 - v^*, \\ u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{7}$$

其中  $p := 1/(1 + u^*)$ . 因此, 后续只需对系统(7)在平衡点  $(0, 0)^T$  处的跃迁情况进行讨论.

定义函数空间  $H := L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ,  $H_1 := H^2(\Omega, \mathbb{R}^2) \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , 并用  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示空间  $H$  上的内积. 令  $\omega(t) = \begin{pmatrix} u(\cdot, t) \\ v(\cdot, t) \end{pmatrix}$ , 定义算子  $A: H_1 \rightarrow H$  为  $A\omega = \begin{pmatrix} d_1 \Delta & d_2 \Delta \\ d_3 \Delta & d_4 \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , 定义算子  $B_\lambda$  为

$$B_\lambda \omega = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda u^* - p^2 m v^* & -\theta \\ p^2 m v^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

其中  $\lambda := 1/K$  为控制参数. 于是, 系统(7)的线性部分可写成如下形式:  $L_\lambda \omega = -A\omega + B_\lambda \omega$ . 显然,  $L_\lambda: H \rightarrow H$  是连续依赖于  $\lambda$  的参数化线性全连续场. 定义非线性算子  $G: H_1 \rightarrow H$  为

$$G: (\lambda, \omega) \rightarrow G(\lambda, \omega) = \begin{pmatrix} (p^3 m v^* - \lambda) u^2 - p^2 m u v \\ -p^3 m v^* u^2 + p^2 m u v \end{pmatrix}.$$

因此, 初边值问题(7)可等价于如下抽象形式:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = L_\lambda \omega + G(\lambda, \omega), \\ \omega(0) = \varphi, \end{cases}$$

其中  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T = (u_0 - u^*, v_0 - v^*)$ .

### 2.1 特征值分析

根据方程(2), 算子  $L_\lambda$  的特征值问题可表示为

$$\begin{cases} d_1 \Delta u + d_2 \Delta v + (1 - 2\lambda u^* - p^2 m v^*) u - \theta v = \beta u, \\ d_3 \Delta u + d_4 \Delta v + p^2 m v^* u = \beta v, \\ u|_{\partial\Omega} = v|_{\Omega} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

令  $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$  为 Laplace 算子在齐次 Dirichlet 边界下的特征值  $\{\rho_k\}_{k=1}^\infty$  所对应的一组特征函数, 并满足归一化条件  $\int_\Omega \psi_k \psi_l dx = \delta_{kl} (k, l = 1, 2, \dots)$ , 其中  $\delta_{kl}$  为 Kronecker 符号. 由于  $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$ , 故有

$$\rho_k = \pi^2 \left( \frac{k_1^2}{L_1^2} + \frac{k_2^2}{L_2^2} \right), \quad \psi_k = A_k \sin \frac{k_1^2 \pi x_1}{L_1^2} \sin \frac{k_2^2 \pi x_2}{L_2^2},$$

这里  $k = |k_1| + |k_2| = 1, 2, \dots$ ,  $A_k$  是使  $\int_\Omega \psi_k^2 dx = 1$  成立的正常数. 显然,  $\rho_k$  满足  $0 < \rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_k \leq \dots$ . 令

$$M_k(\lambda) = \begin{pmatrix} -d_1 \rho_k + 1 - 2\lambda u^* - p^2 m v^* & -d_2 \rho_k - \theta \\ -d_3 \rho_k + p^2 m v^* & -d_4 \rho_k \end{pmatrix},$$

则矩阵  $M_k(\lambda)$  的特征值问题可表示为  $M_k(\lambda) \eta_{ki} = \beta_{ki} \eta_{ki}$ , 其中  $\eta_{ki}$  是  $M_k$  对应于特征值  $\beta_{ki}$  的特征向量. 因此, 特征值问题(8)对应于  $\beta_{ki}$  的特征向量为  $e_{ki} = \eta_{ki} \psi_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ . 通过代入  $u^*, v^*$  计算可知,  $\beta_k = \beta_{ki} (i = 1, 2)$  满足

$$\beta_k^2 + B_k \beta_k + C_k = 0, \tag{9}$$

其中

$$B_k = (d_1 + d_4) \rho_k + (1 + \lambda) \frac{\theta}{m} - \frac{2\lambda\theta}{(m - \theta)},$$

$$C_k = \left( d_1 \rho_k + (1 + \lambda) \frac{\theta}{m} - \frac{2\lambda\theta}{(m - \theta)} \right) d_4 \rho_k - (d_2 \rho_k - \theta) \left( d_3 \rho_k + 1 - (1 + \lambda) \frac{\theta}{m} \right).$$

