

# 基于一致性和差异性的低秩张量多视图聚类算法

周余琳, 王长鹏

(长安大学 理学院, 西安 710064)

**摘要:** 针对如何利用多视图数据中的隐含信息以及避免后续处理过程中带来的聚类性能次优问题, 提出一种基于一致性和差异性的低秩张量多视图聚类算法. 首先, 该算法同时考虑视图的一致性和差异性信息, 将多个一致性相似矩阵叠加在一个受低秩约束的张量中, 以探索视图间信息的高阶相关性, 从而得到更高质量的相似矩阵; 其次, 通过学习一个一致非负嵌入矩阵直接获得聚类结果; 再次, 采用自适应加权策略考虑不同视图数据的重要性; 最后, 通过在6个真实数据集上与其他算法进行对比实验, 验证了该算法在多视图聚类问题上的有效性.

**关键词:** 多视图聚类; 一致性; 差异性; 低秩张量表示; 自适应加权

**中图分类号:** TP391.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)02-0537-14

## Multi-view Clustering Algorithm with Low-Rank Tensor Based on Consistency and Difference

ZHOU Yulin, WANG Changpeng

(School of Sciences, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

**Abstract:** Aiming at how to utilize the implicit information in multi-view data and avoid the problem of sub-optimal clustering performance in the subsequent processing, we proposed a multi-view clustering algorithm with low-rank tensor based on consistency and difference. Firstly, the algorithm simultaneously considered the consistency and differential information of views, and superimposed multiple consistent similarity matrices in a tensor constrained by low-rank to explore the higher-order correlations of the information between views, thus obtaining higher-quality similarity matrices. Secondly, clustering results were directly obtained by learning a consistent non-negative embedding matrix. Thirdly, an adaptive weighting strategy was used to consider the importance of different view data. Finally, the effectiveness of the algorithm on the multi-view clustering problem was verified by comparison experiments with other algorithms on six real datasets.

**Keywords:** multi-view clustering; consistency; difference; low-rank tensor representation; adaptive weighting

## 0 引言

聚类是机器学习中的一种无监督学习方法<sup>[1]</sup>, 在计算机视觉、自然语言处理、生物信息学<sup>[2]</sup>等领

收稿日期: 2024-02-26. 网络首发日期: 2024-11-19.

**第一作者简介:** 周余琳(2000—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事机器学习的研究, E-mail: 15229874579@163.com. **通信作者简介:** 王长鹏(1985—), 男, 汉族, 博士, 副教授, 从事机器学习的研究, E-mail: cpwang@chd.edu.cn.

**基金项目:** 国家自然科学基金(批准号: 12471480)和长安大学中央高校基本科研业务费专项基金(批准号: 300102122101).

**网络首发地址:** <https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20241118.1336.003>.

域应用广泛. 随着信息技术的发展, 从各种来源获得了大量的多视图数据, 这些多视图数据可从不同的角度进行描述, 例如多媒体视频是同时用摄像机的视频信号和录音机的音频信息描述. 尽管多视图数据中的每个视图都具有特定的特征属性, 但这些特征都描述了相同的原始数据样本, 从而不同视图之间的信息可以相互利用<sup>[3-4]</sup>. 因此, 为提高聚类性能, 不能只依赖于单一视图, 而必须探索多个视图之间的互补性和一致性<sup>[5]</sup>, 多视图聚类就是在无监督环境下实现该目的, 因而备受关注.

由于图的形式可以表征数据结构, 在不同理论和方法的框架下, 目前学者们已提出了许多种基于图的多视图聚类方法<sup>[6-10]</sup>, 并且大多数都取得了满意的聚类性能. 基于图的聚类方法通常是首先构造各视图的相似图, 其次通过建模学习一个有利于聚类的融合图, 最后对融合图进行划分以获得聚类结果. 为提高聚类性能, Zhan 等<sup>[11]</sup>利用 Laplace 秩约束改善初始图的质量, 然后在初始化图的基础上学习具有结构的全局图. Nie 等<sup>[12]</sup>注意到各视图对聚类的贡献不同, 对各视图进行了加权, 并通过谱旋转从多个谱嵌入中学习一致的指示矩阵. Liang 等<sup>[13]</sup>同时对多个视图的一致性和不一致性建模, 获得了高质量的融合图. Huang 等<sup>[14]</sup>结合多样性度量和自加权策略提出了一个新的多视图聚类框架, 最终得到具有确定连通分量的融合图. 为有效揭示多视图数据中嵌入的底层聚类结构, Liu 等<sup>[15]</sup>基于联合非负矩阵分解的方法, 从不同的系数矩阵中学习一个共同的系数矩阵. Li 等<sup>[16]</sup>通过广义低秩模型学习了松弛的一致嵌入矩阵, 但后期需要采用  $k$ -means 算法得到聚类结果. Hu 等<sup>[17]</sup>通过引入非负约束使聚类结果具有可解释性, 避免了后期操作. He 等<sup>[18]</sup>将不一致分离和低秩分解整合到一个框架中, 得到的一致非负嵌入矩阵指明了聚类结构, 但未考虑多视图数据间的高阶相关性. 此外, 为探索多视图数据的空间结构和高阶信息, 保持独立数据之间的相关性, 也提出了一些基于张量的多视图聚类方法<sup>[19-21]</sup>, 很好地提高了聚类性能.

在多视图聚类问题上尽管取得了许多研究成果, 但现有的多数方法主要关注多视图的一致性, 而忽视了多视图数据中差异信息带来的影响, 且大多数方法都专注于研究视图之间的共同表示或两两之间的关联, 导致多视图数据缺乏全面性和更深层次的高阶相关性, 从而错过了重要的潜在语义信息. 此外, 许多方法需要后续处理才能获得最终的聚类结果, 可能导致信息损失, 从而降低了聚类性能.

基于以上分析, 本文提出一种基于一致性和差异性的低秩张量多视图聚类算法 (multi-view clustering with low-rank tensor based on consistency and difference, LRTCD). 该算法对初始相似矩阵进行一致性与差异性分解, 利用张量构造技术及基于加权张量奇异值分解 (tensor singular value decomposition, t-SVD) 的核范数学习各视图高质量的一致性相似矩阵, 同时对基于各视图一致性相似矩阵学习的一致嵌入矩阵施加非负约束, 以直接得到最终的聚类结果, 而不需任何后处理. 此外, 使用自加权策略学习不同视图的权重, 以考虑各视图的不同贡献. 为求解该优化问题, 本文采用交替方向乘法 (alternating direction method of multipliers, ADMM) 进行求解, 并在 6 个真实数据集上验证本文算法的有效性. LRTCD 算法框架如图 1 所示.

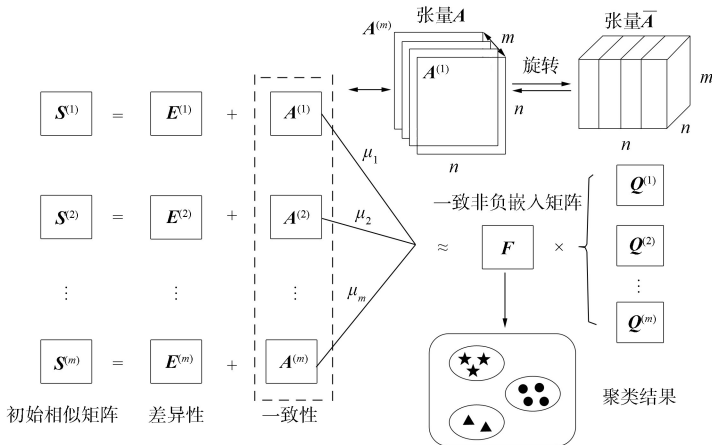


图 1 LRTCD 算法框架

Fig. 1 Framework of LRTCD algorithm

# 1 预备知识

## 1.1 定义

本文中,  $\mathbf{I}$  表示对角元素为 1 的单位矩阵,  $\mathbf{1}$  表示全 1 向量. 对于矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{tr}(\mathbf{A})$  和  $\|\mathbf{A}\|_F$  分别表示矩阵  $\mathbf{A}$  的迹和 Frobenius 范数. 对于张量  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ,  $\mathbf{A}^{(k)}$  表示张量  $\mathbf{A}$  的第  $k$  个前向切片,  $\bar{\mathbf{A}} = \text{fft}(\mathbf{A}, [ ], 3)$  表示沿着第三维的快速 Fourier 变换 (FFT), 则通过对  $\bar{\mathbf{A}}$  进行 Fourier 逆变换即可得到  $\mathbf{A}$ , 即  $\mathbf{A} = \text{ifft}(\bar{\mathbf{A}}, [ ], 3)$ .

