

一类退化椭圆方程的耗散系数识别问题

张霁澳, 杜润梅

(长春工业大学 数学与统计学院, 长春 130012)

摘要: 首先, 考虑一类退化椭圆方程的耗散系数识别问题, 通过把未知的耗散系数视为控制函数, 把方程的解视为状态变量, 定义目标泛函为状态与测量值的误差与人工正则项的和, 将系数识别问题转化为最优控制问题. 其次, 利用最优控制问题的研究方法研究系数识别问题, 给出最优控制的表达式, 并证明在适当条件下最优控制的唯一性.

关键词: 退化椭圆方程; 系数识别; 最优控制

中图分类号: O175.25 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2024)05-1037-06

Identification Problem of Dissipation Coefficients for a Class of Degenerate Elliptic Equations

ZHANG Ji'ao, DU Runmei

(School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Technology, Changchun 130012, China)

Abstract: Firstly, we considered the identification problem of the dissipation coefficients for a class of degenerate elliptic equations. By treating the unknown dissipation coefficients as control functions, treating the solutions of the equation as state variables, and defining the objective functional as the sum of the error between the state and the measurement values and the artificial regularization term, we transformed the coefficient identification problem into an optimal control problem. Secondly, the coefficient identification problem was studied by using the research method of the optimal control problem. We gave the expression of the optimal control and proved the uniqueness of optimal control under appropriate conditions.

Keywords: degenerate elliptic equation; coefficient identification; optimal control

0 引言

椭圆方程的系数识别问题在物理学、生物学、金融学、工程实践等领域应用广泛, 如减震材料的性能参数识别^[1]和多孔介质的渗透率识别^[2]等. 目前, 关于一致椭圆方程系数识别问题的研究已有很多结果^[3-5]. 退化椭圆型方程可视为描述一个随时间演化的物理过程的退化抛物型方程的稳态方程, 边界退化的椭圆方程可视为在金融学中的 Black-Scholes 方程^[6]和气象学中的 Budyko-Sellers 方程^[7]的稳态方程. 文献[8-9]研究了退化椭圆方程的适定性, 文献[10-11]研究了退化椭圆方程的最优控制问题, 但关于退化椭圆方程的系数识别问题的研究目前文献报道较少.

收稿日期: 2024-03-22.

第一作者简介: 张霁澳(2000—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事偏微分方程的研究, E-mail: 347569721@qq.com. **通信作者简介:** 杜润梅(1985—), 女, 汉族, 博士, 教授, 从事偏微分方程的研究, E-mail: durm_dudu@163.com.

基金项目: 吉林省科技发展计划项目(批准号: 20220101033JC).

考虑一类退化椭圆方程:

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) + c(x)y + \lambda y = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

其中 Ω 是 \mathbb{R}^n 中的一个有界区域, $\partial\Omega \in C^2$, $f \in L^\infty(\Omega)$ 是热源, 常数 $\lambda > 0$, $c \in L^\infty(\Omega)$ 是未知的耗散系数, 热传导系数 $a \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ 且 $a(x) > 0$, $x \in \Omega$. 注意到 $a(x)$ 可能在区域的部分边界为 0, 因此方程(1)是退化椭圆方程. 对于退化椭圆方程, 它的边界条件与一致椭圆方程有很大不同. 根据退化程度, 可以把边界分为非退化部分、弱退化部分和强退化部分. 由于它的弱解在强退化边界部分无迹^[8], 因此只需定义在非退化部分和弱退化部分的边界条件. 定义

$$\Sigma = \{x \in \partial\Omega: a(x) > 0\} \cup \left\{ x \in \partial\Omega: a(x) = 0, \text{ 且存在 } \delta > 0, \text{ 使得 } \int_{\Omega \cap B_r(x)} \frac{1}{a(y)} dy < +\infty \right\},$$

其中 $B_r(x)$ 是以 x 为中心且半径为 r 的邻域. 考虑方程(1)在边界条件

$$y(x) = 0, \quad x \in \Sigma \tag{2}$$

下的问题.

