doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024066

Schrödinger 代数的局部自同构

生　玉　秋
（渤海大学 数学科学学院，辽宁 锦州 121013）

摘要： 用李代数和线性代数的理论和方法研究 Schrödinger 代数的局部自同构问题，结合特殊线性李代数的局部自同构结果和 Schrödinger 代数的自同构形式，刻画 Schrödinger 代数的局部自同构.

关键词： Schrödinger 代数；局部自同构；李代数；自同构

中图分类号： O152.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671-5489(2024)06-1291-05

Local Automorphisms of Schrödinger Algebra

SHENG Yuqiu
(*College of Mathematical Sciences, Bohai University, Jinzhou* 121013, *Liaoning Province, China*)

Abstract: Using the theories and methods of Lie algebra and linear algebra, the author studied local automorphism problem of Schrödinger algebra. Combining the results of local automorphisms of special linear Lie algebra and the forms of automorphisms of Schrödinger algebra, the author characterized local automorphisms of Schrödinger algebra.

Keywords: Schrödinger algebra; local automorphism; Lie algebra; automorphism

1　引言与预备知识

自同构是研究代数结构的重要课题之一. 局部自同构[1]主要考察其是否是自同构. 目前，关于各种代数上的局部自同构问题研究备受关注，研究对象也从结合代数扩展到非结合代数. Larson 等[1]证明了无限维 Banach 空间的所有紧算子构成的代数的局部自同构都是自同构，复数域上的 n 阶矩阵代数的局部自同构是自同构或反自同构；Costantini[2]证明了有限维单李代数的局部自同构都是自同构；Becker 等[3]证明了复数域上 n 阶特殊线性李代数的局部自同构都是自同构或反自同构. Schrödinger 代数是 Schrödinger 群的李代数，而 Schrödinger 群可以描述自由粒子 Schrödinger 的对称性，在量子力学和数学物理中有重要作用[4]. Schrödinger 代数 S 是一个六维的非半单李代数，具有基 $\{\boldsymbol{h},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\boldsymbol{l},\boldsymbol{z}\}$，其非零李积如下：

$$[\boldsymbol{h},\boldsymbol{e}]=2\boldsymbol{e},\quad [\boldsymbol{h},\boldsymbol{f}]=-2\boldsymbol{f},\quad [\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}]=\boldsymbol{h},$$
$$[\boldsymbol{h},\boldsymbol{g}]=\boldsymbol{g},\quad [\boldsymbol{h},\boldsymbol{l}]=-\boldsymbol{l},\quad [\boldsymbol{e},\boldsymbol{l}]=\boldsymbol{g},\quad [\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}]=\boldsymbol{l},\quad [\boldsymbol{g},\boldsymbol{l}]=\boldsymbol{z}.$$

Ballesteros 等[5]研究了 Schrödinger 上的李双代数结构；Yang 等[6]刻画了 Schrödinger 代数的导子和双导子；王鹏等[7]证明了 Schrödinger 代数的局部导子都是导子；Jiang 等[8]证明了 Schrödinger-Virasoro 的 2-局部导子都是导子；Lei 等[9]给出了 n 次 Schrödinger 代数上的导子代数和

收稿日期： 2024-02-02.
作者简介： 生玉秋(1973—)，女，汉族，博士，教授，从事李代数的研究，E-mail：shengyuqiu1973@163.com.
基金项目： 国家自然科学基金(批准号：11771069)和海南省自然科学基金(批准号：121MS0784).

自同构群. 本文在上述研究的基础上用矩阵方法刻画 Schrödinger 代数的局部自同构.

本文中所有的矩阵、线性空间和代数都在复数域上，GL_2 和 SL_2 分别表示 2 阶一般线性群和 2 阶特殊线性群，M_n 表示 n 阶全矩阵空间，PSL_2 表示 2 阶射影特殊线性群，即 SL_2 对其中心的商群，sl_2 表示所有迹为 0 的 2 阶方阵构成的 2 阶特殊线性李代数. Schrödinger 代数是 sl_2 与三维 Heisenberg 李代数 $\eta_1=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{g},\boldsymbol{l},\boldsymbol{z}\}$ 的半直积. 对于方阵 $\boldsymbol{A}$，用 $|\boldsymbol{A}|$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，用 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵，$\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示 (i,j) 处元素为 1、其余元素都为 0 的矩阵单位，$\boldsymbol{e}_i$ 表示第 i 个分量为 1、其余分量都为 0 的单位向量. 特殊正交群 $SO_3=\{\boldsymbol{A}\in M_3\,|\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 且 $|\boldsymbol{A}|=1\}$. 对于方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B}$ 表示准对角阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$.