因此  $\beta_{ki}$  可表示为

$$\begin{cases} \beta_{k1} = \frac{-B_k + \sqrt{B_k^2 - 4C_k}}{2}, \\ \beta_{k2} = \frac{-B_k - \sqrt{B_k^2 - 4C_k}}{2}. \end{cases} \tag{10}$$

假设:

$$(H_2) \quad d_1 d_4 > d_2 d_3 > 0, \quad 4d_2 d_3 \left(1 - \frac{1+\lambda}{m}\right) < \left(\frac{d_2(1-\lambda)}{m} + d_3\right)^2.$$

易见, 若条件(H<sub>2</sub>)成立, 则  $\Delta_k = B_k^2 - 4C_k > 0$  恒成立. 因此特征值  $\beta_{ki}$  均为实数. 取  $L_\lambda$  关于  $\beta_{ki}$  的特征向量为

$$e_{ki} = \begin{pmatrix} \psi_k \\ h_{ki} \psi_k \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \psi_k \\ \frac{\beta_{ki} + (d_1 + d_3)\rho_k + 1 - \frac{2\lambda\theta}{m-\theta}}{(d_2 + d_4)\rho_k - \theta} \psi_k \end{pmatrix}, \tag{11}$$

且  $\{e_{ki}\}_{k,i}$  构成空间  $H$  上的一组基. 设  $L_\lambda^*$  和  $M_k^*$  分别是  $L_\lambda$  和  $M_k$  的伴随算子, 则  $M_k^*$  的特征值  $\beta_{ki}^*$  与  $M_k$  的特征值  $\beta_{ki}$  共轭. 由于  $\beta_{ki} \in \mathbb{R}$ , 因此  $\beta_{ki} = \beta_{ki}^*$ . 算子  $L_\lambda^*$  对应于特征值  $\beta_{ki}^*$  的特征向量为

$$e_{ki}^* = \begin{pmatrix} \psi_k \\ g_{ki} \psi_k \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \psi_k \\ -\frac{\beta_{ki} + (d_1 + d_2)\rho_k + 2 - \frac{2\lambda\theta}{m-\theta} - \frac{\theta(\lambda+1)}{m}}{(d_3 + d_4)\rho_k + 1 - \frac{\theta(\lambda+1)}{m}} \psi_k \end{pmatrix}, \tag{12}$$

且满足

$$\langle e_{ki}, e_{lj}^* \rangle = \begin{cases} 0, & k \neq l \text{ 或 } i \neq j, \\ P_{k1}, & k = l, i = j = 1, \\ P_{k2}, & k = l, i = j = 2, \end{cases} \tag{13}$$

其中  $P_{k1} = 1 + h_{k1} g_{k1}$ ,  $P_{k2} = 1 + h_{k2} g_{k2}$ .

### 2.2 PES 条件

系统(8)的稳定性由该系统线性化问题特征值的临界穿越(principle of exchange of stabilities, PES)条件确定. 为此, 需先确定特征值  $\beta_{ki}$  的符号.

由式(10)可知, 对任意的  $k \in \mathbb{N}^*$ , 有  $\beta_{k2} < 0$ , 且  $\beta_{k1}$  的正负取决于  $C_k$  的正负. 将  $C_k = 0$  改写为

$$(d_1 d_4 - d_2 d_3)\rho_k^2 + \left(\frac{d_1 \theta}{m} - \frac{\lambda d_4 \theta(m+\theta)}{m(m-\theta)} - \frac{\lambda d_2 \theta}{m} - d_3 \theta\right)\rho_k + \theta\left(1 - \frac{\theta}{m} - \frac{\lambda \theta}{m}\right) = 0.$$