**定义 1**<sup>[22]</sup> 对于张量  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ , 其张量奇异值分解为

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \times \mathbf{S} \times \mathbf{V}^T, \tag{1}$$

其中  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1 \times n_3}$  和  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2 \times n_3}$  是正交张量,  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  是对角张量, 它的每个前向切片都是对角矩阵.

根据文献[23], 上述问题可以在 Fourier 域中利用矩阵奇异值分解 (singular value decomposition, SVD) 求解, 即  $\bar{\mathbf{A}}^{(k)} = \bar{\mathbf{U}}^{(k)} \bar{\mathbf{S}}^{(k)} \bar{\mathbf{V}}^{(k)T}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_3$ .

**定义 2**<sup>[24]</sup> 对于张量  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ , 其基于 t-SVD 的张量核范数 (t-SVD based tensor nuclear norm, t-TNN) 表示为

$$\|\mathbf{A}\|_{\#} = \sum_{k=1}^{n_3} \|\bar{\mathbf{A}}^{(k)}\|_* = \sum_{k=1}^{n_3} \sum_{i=1}^{\min\{n_1, n_2\}} \sigma_i(\bar{\mathbf{A}}^{(k)}), \tag{2}$$

其中  $\sigma_i(\bar{\mathbf{A}}^{(k)})$  表示  $\bar{\mathbf{A}}^{(k)}$  的第  $i$  个最大奇异值.

进一步, 根据文献[21], 将基于加权 t-SVD 的张量核范数定义为

$$\|\mathbf{A}\|_{\omega, \#} = \sum_{k=1}^{n_3} \sum_{i=1}^{\min\{n_1, n_2\}} \omega_i \sigma_i(\bar{\mathbf{A}}^{(k)}), \tag{3}$$

其中  $\omega_i$  是  $\sigma_i(\bar{\mathbf{A}}^{(k)})$  的加权系数, 权重系数  $\omega$  的维数与视图数一致, 且考虑了矩阵奇异值的先验知识.

## 1.2 考虑不一致信息的图学习

对于多视图数据  $\mathbf{X}^{(v)} \in \mathbb{R}^{d_v \times n}$ , 其中  $d_v$  表示第  $v$  个视图的维数,  $n$  为样本数. 采用文献[25]的方法构造相似矩阵. 但实际应用中的多视图数据集中可能包含噪声或异常值, 会破坏构造的相似矩阵, 而且每个视图的特定属性也可能破坏相似图, 从而影响聚类性能. 因此可同时多视图的一致性和不一致性进行建模<sup>[13]</sup>:

$$\min_{\substack{\alpha, \mathbf{S}, \\ \mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(v)}}} \left\{ \sum_{i=1}^v \lambda_i \|\alpha_i \mathbf{A}^{(i)} - \mathbf{S}\|_F^2 + \sum_{i,j=1}^v B_{ij} \lambda_i \lambda_j \alpha_i \alpha_j \times \text{sum}((\mathbf{W}^{(i)} - \mathbf{A}^{(i)}) \cdot (\mathbf{W}^{(j)} - \mathbf{A}^{(j)})) \right\}, \tag{4}$$

$$\text{s. t. } \alpha^T \mathbf{1} = 1, \quad \alpha \geq 0, \quad \mathbf{S} \geq 0, \quad \mathbf{W}^{(i)} \geq \mathbf{A}^{(i)} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, v,$$

其中:  $v$  为视图数量;  $\lambda_i$  为衡量第  $i$  个视图重要性的参数;  $\mathbf{W}^{(i)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为第  $i$  个视图的相似矩阵;  $\mathbf{A}^{(i)}$  表示第  $i$  个视图中一致性信息;  $\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{W}^{(i)} - \mathbf{A}^{(i)}$  表示不一致性信息;  $\mathbf{S}$  为一致相似矩阵;  $\alpha_i$  为第  $i$  个视图相似矩阵的缩放系数, 为使缩放结果唯一, 施加约束条件  $\alpha^T \mathbf{1} = 1$ ;  $B_{ij}$  是矩阵  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{v \times v}$  的第  $i$  行第  $j$  列的元素, 且矩阵  $\mathbf{B}$  中的对角元素和非对角元素分别为  $\beta$  和  $\gamma$ ;  $\cdot$  表示两个矩阵的 Hadamard 积 (元素相乘);  $\text{sum}(\cdot)$  是对矩阵中所有元素求和的算子.

## 1.3 一致嵌入学习

为研究矩阵分解与谱聚类之间的联系, Li 等<sup>[16]</sup> 利用广义低秩近似模型学习一个松弛的一致嵌入矩阵, 并通过  $k$ -means 算法得到最终的聚类结果, 其模型为

$$\min_{\mathbf{Z}, \{\mathbf{Q}^{(v)}\}_{v=1}^k} \sum_{v=1}^k \|\mathbf{T}^{(v)} - \mathbf{Z}(\mathbf{Q}^{(v)})^T\|_F^2, \tag{5}$$

$$\text{s. t. } \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \mathbf{I},$$

其中  $\mathbf{T}^{(v)}$  为第  $v$  个视图的相似矩阵,  $\mathbf{Z}$  为松弛的一致嵌入矩阵,  $\mathbf{Q}^{(v)}$  为每个  $\mathbf{T}^{(v)}$  特定的潜在子空间.

## 2 LRTCD 算法

### 2.1 算法模型

为提高多视图聚类的性能,本文首先考虑到视图信息的差异性,对初始相似矩阵进行一致性和差异性分解:  $\mathbf{S}^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)} + \mathbf{E}^{(i)}$ , 其中  $\mathbf{S}^{(i)}$  为第  $i$  个视图的相似性矩阵,  $\mathbf{A}^{(i)}$  为各视图的一致性部分,  $\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{S}^{(i)} - \mathbf{A}^{(i)}$  为视图信息有差异的部分;其次,将各视图相似矩阵的一致性信息堆叠成一个 3 阶张量,以挖掘数据间的高阶相关性,并采用基于加权 t-SVD 的张量核范数保持张量的低秩性质;同时为避免后处理带来的次优问题,受文献[17]的启发,对根据视图一致信息学习到的一致嵌入矩阵施加非负约束,并使用自适应加权策略学习各视图的权重.因此,本文 LRTCD 算法的目标函数为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{A}^{(i)}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}^{(i)}, \mu_i} \left\{ \sum_{i,j=1}^m B_{ij} \mu_i \mu_j \operatorname{tr}((\mathbf{S}^{(i)} - \mathbf{A}^{(i)})(\mathbf{S}^{(j)} - \mathbf{A}^{(j)})^T) + \gamma \|\mathbf{A}\|_{\omega, \#} + \sum_{i=1}^m \mu_i \|\mathbf{A}^{(i)} - \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(i)})^T\|_{\mathbb{F}}^2 \right\}, \\ \text{s. t. } \mathbf{S}^{(i)} \geq \mathbf{A}^{(i)} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \mathbf{A} = \Phi(\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \dots, \mathbf{A}^{(m)}), \quad \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{F} \geq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

其中:  $m$  为视图数量;  $\mu_i$  为第  $i$  个视图的权重;  $\mathbf{S}^{(i)}$  为第  $i$  个视图的相似性矩阵;  $\mathbf{A}^{(i)}$  为各视图的一致性部分; 矩阵  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  中的对角元素和非对角元素分别为  $\beta$  和  $\alpha$ , 分别表示视图间和视图内的差异性;  $\Phi(\cdot)$  通过将多个一致性相似矩阵  $\mathbf{A}^{(i)}$  合并为一个 3 阶张量  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n \times m}$ ;  $\mathbf{F}$  为一致非负嵌入矩阵, 指示了聚类结果;  $\mathbf{Q}^{(i)}$  为各视图松弛的嵌入矩阵; 权重系数  $\omega$  考虑了矩阵奇异值的先验知识, 是由  $\sigma_i(\bar{\mathbf{A}}^{(k)})$  的加权系数  $\omega_i$  组成的向量, 其维数与视图数一致;  $\gamma$  为平衡参数. 第一项和第二项可以获得更高质量的相似矩阵  $\mathbf{A}^{(i)}$ , 第三项用于学习一致非负嵌入矩阵  $\mathbf{F}$ , 从而直接得到聚类结果. 目标函数(6)中的自适应权重  $\mu_i$  根据下式求解:

$$\mu_i = \frac{1}{2 \|\mathbf{A}^{(i)} - \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(i)})^T\|_{\mathbb{F}}}. \quad (7)$$