定义 1[3]　设 σ 是李代数 L 的一个可逆线性变换，若对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in L$ 都有 $\sigma([\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}])=[\sigma(\boldsymbol{x}),\sigma(\boldsymbol{y})]$，则称 σ 是李代数 L 的一个自同构.

定义 2[3]　设 σ 是李代数 L 的一个线性变换，若对任意的 $\boldsymbol{x}\in L$ 都有李代数 L 的一个自同构 $\sigma_{\boldsymbol{x}}$，使得 $\sigma(\boldsymbol{x})=\sigma_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})$，则称 σ 是李代数 L 的一个局部自同构.

记 L 所有自同构和所有局部自同构的集合分别为 $\mathrm{Aut}(L)$ 和 $\mathrm{LAut}(L)$. $\mathrm{Aut}(L)$ 可以成为一个乘法群，当 L 为有限维时，$\mathrm{LAut}(L)$ 也可成为一个乘法群. 显然 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{22}$，$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{E}_{12}$，$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{E}_{21}$ 是 sl_2 的一组基. 令

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_3=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

则 $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$ 也是 sl_2 的一组基，且有以下结论.

引理 1[10]　设 σ 是 sl_2 的一个可逆线性变换，且 σ 在基 $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 σ 是 sl_2 的一个李代数自同构当且仅当 $\boldsymbol{A}\in SO_3$.

引理 1 给出了李代数 sl_2 的自同构的矩阵形式，Jacobson[11] 给出了 sl_2 的自同构的映射形式，Becker 等[3]给出了 sl_2 的局部自同构的映射形式.

引理 2[11]　设 σ 是 sl_2 的一个线性变换，则 σ 是 sl_2 的一个李代数自同构当且仅当存在 $\boldsymbol{P}\in GL_2$，使得 $\sigma(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}$，$\forall\,\boldsymbol{X}\in sl_2$.

引理 3[3]　$\sigma\in\mathrm{LAut}(sl_2)$ 当且仅当存在 $\boldsymbol{P}\in GL_2$，使得 $\sigma(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}$（$\forall\,\boldsymbol{X}\in sl_2$）或 $\sigma(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$（$\forall\,\boldsymbol{X}\in sl_2$）.

对任意的 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{2\times 2}\in GL_2$，记

$$\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{B}}=|\boldsymbol{B}|^{-1}\begin{pmatrix}b_{11}b_{22}+b_{12}b_{21} & -b_{11}b_{21} & b_{12}b_{22}\\ -2b_{11}b_{12} & b_{11}^2 & -b_{12}^2\\ 2b_{21}b_{22} & -b_{21}^2 & b_{22}^2\end{pmatrix}.$$

记 Δ 为李代数 sl_2 的所有自同构在基 $\{\boldsymbol{h},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}\}$ 下的矩阵构成的乘法群. 由引理 2 经过直接计算可得：

推论 1　$\Delta=\{\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{B}}\,|\,\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{2\times 2}\in GL_2\}=\{\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{B}}\,|\,\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{2\times 2}\in SL_2\}$.

命题 1　$\Delta\cong SO_3\cong\mathrm{Aut}(sl_2)\cong PSL_2$.

证明：由引理 1 知只需证明 $\mathrm{Aut}(sl_2)\cong PSL_2$. 对任意的 $\boldsymbol{P}\in SL_2$，定义 $\sigma_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}$，$\forall\,\boldsymbol{X}\in sl_2$. 由引理 2 知 $\mathrm{Aut}(sl_2)=\{\sigma_{\boldsymbol{P}}\,|\,\boldsymbol{P}\in SL_2\}$.