假设:

$$(H_3) \quad \frac{d_1 \theta(m+\theta)}{m(m-\theta)} + \frac{d_2 \theta}{m} = 0, \quad d_1 + d_4 > 0.$$

当条件(H<sub>3</sub>)成立时, 令式(9)中  $C_k = 0$ , 可定义常数

$$\lambda_c = \min_k \left\{ \frac{m[(d_1 d_4 - d_2 d_3)\rho_k^2 + (d_1 \theta/m + d_3 \theta)\rho_k + \theta - \theta^2/m]}{\theta^2} \right\}. \tag{14}$$

令式(9)中  $B_k = 0$ , 可定义常数

$$\Lambda = \min_k \left\{ \frac{m(m-\theta)[(d_1 + d_4)\rho_k + \theta/m]}{\theta(m+\theta)} \right\}. \tag{15}$$

下面只讨论  $\lambda_c < \Lambda$  的情况.

**引理 2** 当  $\lambda$  在  $\lambda_c$  的某个邻域上时, 如下结论成立:

- 1) 当  $\lambda < \lambda_c$  时,  $\beta_{11} < 0$ ; 当  $\lambda = \lambda_c$  时,  $\beta_{11} = 0$ ; 当  $\lambda > \lambda_c$  时,  $\beta_{11} > 0$ .
- 2) 当  $(k, j) \neq (1, 1)$ ,  $j = 1, 2$  时,  $\beta_{kj}(\lambda_c) < 0$ .

证明: 当  $\lambda = \lambda_c$  时,  $C_1 = 0$  即  $\beta_{11} = 0$ , 且

$$\begin{aligned} \beta_{12}(\lambda_c) &= -(d_1 + d_4)\rho_1 - \frac{\theta}{m} - \left(\frac{\theta}{m} + \frac{2\theta}{(m-\theta)}\right)\lambda_c < \\ &\quad -(d_1 + d_4)\rho_1 - \frac{\theta}{m} - \left(\frac{\theta}{m} + \frac{2\theta}{(m-\theta)}\right)\Lambda < 0; \end{aligned}$$

当  $\lambda > \lambda_c$  时,  $C_1 < 0$  即  $\beta_{11} > 0$ ; 当  $\lambda < \lambda_c$  时,  $C_1 > 0$  即  $\beta_{11} < 0$ .

此外, 当  $k \neq 1$  时, 根据式(14),(15)中定义, 有

$$C_k(\lambda_c) = (d_1 d_4 - d_2 d_3) \rho_k^2 + \left(\frac{d_1 \theta}{m} - d_3 \theta\right) \rho_k + \theta \left(1 - \frac{\theta}{m} - \frac{\theta}{m} \lambda_c\right) > 0,$$

$$-B_k(\lambda_c) = -(d_1 + d_4) \rho_k - \frac{\theta}{m} - \left(\frac{\theta}{m} - \frac{2\theta}{(m-\theta)}\right) \lambda_c < 0,$$

因此  $\beta_{k2}(\lambda_c) < 0$ . 综上可知结论成立.

### 3 主要结果

下面分两种情形讨论当参数  $\lambda$  穿越临界值  $\lambda = \lambda_c$  时, 系统(8)的跃迁类型和发生跃迁后分歧解的解析式. 记  $\alpha(\lambda) := \frac{P}{P_{11}}$ , 且  $P_{11}, h_{11}, g_{11}, e_{11}$  和  $e_{11}^*$  的定义与式(11)~(13)相同.

情形 1)  $\int_{\Omega} \phi_1^3 dx \neq 0, P = (p^3 m v^* (1 - g_{11}) + m p^2 h_{11} (g_{11} - 1) - \lambda) \int_{\Omega} \phi_1^3 dx$ .

**定理 1** 若  $\alpha(\lambda) \neq 0$ , 则下列结论成立:

1) 系统(7)在  $\omega = 0$  处有一个混合型跃迁, 即存在  $\omega = 0$  的邻域  $U \subset H_1$ , 满足:

- ①  $U = U_1^{\lambda} + U_2^{\lambda} + \Gamma_{\lambda}$ , 其中  $U_1^{\lambda}, U_2^{\lambda}$  为两个不相交的开集;
- ②  $U_1^{\lambda}$  中的跃迁为跳跃型,  $U_2^{\lambda}$  中的跃迁为连续型.