### 2.2 优化

注意到优化问题(6)具有非凸性,所以直接对其求解较困难.因此,本文采用交替方向乘子法(ADMM)求解.为便于计算,引入辅助张量  $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n \times n \times m}$  代替  $\mathbf{A}$ , 则目标函数(6)可以重新表述为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{A}^{(i)}, \mathbf{J}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}^{(i)}, \mu_i} \left\{ \sum_{i,j=1}^m B_{ij} \mu_i \mu_j \operatorname{tr}((\mathbf{S}^{(i)} - \mathbf{A}^{(i)})(\mathbf{S}^{(j)} - \mathbf{A}^{(j)})^T) + \gamma \|\mathbf{J}\|_{\omega, \#} + \sum_{i=1}^m \mu_i \|\mathbf{A}^{(i)} - \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(i)})^T\|_{\mathbb{F}}^2 \right\}, \\ \text{s. t. } \mathbf{S}^{(i)} \geq \mathbf{A}^{(i)} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{F} \geq 0, \quad \mathbf{A} = \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (8)$$

引入 Lagrange 乘子  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n \times m}$  和惩罚参数  $\rho > 0$ , 式(8)的增广 Lagrange 乘子函数为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{A}^{(i)}, \mathbf{J}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}^{(i)}, \mu_i} \left\{ \sum_{i,j=1}^m B_{ij} \mu_i \mu_j \operatorname{tr}((\mathbf{S}^{(i)} - \mathbf{A}^{(i)})(\mathbf{S}^{(j)} - \mathbf{A}^{(j)})^T) + \gamma \|\mathbf{J}\|_{\omega, \#} + \right. \\ \left. \sum_{i=1}^m \mu_i \|\mathbf{A}^{(i)} - \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(i)})^T\|_{\mathbb{F}}^2 + \frac{\rho}{2} \left\| \mathbf{J} - \left( \mathbf{A} + \frac{\mathbf{H}}{\rho} \right) \right\|_{\mathbb{F}}^2 \right\}, \\ \text{s. t. } \mathbf{S}^{(i)} \geq \mathbf{A}^{(i)} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{F} \geq 0, \quad \mathbf{A} = \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (9)$$

1) 更新  $\mathbf{A}^{(i)}$ .

令  $\Phi^{(i)-1}(\mathbf{J}) = \mathbf{A}^{(i)}$ ,  $\Phi^{(i)-1}(\mathbf{H}) = \mathbf{H}^{(i)}$ ,  $\mathbf{G}^{(i)} = \mathbf{J}^{(i)} - \frac{\mathbf{H}^{(i)}}{\rho}$ , 固定其他变量只考虑  $\mathbf{A}^{(i)}$ , 则式(9)可化为

$$\min_{\mathbf{A}^{(i)}} \left\{ \sum_{i,j=1}^m B_{ij} \mu_i \mu_j \operatorname{tr}((\mathbf{S}^{(i)} - \mathbf{A}^{(i)})(\mathbf{S}^{(j)} - \mathbf{A}^{(j)})^T) + \sum_{i=1}^m \mu_i \|\mathbf{A}^{(i)} - \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(i)})^T\|_{\mathbb{F}}^2 + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{G}^{(i)} - \mathbf{A}^{(i)}\|_{\mathbb{F}}^2 \right\}. \quad (10)$$

对式(10)关于  $\mathbf{A}^{(i)}$  求偏导, 并令其偏导为 0, 整理可得:

$$2\mu_i \mathbf{A}^{(i)} + \rho \mathbf{A}^{(i)} + \sum_{j=1}^m B_{ij} \mu_i \mu_j \mathbf{A}^{(j)} = 2\mu_i \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(i)})^T + \rho \mathbf{G}^{(i)} + \sum_{j=1}^m B_{ij} \mu_i \mu_j \mathbf{S}^{(j)}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (11)$$

进一步, 可将式(11)的左侧转化为关于  $(\mu_{ij}^{(1)}, \dots, \mu_{ij}^{(m)})$  的线性方程组, 其系数矩阵为

$$\mathbf{M} = 2 \operatorname{diag} \left( \boldsymbol{\mu} + \frac{\rho}{2} \right) + \mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T), \quad (12)$$

其中:  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T$  是视图的权重向量;  $\text{diag}(\boldsymbol{\mu} + \rho/2)$  是对角矩阵, 第  $i$  个对角元素为  $\mu_i + \rho/2$ ;  $\cdot$  表示 Hadamard 积.

类似地, 令  $\mathbf{T}^{(i)} = 2\mu_i \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(i)})^T + \rho \mathbf{G}^{(i)} + \sum_{j=1}^m B_{ij} \mu_i \mu_j \mathbf{S}^{(j)}$ ,  $\mathbf{t}^{(i)} = \text{vec}(\mathbf{T}^{(i)})$ , 其中  $\text{vec}(\cdot)$  是向量化算子, 则式(11)可转化为

$$\mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} \text{vec}(\mathbf{A}^{(1)}) \\ \vdots \\ \text{vec}(\mathbf{A}^{(m)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{t}^{(m)} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

因此, 进一步计算得

$$\begin{pmatrix} \text{vec}(\mathbf{A}^{(1)}) \\ \vdots \\ \text{vec}(\mathbf{A}^{(m)}) \end{pmatrix} = \text{pinv}(\mathbf{M}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{t}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{t}^{(m)} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

其中  $\text{pinv}(\cdot)$  表示伪逆矩阵.

对  $\text{vec}(\mathbf{A}^{(i)})$  进行重塑可得  $\mathbf{A}^{(i)}$ , 同时考虑到约束条件  $\mathbf{S}^{(i)} \geq \mathbf{A}^{(i)} \geq 0 (i=1, 2, \dots, m)$ , 最终  $\mathbf{A}^{(i)}$  的解为

$$\mathbf{A}^{(i)} = \max\{\mathbf{A}^{(i)}, 0\}, \quad \mathbf{A}^{(i)} = \min\{\mathbf{A}^{(i)}, \mathbf{S}^{(i)}\}. \tag{15}$$

2) 更新  $\mathbf{J}$ .

当固定  $\mathbf{A}^{(i)}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}^{(i)}, \mu_i$  时, 可通过如下子问题更新变量  $\mathbf{J}$ :

$$\min_{\mathbf{J}} \left\{ \frac{\gamma}{\rho} \|\mathbf{J}\|_{\omega, \#} + \frac{1}{2} \left\| \mathbf{J} - \left( \mathbf{A} + \frac{\mathbf{H}}{\rho} \right) \right\|_{\text{F}}^2 \right\}. \tag{16}$$

为解决上述加权张量核范数最小化问题, 引入以下定理.

**定理 1(加权张量核范数最小化问题的求解)**<sup>[26]</sup> 对于张量  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ,  $l = \min\{n_1, n_2\}$ , 有

$\mathbf{A} = \mathbf{U} \times \mathbf{S} \times \mathbf{V}^T$ . 对于模型  $\arg\min_{\mathbf{X}} \frac{1}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\|_{\text{F}}^2 + \tau \|\mathbf{J}\|_{\omega, \#}$ , 该模型的最优解为  $\mathbf{X}^* = \Gamma_{\tau \times \omega}(\mathbf{A}) = \mathbf{U} \times \text{ifft}(\mathbf{P}_{\tau \times \omega}(\bar{\mathbf{A}})) \times \mathbf{V}^T$ , 其中  $\bar{\mathbf{A}} = \text{fft}(\mathbf{A}, [ \quad ], 3)$ ,  $\mathbf{P}_{\tau \times \omega}(\bar{\mathbf{A}})$  是一个张量,  $\mathbf{P}_{\tau \times \omega}(\bar{\mathbf{A}}^{(i)})$  表示  $\mathbf{P}_{\tau \times \omega}(\bar{\mathbf{A}})$  的第  $i$  个前向切片.

根据定理 1, 可得优化问题(16)的解为

$$\mathbf{J} = \Gamma_{(\gamma/\rho) \times \omega} \left( \mathbf{A} + \frac{1}{\rho} \mathbf{H} \right). \tag{17}$$

3) 更新  $\mathbf{F}$ .