定义 f：$\mathrm{Aut}(sl_2)\to PSL_2$；$\sigma_{\boldsymbol{P}}\to\overline{\boldsymbol{P}}^{-1}$. 设 $\sigma_{\boldsymbol{P}},\sigma_{\boldsymbol{L}}\in\mathrm{Aut}(sl_2)$，若 $\sigma_{\boldsymbol{P}}=\sigma_{\boldsymbol{L}}$，则 $\forall\,\boldsymbol{X}\in sl_2$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{L}$，故 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}^{-1}$ 在 SL_2 的中心内，从而 $\overline{\boldsymbol{P}}=\overline{\boldsymbol{L}}$，$f$ 的定义合理. 显然，f 是满射. 若 $f(\sigma_{\boldsymbol{L}})=f(\sigma_{\boldsymbol{P}})$，则 $\overline{\boldsymbol{L}}^{-1}=\overline{\boldsymbol{P}}^{-1}$，故 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}^{-1}$ 在 SL_2 的中心内，即 $\boldsymbol{P}=\pm\boldsymbol{L}$. 于是 $\sigma_{\boldsymbol{P}}=\sigma_{\boldsymbol{L}}$，$f$ 是单射. 又

$$f(\sigma_{\boldsymbol{L}}\sigma_{\boldsymbol{P}})=\sigma_{\boldsymbol{PL}}=\overline{\boldsymbol{PL}}^{-1}=\overline{\boldsymbol{L}}^{-1}\overline{\boldsymbol{P}}^{-1}=f(\sigma_{\boldsymbol{L}})f(\sigma_{\boldsymbol{P}}),$$

因此 f 是同构映射.

下面所讨论的 Schrödinger 代数 S 的所有线性变换的矩阵都是在基 $\{\boldsymbol{h},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\boldsymbol{l},\boldsymbol{z}\}$ 下的. 记 $\varGamma$ 为 S 的所有李代数自同构的矩阵构成的乘法群.

引理 4[9]　$\Gamma=\{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{B},x,y)\mid \boldsymbol{B}\in GL_2,\ x,y\text{ 是复数}\}$，其中

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{B},x,y)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{B}} & & \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}(x,y) & \boldsymbol{B} & \\ |\boldsymbol{B}|\alpha(x,y) & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{\beta}(x,y) & |\boldsymbol{B}|\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C}(x,y)=\begin{pmatrix}x & y & 0\\ -y & 0 & x\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}(x,y)=\begin{pmatrix}xy & \dfrac{y^2}{2} & -\dfrac{x^2}{2}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\beta}(x,y)=(y\quad -x).$$

由引理 4 和推论 1 易知下列结论成立.

引理 5　1) 若$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & & \\ * & * & \\ * & * & *\end{pmatrix}\in\Gamma$，则 $\boldsymbol{A}\in\Delta$；

2) 若 $\boldsymbol{A}\in\Delta$，则存在 $\boldsymbol{B}\in GL_2$，使得 $\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B}\oplus|\boldsymbol{B}|\in\Gamma$.

2　主要结果

定理 1　设 $\sigma\in \mathrm{LAut}(S)$，则 $\sigma\in\mathrm{Aut}(S)$或$-\sigma\in\mathrm{Aut}(S)$.

证明：设 $\boldsymbol{T}$ 是 σ 的矩阵. 由局部自同构的定义知，对任意的六维向量 $\boldsymbol{Y}$，存在由 $\boldsymbol{Y}$ 确定的 $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{Y}}\in\Gamma$，使得

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}.\tag{1}$$

由引理 4，将 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{e}_i(i=4,5,6)$分别代入式(1)可得

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & & \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} & \\ \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} & c\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}\in M_3,\quad \boldsymbol{B}\in M_2.\tag{2}$$

若 $\boldsymbol{T}$ 不可逆，则存在非零向量 $\boldsymbol{Z}$ 使得 $\boldsymbol{0}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Z}$，与 $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{Z}}$ 可逆矛盾，故 $\boldsymbol{T}$ 可逆，从而方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆的. 对任意的三维向量 $\boldsymbol{X}$，由式(1),(2)和引理 5 可知，存在 $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{X}}\in\Delta$，使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}$，即 $\sigma|_{sl_2}$ 是 sl_2 的一个局部自同构. 由引理 3 知，存在 $\boldsymbol{P}\in SL_2$，使得 $\sigma(\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{P}(\forall \boldsymbol{Z}\in sl_2)$或 $\sigma(\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ $(\forall \boldsymbol{Z}\in sl_2)$.