2) 当  $\lambda < \lambda_c$  时,  $\omega = 0$  是渐近稳定的, 且系统(7)分歧出唯一的鞍点  $\bar{\omega}(\lambda)$ .

3) 当  $\lambda > \lambda_c$  时, 系统(7)在  $U_2^{\lambda}$  中分歧出一个奇点吸引子  $\bar{\omega}(\lambda) = -\frac{\beta_{11}}{\alpha(\lambda)} e_{11} + o(|\beta_{11}|)$ , 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\omega_{\lambda}(t; \varphi) - \bar{\omega}(\lambda)\|_{H_1} = 0, \forall \varphi \in U_2^{\lambda}.$$

证明: 由线性全连续场谱理论知, 空间  $H$  和  $H_1$  可分解为  $H = E_1 \oplus E_2, H_1 = E_1 \oplus \bar{E}_2$ , 其中  $E_1 = \text{span}\{e_{11}\}, E_2 = E_1^{\perp}$ .

当  $\lambda$  在  $\lambda_c$  附近时, 方程(7)的解可表示为  $\omega = x_1 e_{11} + z, z = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_{k1} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_{k2}$ , 其中  $x_1 e_{11} \in E_1, z \in E_2, e_{ki} (i=1, 2)$  是特征值  $\beta_{ki}$  对应的特征向量. 因此在空间  $E_1$  中, 系统(7)可约化为

$$\langle e_{11}, e_{11}^* \rangle \frac{dx_1}{dt} = \langle L_{\lambda}(\omega), e_{11}^* \rangle + \langle G(\lambda, \omega), e_{11}^* \rangle = \beta_{11} \langle e_{11}, e_{11}^* \rangle x_1 + \langle G(\lambda, \omega), e_{11}^* \rangle. \tag{16}$$

由于  $\int_{\Omega} \phi_1^3 dx \neq 0$ , 因此不需要考虑中心流形函数的影响. 令式(16)中  $\omega = x_1 e_{11}$ , 则有

$$\frac{dx_1}{dt} = \beta_{11} x_1 + \frac{\langle G(\lambda, x_1 e_{11}), e_{11}^* \rangle}{\langle e_{11}, e_{11}^* \rangle}. \tag{17}$$

直接计算可得

$$\frac{\langle G(\lambda, x_1 e_{11}), e_{11}^* \rangle}{\langle e_{11}, e_{11}^* \rangle} = \frac{1}{P_{11}} \left( (p^3 m v^* - \lambda) x_1^2 \int_{\Omega} \phi_1^3 dx - m p^2 h_{11} x_1^2 \int_{\Omega} \phi_1^3 dx - \right.$$

$$\left. p^3 m v^* g_{11} x_1^2 \int_{\Omega} \phi_1^3 dx + m p^2 h_{11} g_{11} x_1^2 \int_{\Omega} \phi_1^3 dx \right) + o(2) =$$

$$\frac{1}{P_{11}} (p^3 m v^* (1 - g_{11}) + m p^2 h_{11} (g_{11} - 1) - \lambda) x_1^2 \int_{\Omega} \phi_1^3 dx + o(2) = \alpha(\lambda) x_1^2 + o(2).$$

于是, 方程(17)可化为

$$\frac{dx_1}{dt} = \beta_{11} x_1 + \alpha(\lambda) x_1^2 + o(2). \tag{18}$$

若  $\alpha(\lambda) \neq 0$ , 则方程(18)的一个稳态解为  $\bar{x}_1 = -\frac{\beta_{11}}{\alpha(\lambda)} + o(|\beta_{11}|)$ . 显然, 当  $\lambda > \lambda_c$  时,  $\bar{x}_1$  是方程(18)的一个局部渐近稳定奇点, 且当  $\lambda < \lambda_c$  时,  $\bar{x}_1$  是方程(18)的一个不稳定鞍点.