当固定  $\mathbf{A}^{(i)}, \mathbf{J}, \mathbf{Q}^{(i)}, \mu_i$  时, 可通过如下子问题求解变量  $\mathbf{F}$ :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{F}} \sum_{i=1}^m \mu_i \|\mathbf{A}^{(i)} - \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(i)})^T\|_{\text{F}}^2, \\ \text{s. t. } \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{F} \geq 0. \end{aligned} \tag{18}$$

在求解问题(18)时, 先考虑具有正交约束模型的优化, 再考虑非负约束, 则有

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{F}} \sum_{i=1}^m \mu_i \|\mathbf{A}^{(i)} - \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(i)})^T\|_{\text{F}}^2, \\ \text{s. t. } \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \min_{\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}} \sum_{i=1}^m \mu_i \text{tr}((\mathbf{A}^{(i)} - \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(i)})^T)^T (\mathbf{A}^{(i)} - \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(i)})^T)) \Leftrightarrow \\ \max_{\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}} \sum_{i=1}^m \mu_i \text{tr}(\mathbf{F}(\mathbf{Q}^{(i)})^T (\mathbf{A}^{(i)})^T) \Leftrightarrow \max_{\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I}} \text{tr} \left( \sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{A}^{(i)} \mathbf{Q}^{(i)} \mathbf{F}^T \right). \end{aligned} \tag{19}$$

令  $\mathbf{K} = \sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{A}^{(i)} \mathbf{Q}^{(i)}$ , 则  $\mathbf{F}$  可由矩阵  $\mathbf{K}$  进行奇异值分解得到. 令  $\text{SVD}(\mathbf{K}) = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^T$ , 则优化问题(19)的解为  $\mathbf{F} = \mathbf{U} \mathbf{V}^T$ . 考虑到  $\mathbf{F}$  的非负性, 最终  $\mathbf{F}$  的解为

$$\mathbf{F} = \max\{0, \mathbf{U} \mathbf{V}^T\}. \tag{20}$$

4) 更新  $\mathbf{Q}^{(i)}$ .

固定变量  $\mathbf{A}^{(i)}, \mathbf{J}, \mathbf{F}, \mu_i$ , 由于变量  $\mathbf{Q}^{(i)}$  对每个视图是相互独立的, 所以只需单独考虑每个视图以解决变量  $\mathbf{Q}^{(i)}$  的优化问题, 忽略无关变量, 则式(9)可转化为

$$\min_{\mathbf{Q}^{(i)}} \|\mathbf{A}^{(i)} - \mathbf{F}\mathbf{Q}^{(i)}\|_{\mathbf{F}}^2. \quad (21)$$

问题(21)是一个无约束优化问题, 对其关于变量  $\mathbf{Q}^{(i)}$  求偏导, 并令偏导为 0, 则有

$$-2(\mathbf{A}^{(i)})^T \mathbf{F} + 2\mathbf{Q}^{(i)} \mathbf{F}^T \mathbf{F} = 0. \quad (22)$$

由式(22)可得  $\mathbf{Q}^{(i)}$  的解为

$$\mathbf{Q}^{(i)} = (\mathbf{A}^{(i)})^T \mathbf{F}(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1}. \quad (23)$$

5) 更新  $\mu_i$ .

固定其他变量, 直接通过式(7)计算权重因子  $\mu_i$ .

6) 更新  $\mathbf{H}$  和  $\rho$ .

Lagrange 乘子  $\mathbf{H}$  和惩罚因子  $\rho$  由下式进行更新

$$\mathbf{H} = \mathbf{H} + \rho(\mathbf{A} - \mathbf{J}), \quad (24)$$

$$\rho = \sigma\rho, \quad (25)$$

其中  $\sigma > 1$  用于提高收敛速度.

### 2.3 时间复杂度分析

**算法 1** 求解问题(9).

输入: 相似矩阵  $\{\mathbf{S}^{(1)}, \mathbf{S}^{(2)}, \dots, \mathbf{S}^{(m)}\}$ , 一致嵌入矩阵  $\mathbf{F}$  和  $\{\mathbf{Q}^{(1)}, \mathbf{Q}^{(2)}, \dots, \mathbf{Q}^{(m)}\}$ , 参数  $\alpha, \beta$ , 平衡参数  $\gamma$ , 权向量  $\omega$ , 类数  $c$ ;

输出: 聚类标签  $l_i = \operatorname{argmax}_{1 \leq j \leq c} (\mathbf{F}_{ij})$ ;

步骤 1) 初始化:  $\mathbf{J} = \mathbf{H} = \mathbf{0}$ , 各视图权重  $\mu_i = \frac{1}{m}$ ,  $\rho = 0.1$ ,  $\sigma = 2$ ;

步骤 2) 循环

步骤 3) 利用式(14)和式(15)更新  $\mathbf{A}^{(i)}$ ;

步骤 4) 利用式(17)更新  $\mathbf{J}$ ;

步骤 5) 利用式(20)更新  $\mathbf{F}$ ;

步骤 6) 利用式(23)更新  $\mathbf{Q}^{(i)}$ ;

步骤 7) 利用式(7)更新权重因子  $\mu_i$ ;

步骤 8) 利用式(24)更新 Lagrange 乘子  $\mathbf{H}$ ;

步骤 9) 利用式(25)更新  $\rho$ ;

步骤 10) 直至收敛.

算法 1 描述了 LRTCD 算法的优化过程. 本文采用交替方向乘子法对目标函数(6)进行求解, 引入 Lagrange 乘子和惩罚参数将式(6)转化为式(9), 再将式(9)分解为多个子问题进行计算后, 每个子问题的时间复杂度如下: 式(14)和式(15)用于更新  $\mathbf{A}^{(i)}$ , 时间复杂度为  $O(m^2 n^2)$ ; 式(17)用于更新  $\mathbf{J}$ , 时间复杂度为  $O(2n^2 m \log(n))$ ; 式(20)用于更新  $\mathbf{F}$ , 这主要来源于矩阵  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times c}$  的奇异值分解, 时间复杂度为  $O(nc^2)$ ; 利用式(23)更新  $\mathbf{Q}^{(i)}$ , 时间负担主要是式(23)的矩阵乘法, 时间复杂度为  $O(n^2 c)$ ; 更新权重因子  $\mu_i$  的时间复杂度为  $O(mn^2)$ . 因此, 算法 1 的时间复杂度为  $O(t(m^2 n^2 + 2n^2 m \log(n) + nc^2 + n^2 c + mn^2))$ , 其中  $t, n, m$  和  $c$  分别表示迭代次数、样本数、视图数和聚类数.

## 3 实验与结果分析

### 3.1 数据集

本文选取 6 个真实数据集进行实验, 各数据集的信息列于表 1, 其中  $d_i$  表示第  $i$  个视图的特征维度. 数据集 100leaves 包含来自 100 种植物的 1 600 个数据样本, 该数据集有 3 个视图. 数据集 Yale 包含从 15 个个体中提取的 165 个样本, 共 3 个视图. 数据集 ORL 包含 40 个对象的 400 张人脸图像, 是在不同的光线、时间、面部表情和面部描述下对不同对象拍摄的面部图像, 共 3 个特征视图. 数据集

UCI 由 2 000 个属于 10 个数字的手写数字图像组成, 每个数字包含 200 个样本, 本文实验中, 选择 3 个特征视图. 数据集 MSRCv1 包含来自 7 个类的 210 张图像, 共 5 个视图. 数据集 Caltech101 包含了 101 个类别, 而数据集 Caltech101-7 是由其中 7 个类别构成的, 并包含 1 474 个样本和 6 个视图.

表 1 多视图数据集信息

Table 1 Information of multi-view datasets

数据集	样本数/个	视图数/个	聚类数/个	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$d_6$
100leaves	1 600	3	100	64	64	64			
Yale	165	3	15	4 096	3 304	6 750			
ORL	400	3	40	4 096	3 304	6 750			
UCI	2 000	3	10	240	76	6			
MSRCv1	210	5	7	24	576	512	256	254	
Caltech101-7	1 474	6	7	48	40	254	1 984	512	928

### 3.2 对比方法

为评估本文算法的性能, 将本文算法与下列多视图聚类算法进行比较.

1) 经典的谱聚类算法(spectral clustering, SC)<sup>[6]</sup>. 本文在每个视图上执行该方法, 分别用 SC1, SC2, SC3 等表示在每个视图上运行该算法的结果, 其中 SC1 表示在第一个视图上运行 SC 算法, 以此类推.

2) 多样性诱导的多视图子空间聚类(diversity-induced multi-view subspace clustering, DiMSC)<sup>[27]</sup>. 其利用 Hilbert-Schmidt 独立准则(HSIC)探索多视图特征之间的互补信息, 这种增强的互补性减少了多视图表示之间的冗余.

3) 基于多图融合的多视图谱聚类算法(multi-graph fusion for multi-view spectral clustering, GFSC)<sup>[28]</sup>. 其同时执行图融合和谱聚类, 融合图近似于每个单独视图的原始图, 但保持明确的聚类结构.