情形 1) $\sigma(\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$，$\forall \boldsymbol{Z}\in sl_2$.

此时，$-\sigma\in\mathrm{Aut}(sl_2)$，故$-\boldsymbol{A}\in\Delta$. 由引理 5 可知，存在 $\boldsymbol{D}\in GL_2$，使得 $\boldsymbol{T}_1=-\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{D}\oplus|\boldsymbol{D}|\in\Gamma$. 令

$$\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{I} & & \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \\ \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\beta}_1 & c_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0\\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0\\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{T}_2$ 仍是 S 的一个局部自同构的矩阵. 由局部自同构定义可知，对任意的六维向量 $\boldsymbol{Y}$，存在由 $\boldsymbol{Y}$ 确定的 $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{Y}}\in\Gamma$，使得

$$\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Y}.\tag{3}$$

由引理 4，可设

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{Y}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{B}_2} & & \\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}(x,y) & \boldsymbol{B}_2 & \\ |\boldsymbol{B}_2|\alpha(x,y) & |\boldsymbol{B}_2|\boldsymbol{\beta}_2(x,y) & |\boldsymbol{B}_2|\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\in GL_2$，$\boldsymbol{C}(x,y)$,$\boldsymbol{\alpha}(x,y)$和 $\boldsymbol{\beta}(x,y)$如引理 4 所述. 显然，$\boldsymbol{B}_2,x,y$ 都与 $\boldsymbol{Y}$ 有关.

下面将 $\boldsymbol{Y}$ 用不同的向量代入式(3)以确定 $\boldsymbol{T}_2$ 中的 a_{ij}. $\boldsymbol{B}_2$ 的可逆性表明 $\boldsymbol{B}_2$ 的每一行(列)的两个元素不能都是 0.

① 将 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{e}_1$ 代入式(3)可得 $a_{61}=a_{41}a_{51}$；

② 将 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{e}_2$ 代入式(3)可得 $a_{52}=0$，$a_{62}=-\dfrac{1}{2}a_{42}^2$；

③ 将 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{e}_3$ 代入式(3)可得 $a_{43}=0$，$a_{63}=\dfrac{1}{2}a_{53}^2$；

④ 将 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_4$ 代入式(3)可得 $a_{54}=0$；

⑤ 将 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_4$ 代入式(3)可得 $a_{64}=a_{44}a_{51}$；

⑥ 将 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_5$ 代入式(3)可得 $a_{45}=0$；

⑦ 将 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_5$ 代入式(3)可得 $a_{65}=a_{41}a_{55}$；

⑧ 将 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_4+\boldsymbol{e}_5-\boldsymbol{e}_6$ 代入式(3)可得 $a_{66}=-a_{44}a_{55}$；

⑨ 将 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 代入式(3)可得 $a_{42}=-a_{51}$；

⑩ 将 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$ 代入式(3)可得 $a_{41}=a_{53}$；

⑪ 将 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_5-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{e}_6$ 代入式(3)可得 $a_{44}=a_{55}$.

由于推导过程类似，因此下面仅给出其中两种典型情形的推导过程.

情形(i) 将 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{e}_1$ 代入式(3)可得 $a_{61}=a_{41}a_{51}$. 此时，由式(3)可得

$$b_{11}b_{22}+b_{12}b_{21}=-b_{11}b_{22}+b_{12}b_{21},\qquad b_{11}b_{12}=b_{21}b_{22}=0,$$
$$a_{41}=b_{11}x-b_{12}y,\quad a_{51}=b_{21}x-b_{22}y,\quad a_{61}=bxy.$$

于是，$b_{11}=b_{22}=0$，$a_{41}=-b_{12}y$，$a_{51}=b_{21}x$. 因此，$a_{61}=-b_{12}b_{21}xy=a_{41}a_{51}$.