注意到系统(7)的跃迁类型及其局部拓扑结构完全由约化方程(18)决定, 从而当  $\lambda > \lambda_c$  时,  $\bar{\omega}(\lambda) = -\frac{\beta_{11}}{\alpha(\lambda)} e_{11} + o(|\beta_{11}|)$  是系统(7)的一个局部渐近稳定奇点, 即系统(7)在  $U_2^{\lambda}$  中有一个连续型跃

迁; 同时, 当  $\lambda < \lambda_c$  时,  $\bar{\omega}(\lambda)$  是系统 (7) 的一个不稳定鞍点, 即系统 (7) 在  $U_2^+$  中有一个跳跃型跃迁. 证毕.

情形 2)  $\int_{\Omega} \psi_1^3 dx = 0,$

$P(\lambda) = (1 - g_{11})(2p^3 mv^* - h_{11} mp^2) \int_{\Omega} \psi_1^2 \phi_1 dx + (g_{11} - 1) mp^2 \int_{\Omega} \psi_1^2 \phi_2 dx - \lambda \int_{\Omega} \psi_1^2 \phi_1 dx,$

其中

$\phi_1 = \sum_{k \neq 1}^{\infty} -\frac{Q_k}{\beta_{k1}} \psi_k + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{H_k}{\beta_{k2}} \psi_k,$  (19)

$\phi_2 = \sum_{k \neq 1}^{\infty} -\frac{Q_k h_{k1}}{\beta_{k1}} \psi_k + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{H_k h_{k2}}{\beta_{k2}} \psi_k.$  (20)

定理 2 若  $\lambda$  足够小, 则下列结论成立:

- 1) 当  $\alpha(\lambda) > 0$  时, 系统 (7) 在  $(0, \lambda)$  处有一个跳跃型跃迁, 并在  $\lambda > \lambda_c$  一侧分歧出两个鞍点  $\omega^{\pm}(\lambda)$ ;
- 2) 当  $\alpha(\lambda) < 0$  时, 系统 (7) 在  $(0, \lambda)$  处有一个连续型跃迁, 并在  $\lambda < \lambda_c$  一侧分歧出两个渐近稳定的奇点  $\omega^{\pm}(\lambda)$ ;
- 3) 奇点  $\omega^{\pm}(\lambda)$  可表示为

$\omega^{\pm}(\lambda) = \pm \sqrt{-\frac{\beta_{11}}{\alpha(\lambda)}} e_{11} + (\phi_1, \phi_2)^T \left( \sqrt{-\frac{\beta_{11}}{\alpha(\lambda)}} \right)^2 + o(|\beta_{11}|).$

证明: 类似定理 1 的证明, 系统 (7) 在空间  $E_1$  中可约化为

$\langle e_{11}, e_{11}^* \rangle \frac{dx_1}{dt} = \langle L_{\lambda}(\omega), e_{11}^* \rangle + \langle G(\omega), e_{11}^* \rangle = \beta_{11} \langle e_{11}, e_{11}^* \rangle x_1 + \langle G(\omega), e_{11}^* \rangle.$  (21)

为计算式 (21) 的最后一项, 需确定中心流形函数  $\Phi(x)$ :  $E_1 \rightarrow E_2$ , 令

$\omega = x_1 e_{11} + \Phi(x_1),$  (22)

由  $\lambda_c$  附近中心流形函数的渐近表达式(文献[22]中定理 A. 1. 14)可知,

$\Phi(x_1) = \sum_{k \neq 1}^{\infty} \left( -\frac{Q_k x_1^2}{\beta_{k1}} e_{k1} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{H_k x_1^2}{\beta_{k2}} e_{k2} \right) = \left( \begin{array}{l} \sum_{k \neq 1}^{\infty} \left( -\frac{Q_k}{\beta_{k1}} \psi_k \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{H_k}{\beta_{k2}} \psi_k \right) \\ \sum_{k \neq 1}^{\infty} \left( -\frac{Q_k h_{k1}}{\beta_{k1}} \psi_k \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{H_k h_{k2}}{\beta_{k2}} \psi_k \right) \end{array} \right) x_1^2,$  (23)

其中

$Q_k = (1 + g_{k1} h_{k1}) ((1 - g_{k1})(p^3 mv^* - mp^2 h_{11}) - \lambda) \int_{\Omega} \psi_1^2 \psi_k dx,$