4) 基于自适应加权 Procrustes 的多视图聚类算法(adaptively weighted procrustes, AWP)<sup>[12]</sup>. 其对各视图的聚类能力进行加权, 并通过谱旋转从多个谱嵌入中学习一致的指示矩阵.

5) 一致与特定视图的多视图子空间聚类(consistent and specific multi-view subspace clustering, CSMSC)<sup>[29]</sup>. 其将共享信息和特定于视图的信息分别编码为一致表示矩阵和特定视图的表示矩阵, 从而进行谱聚类.

6) 自适应稀疏隶属度和权重分配的多视图聚类算法(multi-view clustering with adaptive sparse memberships and weight allocation, MVASM)<sup>[7]</sup>. 该算法引入一个稀疏度隶属矩阵表示每个视图上的聚类, 从而保持了不同视图上底层聚类模式的一致性.

7) 基于图学习的多视图聚类(graph learning for multi-view clustering, MVGL)<sup>[8]</sup>. 其通过对相似图矩阵进行自动加权策略学习统一的图, 并利用 Laplace 秩约束, 从而直接获得聚类结果.

8) 一致性和多样性的多视图聚类算法(consistent and divergent multi-view graph clustering, CDMGC)<sup>[14]</sup>. 其同时考虑多个视图的一致性和多样性, 并对一致性利用 Laplace 秩约束学习具有确定连通分量的融合图.

为保证实验的公平性和有效性, 上述对比方法的参数设置均根据原文提供的参数进行设置, 并重复计算 10 次取平均结果. 实验采用 5 个常用的评价指标对聚类性能进行评估, 包括准确率(ACC)、归一化互信息(NMI)、纯度(Purity)、 $F$ -score 和精确度(Precision), 这些聚类评价指标的值越大表示聚类效果越好.

### 3.3 实验结果

在 6 个数据集上将本文算法与其他聚类算法进行对比, 为保证实验数据的可靠性和公正性, 对所有算法均进行了 10 次实验, 取平均结果. 实验结果分别列于表 2~表 7.

表 2 不同算法在数据集 100leaves 上的聚类性能比较

Table 2 Comparison of clustering performance of different algorithms on 100leaves dataset

算法	准确率	归一化互信息	纯度	$F$ -score	精确度
SC1	0.628 9	0.809 5	0.665 4	0.468 0	0.388 0
SC2	0.446 3	0.714 5	0.488 1	0.310 7	0.271 2
SC3	0.519 9	0.728 7	0.558 1	0.331 6	0.271 8
DiMSC	0.640 0	0.815 3	0.667 6	0.533 1	0.500 0
GFSC	0.391 3	0.703 4	0.790 1	0.339 7	0.704 7
AWP	0.830 6	0.917 0	0.841 9	0.773 8	0.720 9
CSMSC	0.746 0	0.876 1	0.771 6	0.663 3	0.628 0
MVASM	0.066 1	0.246 9	0.068 1	0.046 8	0.024 3
MVGL	0.810 6	0.891 2	0.833 1	0.521 7	0.379 5
CDMGC	0.907 5	0.957 4	0.916 3	0.856 2	0.804 2
LRTCD	0.940 0	0.965 4	0.948 1	0.905 5	0.896 0

表 3 不同算法在数据集 Yale 上的聚类性能比较

Table 3 Comparison of clustering performance of different algorithms on Yale dataset

算法	准确率	归一化互信息	纯度	$F$ -score	精确度
SC1	0.592 1	0.605 0	0.601 8	0.401 6	0.361 4
SC2	0.620 6	0.635 3	0.626 7	0.417 0	0.361 8
SC3	0.618 8	0.654 5	0.637 6	0.468 5	0.415 1
DiMSC	0.647 3	0.676 7	0.650 3	0.515 4	0.499 7
GFSC	0.512 7	0.554 7	0.635 8	0.362 7	0.443 3
AWP	0.684 8	0.679 0	0.684 8	0.511 4	0.463 1
CSMSC	0.724 8	0.741 0	0.726 1	0.591 0	0.568 5
MVASM	0.477 0	0.548 3	0.484 8	0.343 2	0.308 1
MVGL	0.612 1	0.658 3	0.648 5	0.417 6	0.373 9
CDMGC	0.653 9	0.681 5	0.663 6	0.469 8	0.415 5
LRTCD	0.836 4	0.790 3	0.836 4	0.665 9	0.633 5

表 4 不同算法在数据集 ORL 上的聚类性能比较

Table 4 Comparison of clustering performance of different algorithms on ORL dataset

算法	准确率	归一化互信息	纯度	$F$ -score	精确度
SC1	0.601 0	0.775 8	0.659 8	0.458 3	0.374 5
SC2	0.722 8	0.877 4	0.783 3	0.620 9	0.513 7
SC3	0.635 0	0.799 7	0.690 3	0.482 8	0.387 1
DiMSC	0.797 5	0.897 4	0.823 3	0.736 0	0.693 7
GFSC	0.558 0	0.722 4	0.716 5	0.386 4	0.602 7
AWP	0.707 5	0.842 2	0.715 0	0.622 0	0.545 2
CSMSC	0.808 6	0.915 5	0.841 5	0.765 2	0.702 8
MVASM	0.476 8	0.665 1	0.524 5	0.336 9	0.283 0
MVGL	0.677 5	0.814 8	0.747 5	0.383 6	0.253 1
CDMGC	0.690 0	0.841 1	0.760 0	0.474 6	0.334 9
LRTCD	0.830 0	0.909 6	0.865 0	0.758 5	0.704 7

表 5 不同算法在数据集 UCI 上的聚类性能比较

Table 5 Comparison of clustering performance of different algorithms on UCI dataset

算法	准确率	归一化互信息	纯度	$F$ -score	精确度
SC1	0.771 1	0.776 5	0.787 0	0.718 7	0.670 2
SC2	0.650 8	0.688 0	0.696 3	0.602 0	0.543 1
SC3	0.448 4	0.474 1	0.483 8	0.359 1	0.346 4
DiMSC	0.387 1	0.348 3	0.415 5	0.273 1	0.257 5

续表 5  
Continued to table 5

算法	准确率	归一化互信息	纯度	F-score	精确度
GFSC	0.700 4	0.666 8	0.754 0	0.597 7	0.630 3
AWP	0.784 0	0.772 8	0.784 0	0.735 4	0.676 2
CSMSC	0.787 5	0.770 9	0.813 5	0.737 9	0.720 4
MVASM	0.501 1	0.582 4	0.554 0	0.491 4	0.464 3
MVGL	0.790 5	0.769 2	0.790 5	0.719 2	0.673 2
CDMGC	0.629 9	0.683 3	0.667 3	0.578 4	0.485 2
LRTCD	0.796 5	0.779 0	0.811 0	0.730 5	0.710 4

表 6 不同算法在数据集 MSRCv1 上的聚类性能比较

Table 6 Comparison of clustering performance of different algorithms on MSRCv1 dataset

算法	准确率	归一化互信息	纯度	F-score	精确度
SC1	0.365 2	0.272 3	0.411 9	0.280 0	0.252 4
SC2	0.656 7	0.520 4	0.671 0	0.512 5	0.499 4
SC3	0.629 5	0.554 0	0.663 3	0.522 5	0.494 8
SC4	0.529 0	0.466 9	0.556 7	0.459 1	0.383 9
SC5	0.482 9	0.366 3	0.524 3	0.371 6	0.330 4
DiMSC	0.711 0	0.622 9	0.738 6	0.606 8	0.597 8
GFSC	0.308 1	0.167 0	0.577 1	0.270 3	0.449 6
AWP	0.638 1	0.603 0	0.695 2	0.594 1	0.518 6
CSMSC	0.819 0	0.730 3	0.819 0	0.716 8	0.703 8
MVASM	0.458 6	0.356 9	0.463 8	0.390 6	0.292 8
MVGL	0.747 6	0.721 4	0.776 2	0.673 6	0.586 0
CDMGC	0.742 9	0.681 0	0.752 4	0.629 5	0.549 9
LRTCD	0.828 6	0.734 2	0.828 6	0.721 4	0.702 3

表 7 不同算法在数据集 Caltech101-7 上的聚类性能比较

Table 7 Comparison of clustering performance of different algorithms on Caltech101-7 dataset