情形(ii) 将 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 代入式(3)可得 $a_{42}=-a_{51}$. 注意到此时已经有 $a_{61}=a_{41}a_{51}$，$a_{52}=0$，$a_{62}=-\dfrac{1}{2}a_{42}^2$. 由式(3)得

$$b_{21}(2b_{22}-b_{21})=b_{11}(2b_{22}-b_{21})=0, \tag{4}$$
$$-2b_{11}b_{12}+b_{11}^2=-b_{11}b_{22}+b_{12}b_{21}, \tag{5}$$
$$-b_{22}x-b_{12}y-b_{22}y=a_{41}+a_{42}, \tag{6}$$
$$2b_{22}x+b_{22}y=a_{51}, \tag{7}$$
$$(-b_{22}^2-2b_{22}b_{12})\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)=a_{41}a_{51}-\frac{1}{2}a_{42}^2. \tag{8}$$

由式(4)得 $b_{21}=2b_{22}$. 由式(5)得 $(b_{11}+b_{22})(2b_{12}-b_{11})=0$. 若 $2b_{12}-b_{11}=0$，考虑到 $b_{21}=2b_{22}$，表明 $\boldsymbol{B}_2$ 不可逆，矛盾. 所以 $2b_{12}-b_{11}\neq 0$，从而 $b_{11}=-b_{22}$. 由于

$$(-b_{22}x-b_{12}y-b_{22}y)(2b_{22}x+b_{22}y)=-\frac{1}{2}(2b_{22}x+b_{22}y)^2+(-b_{22}^2-2b_{22}b_{12})\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right),$$

故由式(6)～(8)可得

$$(a_{41}+a_{42})a_{51}=-\frac{1}{2}a_{51}^2+\left(a_{41}a_{51}-\frac{1}{2}a_{42}^2\right).$$

于是 $a_{42}=-a_{51}$.

记 $a_{44}=-c$，$a_{41}=-cu$，$a_{42}=-cv$. 综合上述结果有

$$\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{I} & & \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \\ \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\beta}_1 & c_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -cu & -cv & 0 & -c & 0 & 0\\ cv & 0 & -cu & 0 & -c & 0\\ -c^2uv & -\frac{1}{2}c^2v^2 & \frac{1}{2}c^2u^2 & -c^2v & c^2u & -c^2\end{pmatrix}.$$

由引理4知 $-\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{M}(c\boldsymbol{I}_2,u,v)\in\Gamma$，故 $-\boldsymbol{T}\in\Gamma$，从而有 $-\sigma\in\mathrm{Aut}(S)$.

情形2) $\sigma(\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{P}$，$\forall\boldsymbol{Z}\in sl_2$.

类似于情形 1)的证明可推得 $\boldsymbol{T}\in\Gamma$，从而有 $\sigma\in\mathrm{Aut}(S)$.

定理 2　$\sigma\in\mathrm{LAut}(S)$ 当且仅当 $\sigma\in\mathrm{Aut}(S)$ 或 $-\sigma\in\mathrm{Aut}(S)$.

证明：由定理 1 知，只需证明当 $-\sigma\in\mathrm{Aut}(S)$ 时 $\sigma\in\mathrm{LAut}(S)$. 由于 $-\mathrm{id}_S=(-\sigma)^{-1}\sigma$(其中 id_S 为 S 的恒等映射)，故只需证明 $-\mathrm{id}_S\in\mathrm{LAut}(S)$. 由局部自同构的定义知，只需证明对任意的 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)^{\mathrm{T}}$，存在由 $\boldsymbol{X}$ 确定的 $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}\in\Gamma$，使得 $-\boldsymbol{X}=\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}$. 当然，只需考虑 $\boldsymbol{X}$ 为非零向量. 下面分情况讨论.

情形 1) $x_4=x_5=0$.

情形① $x_1=0$. 令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{22}$，则 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{B},0,0)\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{X}$.

情形② $x_1\neq 0$ 且 $x_2=0$. 令 $\boldsymbol{B}=-x_1^{-1}x_3\boldsymbol{E}_{11}+2\boldsymbol{E}_{12}+2^{-1}(1-x_1^{-2}x_3^2)\boldsymbol{E}_{21}+x_1^{-1}x_3\boldsymbol{E}_{22}$，则 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{B},0,0)\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{X}$.