$H_k = (1 + g_{k2} h_{k2}) ((1 - g_{k2})(p^3 mv^* - mp^2 h_{11}) - \lambda) \int_{\Omega} \psi_1^2 \psi_k dx.$

将式 (19), (20) 代入  $\Phi(x_1) = (\phi_1, \phi_2)^T x_1^2 + o(2)$  中, 并结合式 (22), 有

$\frac{\langle G(\omega), e_{11}^* \rangle}{\langle e_{11}, e_{11}^* \rangle} = \frac{\langle G(x_1 e_{11} + \Phi(x_1)), e_{11}^* \rangle}{\langle e_{11}, e_{11}^* \rangle} = \frac{(p^3 mv^* - \lambda) \int_{\Omega} (x_1 \psi_1 + x_1^2 \phi_1)^2 \psi_1 dx - \frac{mp^2}{P_{11}} \int_{\Omega} (x_1 \psi_1 + x_1^2 \phi_1)(x_1 h_{k1} \psi_1 + x_1^2 \phi_2) \psi_1 dx - \frac{p^3 mv^*}{P_{11}} \int_{\Omega} (x_1 \psi_1 + x_1^2 \phi_1)^2 g_{11} \psi_1 dx + \frac{mp^2}{P_{11}} \int_{\Omega} (x_1 \psi_1 + x_1^2 \phi_1)(x_1 h_{k1} \psi_1 + x_1^2 \phi_2) g_{11} \psi_1 dx}{P_{11}} + \frac{1}{P_{11}} \left( (1 - g_{11})(2p^3 mv^* - h_{11} mp^2) \int_{\Omega} \psi_1^2 \phi_1 dx + (g_{11} - 1) mp^2 \int_{\Omega} \psi_1^2 \phi_2 dx - \lambda \int_{\Omega} \psi_1^2 \phi_1 dx \right) x_1^3 + o(3) = \alpha(\lambda) x_1^3 + o(3).$  (24)

再结合式 (21) 和式 (24), 有

$\frac{dx_1}{dt} = \beta_{11} x_1 + \frac{\langle G(x_1 e_{11}), e_{11}^* \rangle}{\langle e_{11}, e_{11}^* \rangle} = \beta_{11} x_1 + \alpha(\lambda) x_1^3 + o(3).$  (25)

显然, 当  $\alpha(\lambda) > 0, \lambda > \lambda_c$  时, 方程(25)分歧出两个鞍点; 当  $\alpha(\lambda) < 0, \lambda < \lambda_c$  时, 方程(25)分歧出两个渐近稳定的奇点:  $x_1^\pm = \pm \sqrt{-\frac{\beta_{11}}{\alpha(\lambda)} + o(\sqrt{|\beta_{11}|})}$ . 注意到系统(7)的跃迁类型及其局部拓扑结构完全由约化方程(25)决定. 因此, 当  $\alpha(\lambda) > 0, \lambda > \lambda_c$  时, 系统(7)分歧出两个不稳定的鞍点; 当  $\alpha(\lambda) < 0, \lambda < \lambda_c$  时, 系统(7)分歧出两个渐近稳定的奇点:

$$\omega^\pm(\lambda) = \pm \sqrt{-\frac{\beta_{11}}{\alpha(\lambda)}} e_{11} + (\phi_1, \phi_2)^T \left( \sqrt{-\frac{\beta_{11}}{\alpha(\lambda)}} \right)^2 + o(|\beta_{11}|).$$

### 4 数值模拟

下面利用 MATLAB 进行数值模拟, 讨论当控制参数  $\lambda$  发生变化时系统(7)的 Turing 不稳定性. 固定扩散项系数的取值为  $d_1 = 0.5508, d_2 = -0.7081, d_3 = -0.2909, d_4 = 0.5108, m = 0.4, \theta = 0.0647, L_1 = L_2 = \pi$ .