算法	准确率	归一化互信息	纯度	F-score	精确度
SC1	0.354 9	0.153 0	0.681 3	0.340 6	0.485 2
SC2	0.397 4	0.274 6	0.780 3	0.412 1	0.640 3
SC3	0.518 5	0.348 0	0.798 2	0.484 5	0.691 9
SC4	0.622 3	0.512 1	0.853 0	0.603 9	0.686 0
SC5	0.662 2	0.505 1	0.862 9	0.632 8	0.736 5
SC6	0.541 7	0.430 6	0.826 7	0.540 6	0.730 3
DiMSC	0.451 7	0.335 4	0.700 2	0.433 3	0.702 8
GFSC	0.351 0	0.118 9	0.452 3	0.355 9	0.311 5
AWP	0.660 8	0.541 5	0.882 0	0.671 4	0.819 1
CSMSC	0.631 7	0.547 6	0.880 4	0.637 3	0.892 8
MVASM	0.535 8	0.428 5	0.839 1	0.569 9	0.785 2
MVGL	0.570 6	0.531 7	0.870 4	0.603 7	0.872 5
CDMGC	0.550 7	0.272 6	0.647 2	0.532 9	0.455 8
LRTCD	0.666 9	0.590 9	0.877 9	0.698 1	0.907 5

由表 2~表 7 可见:

1) 在数据集 100leaves 和 Yale 上, 本文算法的 5 个指标都最高. 在数据集 100leaves 上, 与性能次优的 CDMGC 算法相比, 本文算法分别在准确率和纯度上约提高 3 个百分点, 在 F-score 上提高约 5 个百分点, 在精确度上约提高 9 个百分点; 在数据集 Yale 上与性能次优的 CSMSC 算法相比, 本文算法分别在准确率和纯度上约提高 11 个百分点, 在 F-score 和精确度上约提高 7 个百分点, 在归一化互信息上约提高 5 个百分点.

2) 在数据集 ORL 和 UCI 上, 尽管本文算法仅在部分指标上实现了最高性能, 但在其他指标上都与最好的算法差距很小. 如在数据集 ORL 上与 CSMSC 算法相比, 在准确率和纯度指标上分别提高了约 2.3 个百分点, 而在其他指标上都与 CSMSC 算法差距很小.

3) 对于数据集 MSRCv1, 本文算法在准确率、归一化互信息、纯度和  $F$ -score 上的性能最高, 在精确度上的性能次优; 在数据集 Caltech101-7 上, 除纯度外, 本文算法在其他 4 个指标上都取得了最好的聚类结果, 从而证明了本文算法的优越性.

4) 在上述 6 个数据集上, 本文算法比经典的单视图聚类算法有明显的优势, 从而证明了多视图聚类的可行性. 同时, 通过对各视图进行谱聚类发现, 不同视图的聚类性能存在差异, 因此在进行多视图聚类时, 需要为不同视图分配不同的权重, 而本文采用的自加权策略能有效解决权重分配的问题, 从而改善多视图聚类的性能.

本文算法在考虑视图差异性的同时关注了视图间信息的高阶相关性, 使学习到的各一致性相似矩阵具有更好的结构, 而且一致非负嵌入矩阵的学习也避免了后续聚类过程导致的信息损失问题, 因此在 6 个数据集上都有较好的聚类性能.

### 3.4 参数分析

下面以数据集 Yale 和 MSRCv1 为例验证参数的敏感性. 本文算法共涉及  $\alpha, \beta, \gamma$  及权向量  $\omega$  4 个参数. 考虑到矩阵奇异值的先验知识, 本文根据文献[26]设置参数  $\omega$ . 对于参数  $\alpha$  和  $\beta$ , 均在  $\{10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5\}$  中选取. 图 2 为在数据集 Yale 和 MSRCv1 上参数  $\alpha$  和  $\beta$  的敏感性分析结果. 由图 2 可见, 本文算法较稳定, 表明本文算法对参数  $\alpha$  和  $\beta$  是鲁棒的.

对于平衡参数  $\gamma$ , 在  $\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100\}$  中选取. 将参数  $\alpha$  和  $\beta$  设为最优时, 分析平衡参数  $\gamma$ , 结果如图 3 所示. 由图 3 可见, 聚类结果在数据集 MSRCv1 上较平稳, 在数据集 Yale 上存在一定的波动, 说明该参数比较敏感, 但在一定范围内趋于稳定, 说明本文模型对参数  $\gamma$  是鲁棒的.

### 3.5 收敛性分析

下面在数据集 Yale 和 MSRCv1 上验证本文算法的收敛性, 结果如图 4 所示. 图 4 记录了关于误差变量  $\sum_{i=1}^m \|A^{(i)} - J^{(i)}\|_{\infty}$  每次迭代的值. 由图 4 可见, 变量误差值约在前 15 次迭代中急剧下降, 之后基本保持稳定, 这表明本文算法能在几次迭代后即达到收敛, 即本文算法收敛速度较快.

### 3.6 可视化分析

下面通过 t-SNE(t-distributed stochastic neighbor embedding)算法<sup>[30]</sup>对聚类结果进行可视化, 并依次可视化 MVASM 算法<sup>[7]</sup>、MVGL 算法<sup>[8]</sup>、FAMVC(a similarity matrix low-rank approximation and inconsistency separation fusion approach for multi-view clustering)算法<sup>[18]</sup>以及本文算法在数据集 MSRCv1 上的聚类结果, 结果如图 5 所示. 由图 5 可见: 与 MVASM 算法相比, 本文算法得到的聚类结果可视化后边界更清晰; 与 MVGL 算法相比, 对于较难分的类, 例如图中红色和橙色两类, 本文算法的聚类结果较好; 与 FAMVC 算法相比, 对于粉色和橙色两类, 本文算法的结果较好, 并且聚类结构更紧凑. 因此, 本文算法总体上有更好的聚类能力.

### 3.7 运行时间

下面在数据集 Yale, ORL 和 UCI 上对比不同算法的运行时间, 结果列于表 8.

表 8 在 3 个数据集上不同算法的运行时间比较

Table 8 Running time comparison of different algorithms on three datasets

数据集	DiMSC	GFSC	AWP	CSMSC	MVASM	MVGL	CDMGC	LRTCD
Yale	2.48	4.52	0.16	17.58	1.77	0.85	0.58	1.19
ORL	13.40	18.31	0.70	78.64	12.91	3.91	2.83	10.81
UCI	513.26	689.49	1.31	611.06	1.63	139.62	8.11	272.16