情形③ $x_1\neq 0$ 且 $x_2\neq 0$. 令 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}+2x_2^{-1}x_1\boldsymbol{E}_{21}$，则 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{B},0,0)\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{X}$.

情形 2) x_4,x_5 不全为 0.

此时存在 $\boldsymbol{B}\in GL_2$，使得 $\boldsymbol{B}(x_4,x_5)^{\mathrm{T}}=(1,0)^{\mathrm{T}}$. 记 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{B},0,0)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,y_3,1,0,y_6)^{\mathrm{T}}$. 只需证明存在 $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Y}}\in\Gamma$ 使得 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{Y}=-\boldsymbol{Y}$.

情形① $y_3\neq 0$. 令 $\boldsymbol{B}_1=-\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}+2y_1y_3^{-1}\boldsymbol{E}_{12}$，则 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{B}_1,0,0)\boldsymbol{Y}=-\boldsymbol{Y}$.

情形② $y_3=y_1=0$. 令 $\boldsymbol{B}_2=-\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}$，则 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{B}_2,0,0)\boldsymbol{Y}=-\boldsymbol{Y}$.

情形③ $y_3=y_2=0$ 且 $y_1\neq 0$. 令 $\boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21}$，则 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{B}_3,-y_1^{-1},y_1^{-1})\boldsymbol{Y}=-\boldsymbol{Y}$.

情形④ $y_3=0$ 且 $y_1y_2\neq 0$. 令 $\boldsymbol{B}_4=-\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}+2y_1y_2^{-1}\boldsymbol{E}_{21}$，则 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{B}_4,-2y_1^{-1},2y_2^{-1})\boldsymbol{Y}=-\boldsymbol{Y}$.

综上可知，当 $-\sigma\in\mathrm{Aut}(S)$ 时 $\sigma\in\mathrm{LAut}(S)$.

参　考　文　献

[1] LARSON D R，SOUROUR A R. Local Derivations and Local Automorphisms of $\mathscr{B}(\boldsymbol{X})$ [J]. Proc Sympos Pure Math，1990，51(2)：187-194.

[2] COSTANTINI M. Local Automorphisms of Finite Dimensional Simple Lie Algebras [J]. Linear Algebra Appl，2019，562：123-134.

[3] BECKER T，ESCOBAR S J，SALAS C，et al. On Local Automorphism of sl_2 [J]. Uzbek Math J，2019(2)：27-33.

[4] PERROUD M. Projective Representations of the Schrödinger Group [J]. Helv Phys Acta，1977，50(2)：233-252.

[5] BALLESTEROS A，HERRANZ F J，PARASHAR P. (1+1) Schrödinger Lie Bialgebras and Their Poisson-Lie Groups [J]. J Phys A：Math General，2000，33(17)：3445-3465.

[6] YANG Y，TANG X M. Derivations of the Schrödinger Algebra and Their Applications [J]. J Appl Math Comput，2018，58(1/2)：567-576.

[7] 王鹏，唐孝敏. Schrödinger 代数的局部导子 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2023，61(1)：46-52. (WANG P，TANG X M. Local Derivations of Schrödinger Algebras [J]. Journal of Jilin University (Science Edition)，2023，61(1)：46-52.)

[8] JIANG Q，TANG X M. 2-Local Derivations on the Schrödinger-Virasoro Algebra [J]. Linear Multilinear Algebra，2024，72(8)：1328-1345.

[9] LEI B Q，YANG H Y. The Derivation Algebra and Automorphism Group of the n-th Schrödinger Algebra [J]. Comm Algebra，2024，52(1)：283-294.

[10] PAN Y，LIU Q，BAI C M，et al. Post Lie Algebra Structures on the Lie Algebra SL(2，$\mathbb{C}$) [J]. Electron J Linear Algebra，2012，23：180-197.

[11] JACOBSON N. Lie Algebras [M]. New York：Dover Publications，Inc，1979：211.

(责任编辑：赵立芹)