模拟过程中令上述系数固定, 同时令参数  $\lambda$  在适当范围内变化, 系统(7)的斑图如图 1 所示. 由图 1 可见, 随着  $\lambda$  值的逐渐增大, 系统(7)的 Turing 斑图形成的圆环逐渐向外扩散, 当  $\lambda$  达到某一临界值后, 斑图几乎保持不变. 当斑图固定临界值在  $\lambda = 20$  附近时, 将模拟中数值代入计算可知对应的  $\lambda_c \approx 18.4607$ , 与模拟斑图效果一致, 因此控制参数  $\lambda$  的变化能影响系统(7)的 Turing 不稳定性. 系统(7)的数值模拟中系数需满足所有假设条件, 在此基础上, 通过使参数在适合范围内变化, 最终选取斑图效果较好的一组数据作为模拟结果. 对满足假设条件的不同系数, 所得的临界值参数  $\lambda$  也会随之变化, 结论仍成立.

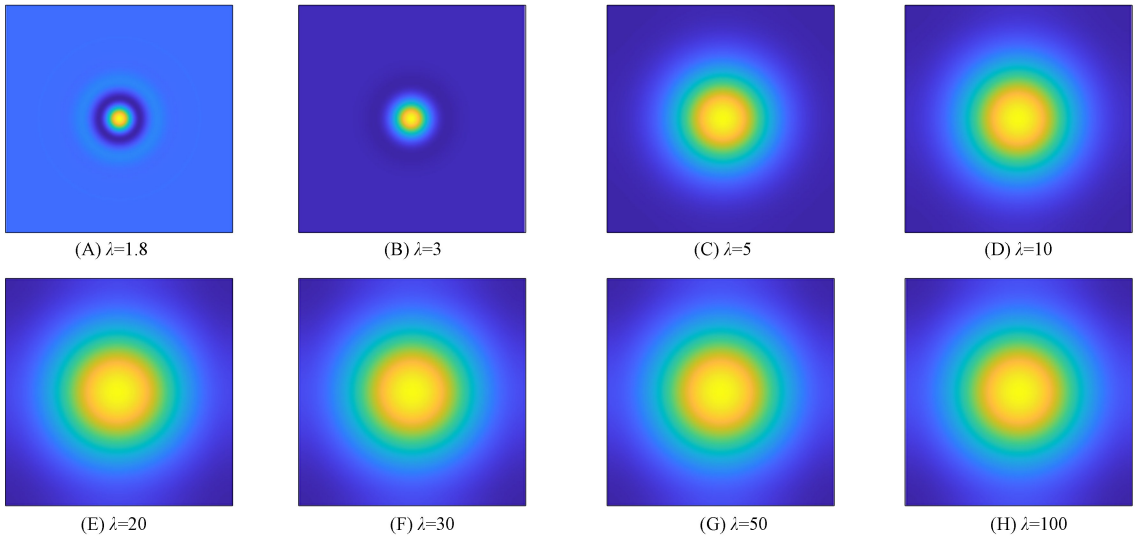


图 1 参数  $\lambda$  变化时系统(7)的斑图

Fig. 1 Patterns of system (7) when parameter  $\lambda$  changes

### 参 考 文 献

[ 1 ] CAI Y L, WANG W M, WANG J F. Dynamics of a Diffusive Predator-Prey Model with Additive Allee Effect [J]. Int J Biomath, 2012, 5(2): 1250023-1-1250023-11.  
 [ 2 ] FU S M, ZHANG H S. Effect of Hunting Cooperation on the Dynamic Behavior for a Diffusive Holling Type II Predator-Prey Model [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2021, 99: 105807-1-105807-23.  
 [ 3 ] BIE Q Y, WANG Q R, YAO Z A. Cross-Diffusion Induced Instability and Pattern Formation for a Holling Type-II Predator-Prey Model [J]. Appl Math Comput, 2014, 247: 1-12.  
 [ 4 ] PENG R, SHI J P. Non-existence of Non-constant Positive Steady States of Two Holling Type-II Predator-Prey Systems: Strong Interaction Case [J]. J Differential Equations, 2009, 247(3): 866-886.  
 [ 5 ] SUN G Q, ZHANG G, JIN Z, et al. Predator Cannibalism Can Give Rise to Regular Spatial Pattern in a Predator-