由表 8 可见: 在数据集 Yale 和 ORL 上, CSMSC 算法的执行速度最慢; 在数据集 UCI 上, GFSC

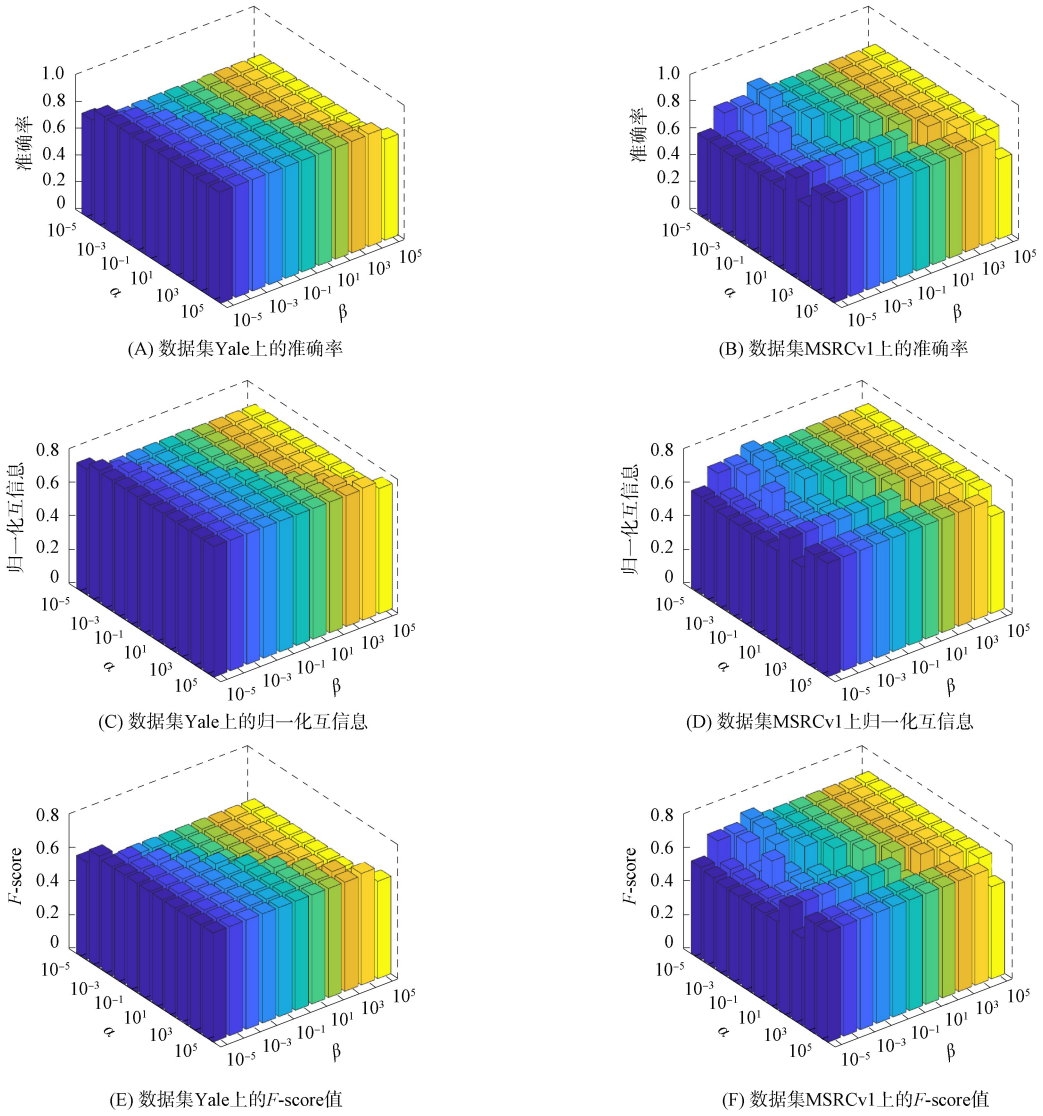


图 2 在数据集 Yale 和 MSRCv1 上参数  $\alpha$  和  $\beta$  的敏感性分析

Fig. 2 Sensitivity analysis of parameters  $\alpha$  and  $\beta$  on Yale and MSRCv1 datasets

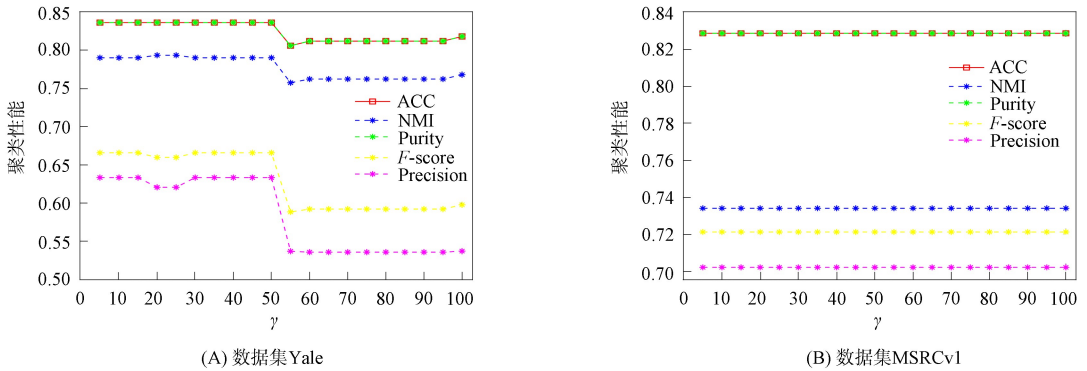


图 3 在数据集 Yale 和 MSRCv1 上参数  $\gamma$  的敏感性分析

Fig. 3 Sensitivity analysis of parameter  $\gamma$  on Yale and MSRCv1 datasets

算法速度最慢;此外,在3个数据集上,AWP算法在8种多视图聚类方法中的运行效率最高.尽管CSMSC算法在聚类性能上与本文算法相近,但其运行时间却比本文算法约慢2/3,这主要是因为CSMSC算法在聚类过程中需要执行特征分解,导致了较高的计算开销.虽然本文算法比AWP,

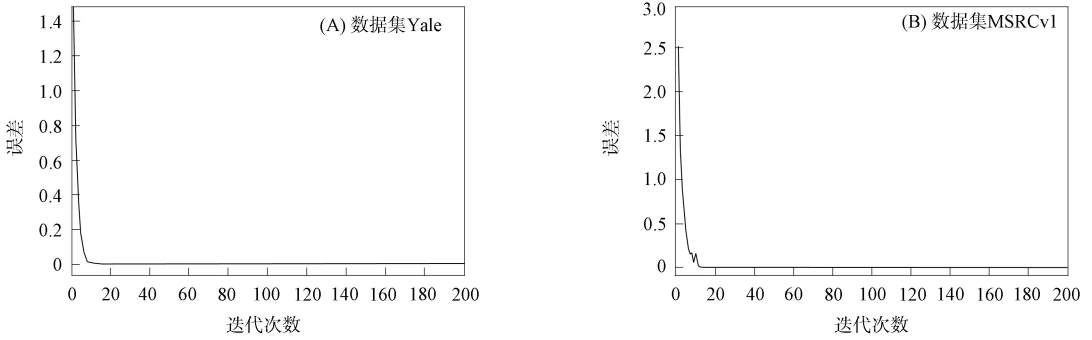


图 4 LRTCD 算法在数据集 Yale 和 MSRCv1 上的收敛曲线

Fig. 4 Convergence curves of LRTCD algorithm on Yale and MSRCv1 datasets

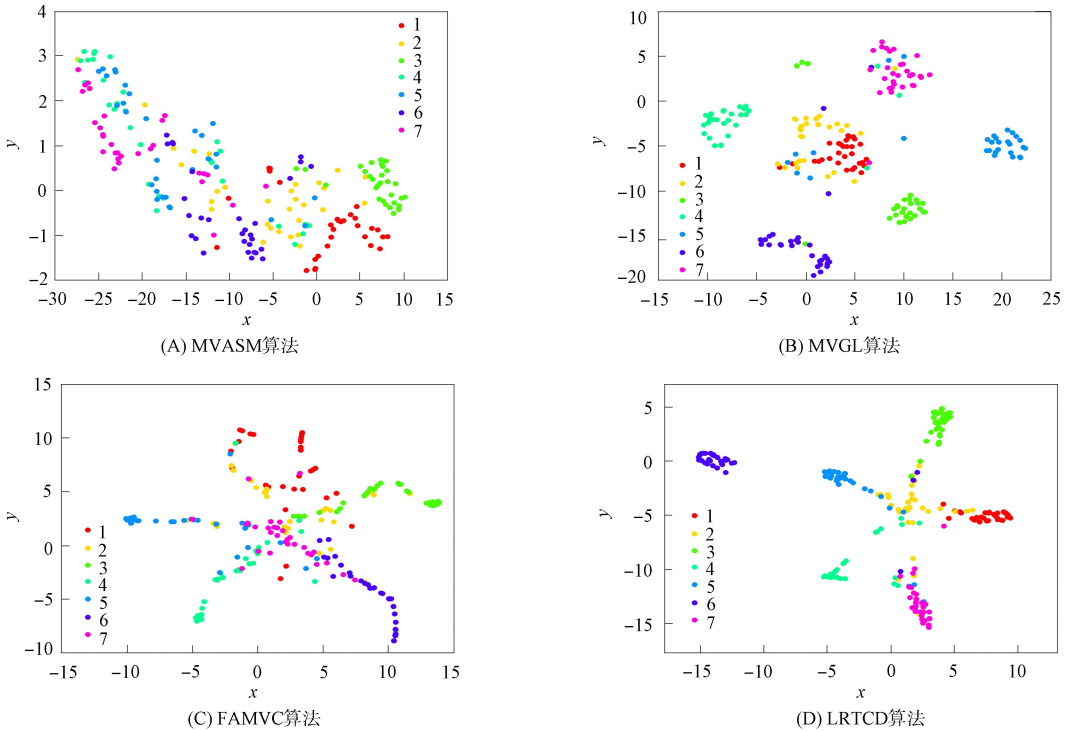


图 5 数据集 MSRCv1 聚类结果的 t-SNE 可视化

Fig. 5 t-SNE visualization of clustering results on MSRCv1 dataset

MVGL 和 CDMGC 算法慢,但本文算法在聚类性能方面取得了显著改善,表明了本文算法的有效性.