- Prey System [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 58: 75-84.
- [6] WANG J F, SHI J F, WEI J J. Dynamics and Pattern Formation in a Diffusive Predator-Prey System with Strong Allee Effect in Prey [J]. *J Differential Equations*, 2011, 251(4/5): 1276-1304.
- [7] HAN R J, DAI B X. Spatiotemporal Dynamics and Hopf Bifurcation in a Delayed Diffusive Intraguild Predation Model with Holling II Functional Response [J]. *Int J Bifur Chaos Appl Sci Engrg*, 2016, 26(12): 1650197-1-1650197-31.
- [8] HOLLING C S. Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism [J]. *Can Entomol*, 1959, 91(7): 385-398.
- [9] HSU S B. On Global Stability of a Predator-Prey System [J]. *Math Biosci*, 1978, 39(1/2): 1-10.
- [10] GARVIE M R, TRENCH C. Finite Element Approximation of Spatially Extended Predator-Prey Interactions with the Holling Type II Functional Response [J]. *Numer Math*, 2007, 107(4): 641-667.
- [11] SAMBATH M, BALACHANDRAN K, SUVINTHRA M. Stability and Hopf Bifurcation of a Diffusive Predator-Prey Model with Hyperbolic Mortality [J]. *Complexity*, 2016, 21(Suppl 1): 34-43.
- [12] CHEN S S, WEI J J, YU J Z. Stationary Patterns of a Diffusive Predator-Prey Model with Crowley-Martin Functional Response [J]. *Nonlinear Anal: Real World Appl*, 2018, 39: 33-57.
- [13] YANG R Z, ZHANG C R. The Effect of Prey Refuge and Time Delay on a Diffusive Predator-Prey System with Hyperbolic Mortality [J]. *Complexity*, 2016, 21(Suppl 1): 446-459.
- [14] RAO F. Spatiotemporal Dynamics in a Reaction-Diffusion Toxic-Phytoplankton-Zooplankton Model [J]. *J Stat Mech Theory Exp*, 2013, 2013(8): P08014-1-P08014-19.
- [15] SONG Y L, ZOU X F. Spatiotemporal Dynamics in a Diffusive Ratio-Dependent Predator-Prey Model near a Hopf-Turing Bifurcation Point [J]. *Comput Math Appl*, 2014, 67(10): 1978-1997.
- [16] ABID W, YAFIA R, AZIZ ALAOUI M A, et al. Instability and Pattern Formation in Three-Species Food Chain Model via Holling Type II Functional Response on a Circular Domain [J]. *Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg*, 2015, 25(6): 1550092-1-1550092-25.
- [17] GARVIE M R. Finite-Difference Schemes for Reaction-Diffusion Equations Modeling Predator-Prey Interactions in MATLAB [J]. *Bull Math Biol*, 2007, 69(3): 931-956.
- [18] WANG H N, LIU P. Pattern Dynamics of a Predator-Prey System with Cross-Diffusion, Allee Effect and Generalized Holling IV Functional Response [J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2023, 171: 113456-1-113456-16.
- [19] MA L, WANG H T, GAO J P. Dynamics of Two-Species Holling Type-II Predator-Prey System with Cross-Diffusion [J]. *J Differential Equations*, 2023, 365: 591-635.
- [20] SOUNA F, BELABBAS M, MENACER Y. Complex Pattern Formations Induced by the Presence of Cross-Diffusion in a Generalized Predator-Prey Model Incorporating the Holling Type Functional Response and Generalization of Habitat Complexity Effect [J]. *Math Comput Simulation*, 2023, 204: 597-618.
- [21] 马天, 汪守宏. 非线性演化方程的稳定性与分歧 [M]. 北京: 科学出版社, 2007: 125-301. (MA T, WANG S H. Stability and Divergence of Nonlinear Evolution Equations [M]. Beijing: Science Press, 2007: 125-301.)
- [22] MA T, WANG S H. Phase Transition Dynamics [M]. 2nd ed. Cham: Springer, 2019: 568-575.
- [23] LIU R K, ZHANG D P. Dynamic Transitions for the S-K-T Competition System [J]. *Discrete Contin Dyn Syst: Ser B*, 2022, 27(9): 5343-5365.

(责任编辑: 李琦)