综上所述,针对如何利用多视图数据中的隐含信息以及避免后续处理过程中带来的聚类性能次优问题,本文提出了一种基于一致性和差异性的低秩张量多视图聚类算法,于已有算法<sup>[31-35]</sup>不同,该算法同时考虑视图的一致性和差异性信息,对一致性信息使用张量构造的方法探索视图间信息的高阶相关性,并使用基于加权 t-SVD 的张量核范数保持低秩性质,从而得到了更高质量的相似矩阵.该算法通过一致非负嵌入矩阵的学习直接获得聚类结果,避免了后处理导致的聚类结果不稳定现象,同时也应用了自适应加权策略学习各视图的权重.此外,本文提供了有效的优化算法,并在 6 个真实数据集上的实验结果证明了本文算法的有效性.

参 考 文 献

[ 1 ] WANG Y X, LIU X W, QI Y F, et al. A Review of Multi-view Clustering Algorithms [C]//Proceedings of the 2023 International Conference on Image Processing, Computer Vision and Machine Learning. Piscataway, NJ: IEEE, 2023: 847-851.

[ 2 ] LI Q S, RAMASAMY S, SINGH P, et al. Gene Clustering and Copy Number Variation in Alkaloid Metabolic

- Pathways of Opium Poppy [J]. *Nature Communications*, 2020, 11(1): 2-11.
- [ 3 ] HOU C P, NIE F P, TAO H, et al. Multi-view Unsupervised Feature Selection with Adaptive Similarity and View Weight [J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2017, 29(9): 1998-2011.
- [ 4 ] HUANG L, WANG C D, CHAO H Y, et al. MVStream: Multi-view Data Stream Clustering [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(9): 3482-3496.
- [ 5 ] CHEN Y Y, WANG S Q, PENG C, et al. Generalized Non-convex Low-Rank Tensor Approximation for Multi-view Subspace Clustering [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2021, 30: 4022-4035.
- [ 6 ] LUXBURG U V. A Tutorial on Spectral Clustering [J]. *Statistics and Computing*, 2007, 17(4): 395-416.
- [ 7 ] HAN J W, XU J L, NIE F P, et al. Multi-view  $K$ -Means Clustering with Adaptive Sparse Memberships and Weight Allocation [J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2022, 34(2): 816-827.
- [ 8 ] ZHAN K, ZHANG C Q, GUAN J P, et al. Graph Learning for Multiview Clustering [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 48(10): 2887-2895.
- [ 9 ] HE Y F, YUSOF U K. Self-weighted Graph-Based Framework for Multi-view Clustering [J]. *IEEE Access*, 2023, 11: 30197-30207.
- [10] WANG H B, JIANG G Q, PENG J J, et al. Towards Adaptive Consensus Graph: Multi-view Clustering via Graph Collaboration [J]. *IEEE Transactions on Multimedia*, 2022, 25: 6629-6641.
- [11] ZHAN K, NIE F P, WANG J, et al. Multiview Consensus Graph Clustering [J]. *IEEE Transaction on Image Processing*, 2019, 28(3): 1261-1270.
- [12] NIE F P, TIAN L, LI X L. Multiview Clustering via Adaptively Weighted Procrustes [C]//*Proceedings of the 24th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. New York: ACM, 2018: 2022-2030.
- [13] LIANG Y W, HUANG D, WANG C D, et al. Multi-view Graph Learning by Joint Modeling of Consistency and Inconsistency [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2024, 35(2): 2848-2862.
- [14] HUANG S D, TSANG I W, XU Z L, et al. Measuring Diversity in Graph Learning: A Unified Framework for Structured Multi-view Clustering [J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2022, 34(12): 5869-5883.
- [15] LIU J L, WANG C, GAO J, et al. Multi-view Clustering via Joint Nonnegative Matrix Factorization [C]//*Proceedings of the 2013 SIAM International Conference on Data Mining*. Austin, Texas, USA: Curran Associates, Inc., 2013: 252-260.
- [16] LI Z H, HU Z X, NIE F P, et al. Multi-view Clustering Based on Generalized Low Rank Approximation [J]. *Neurocomputing*, 2022, 471: 251-259.
- [17] HU Z X, NIE F P, WANG R, et al. Multi-view Spectral Clustering via Integrating Nonnegative Embedding and Spectral Embedding [J]. *Information Fusion*, 2020, 55: 251-259.
- [18] HE Z Q, WAN S H, ZAPPATORE M, et al. A Similarity Matrix Low-Rank Approximation and Inconsistency Separation Fusion Approach for Multi-view Clustering [J]. *IEEE Transactions on Artificial Intelligence*, 2024, 5(2): 868-881.
- [19] XU H L, ZHANG X D, XIA W, et al. Low-Rank Tensor Constrained Co-regularized Multi-view Spectral Clustering [J]. *Neural Networks*, 2020, 132: 245-252.
- [20] CHEN Y Y, XIAO X L, ZHOU Y C. Jointly Learning Kernel Representation Tensor and Affinity Matrix for Multi-view Clustering [J]. *IEEE Transactions on Multimedia*, 2020, 22(8): 1985-1997.
- [21] GAO Q X, XIA W, WAN Z Z, et al. Tensor-SVD Based Graph Learning for Multi-view Subspace Clustering [C]//*Proceedings of the 34th AAAI Conference on Artificial Intelligence*. Palo Alto: AAAI Press, 2020: 3930-3937.
- [22] KILMER M E, MARTIN C D. Factorization Strategies for Third-Order Tensors [J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2011, 435(3): 641-658.
- [23] KILMER M E, BRAMAN K, HAO N, et al. Third-Order Tensors as Operators on Matrices: A Theoretical and

- Computational Framework with Applications in Imaging [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2013, 34(1): 148-172.
- [24] ZHANG Z M, ELY G, AERON S, et al. Novel Methods for Multilinear Data Completion and De-noising Based on Tensor-SVD [C]//*Proceedings of the 27th IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Piscataway, NJ: IEEE, 2014: 3842-3849.
- [25] WANG H, YANG Y, LIU B, et al. A Study of Graph-Based System for Multi-view Clustering [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2019, 163: 1009-1019.
- [26] CHEN M S, WANG C D, LAI J H. Low-Rank Tensor Based Proximity Learning for Multi-view Clustering [J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2023, 35(5): 5076-5090.
- [27] CAO X C, ZHANG C Q, FU H Z, et al. Diversity-Induced Multi-view Subspace Clustering [C]//*Proceedings of the 28th IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Piscataway, NJ: IEEE, 2015: 586-594.
- [28] KANG Z, SHI G X, HUANG S D, et al. Multi-graph Fusion for Multi-view Spectral Clustering [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2020, 189: 105102-1-105102-9.
- [29] LUO S R, ZHANG C Q, ZHANG W, et al. Consistent and Specific Multi-view Subspace Clustering [C]//*Proceedings of the 32nd AAAI Conference on Artificial Intelligence*. Palo Alto: AAAI Press, 2018: 3730-3737.
- [30] VAN DER MAATEN L, HINTON G. Visualizing Data Using t-SNE [J]. *Machine Learning Research*, 2008, 9(11): 2579-2605.
- [31] 王进, 梁晨, 孙开伟, 等. 基于标签相关性的标签特定特征多标签学习 [J]. *江苏大学学报(自然科学版)*, 2023, 44(5): 554-563. (WANG J, LIANG C, SUN K W, et al. Multi-label Learning with Label-Specific Features via Label Correlations [J]. *Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition)*, 2023, 44(5): 554-563.)
- [32] 耿莉, 王长鹏. 基于多样性的一致谱嵌入学习 [J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2022, 60(5): 1133-1142. (GENG L, WANG C P. Consensus Spectral Embedding Learning Based on Diversity [J]. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, 2022, 60(5): 1133-1142.)
- [33] 王丽娟, 张霖, 尹明, 等. 基于正交基的多视图迁移谱聚类 [J]. *计算机工程*, 2022, 48(10): 37-44. (WANG L J, ZHANG L, YIN M, et al. Orthogonal Basis-Based Multiview Transfer Spectral Clustering [J]. *Computer Engineering*, 2022, 48(10): 37-44.)
- [34] 胡傲然, 陈晓红. 基于多样性与一致性的单步多视图聚类 [J]. *计算机工程*, 2024, 50(5): 51-61. (HU A R, CHEN X H. One-Step Multi-view Clustering Based on Diversity and Consistency [J]. *Computer Engineering*, 2024, 50(5): 51-61.)
- [35] 袁林, 杨小飞, 邢志伟, 等. 潜在表示学习框架下的低冗余多视图聚类算法 [J]. *重庆邮电大学学报(自然科学版)*, 2023, 35(1): 49-59. (YUAN L, YANG X F, XING Z W, et al. Multi-view Clustering Based on Latent Representation Learning and Low Redundancy [J]. *Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition)*, 2023, 35(1): 49-59.)

(责任编辑: 韩 啸)