假设经测量已知边值问题(1)-(2)的解在 Ω 中的真实分布为 $y_d(x)$, 本文目标是根据已知信息识别未知函数 c . 将 c 视为控制函数, 设允许控制集合为

$$U_{ad} = \{c \mid c \in L^\infty(\Omega), 0 \leq c \leq \bar{c}\},$$

其中 \bar{c} 是一个正常数. 则该问题可转化为最优控制问题

$$\min J(c) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y - y_d)^2 dx + \frac{k}{2} \int_{\Omega} c^2 dx, \quad c \in U_{ad}, \tag{3}$$

其中 y 是问题(1)-(2)的解, $k > 0$ 是比例因子. 式(3)中第一项反应了问题(1)-(2)的解 y 与测量数据 y_d 的接近程度, 第二项是为避免过拟合而人工添加的正则项. 实际应用中, 可选取 k 充分小, 使得式(3)第一项在目标泛函 $J(c)$ 中的比重较大.

本文考虑更一般的退化椭圆方程

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) + \operatorname{div}(\sqrt{a(x)} \vec{b}(x) y) + \sqrt{a(x)} \vec{d}(x) \nabla y + c(x)y + \lambda y = f(x), \tag{4}$$

其中: \vec{b}, \vec{d} 是 $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ 中的可测函数; $a_{ij} \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 且存在正常数 $M_1 < M_2$, 使得

$$M_1 a(x) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq M_2 a(x) |\xi|^2, \quad a(x) > 0, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad x \in \Omega, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \tag{6}$$

本文研究最优控制问题(3), 其中 y 是问题(4)-(2)的解. 先证明最优控制的存在性, 得到最优控制存在的必要条件, 给出最优控制的表达式, 再证明当 λ 充分大时最优控制的唯一性.

1 最优控制的存在性

先给出退化椭圆方程边值问题(4)-(2)的适定性, 然后证明最优控制问题的存在性. 定义空间 \mathcal{B} 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在范数

$$\|u\|_{\mathcal{B}} = \left(\int_{\Omega} u(x)^2 + a(x) |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad u \in \mathcal{B}$$

下的闭包.

定义 1 如果对任意的 $\varphi \in \mathcal{B}$, 有如下积分等式成立:

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \sqrt{a} y \vec{b} \cdot \nabla \varphi + \sqrt{a} \vec{d} \cdot \nabla y \varphi + c y \varphi + \lambda y \varphi \right) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx,$$

则称 $y \in \mathcal{B}$ 是问题(4)-(2)的弱解.

类似文献[12]中引理 2.1 的证明, 可得问题(4)-(2)的适定性如下.

命题 1 对任意的 $f \in L^\infty(\Omega)$, 问题(4)-(2)存在唯一弱解 $y \in L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{B}$. 进一步, 存在正常数

M, 使得

$$\|y\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|a|\nabla y|^2\|_{L^1(\Omega)} \leq M \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

定义算子 S: $U_{ad} \rightarrow \mathcal{B}$ 为 $S: c \rightarrow y$, 其中 y 是问题(4)-(2)的弱解.

定理 1 存在一个控制 $c^* \in U_{ad}$, 使得 $J(c^*) = \inf_{c \in U_{ad}} J(c)$.

证明: 对任意的 $c \in U_{ad}$, 因为 $J(c) \geq 0$, 所以 $J(c)$ 有下确界. 故可选取一个极小化序列 $\{c_n\}$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(c_n) = \inf_{c \in U_{ad}} J(c).$$

因为 $\{c_n\} \subset U_{ad}$ 是一致有界的, 故在 $L^\infty(\Omega)$ 中存在 $\{c_n\}$ 的子列(仍记为其本身)和一个函数 $c^* \in U_{ad}$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $c_n \rightarrow c^*$ 弱 * 收敛于 $L^\infty(\Omega)$.

对充分小的 $\tau > 0$, 定义 $\Omega_\tau = \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) > \tau\}$. 记 $y^{(n)} = S(c_n)$, 由命题 1 可知, $\|y\|_{\mathcal{B}}$ 和 $\|y\|_{H^1(\Omega_\tau)}$ 有界. 于是存在 $\{y^{(n)}\}$ 的子序列(仍记为其本身)和一个函数 $y^* \in L^2(\Omega) \cap \mathcal{B}$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $y^{(n)} \rightarrow y^*$ 弱收敛于 \mathcal{B} , $y^{(n)} \rightarrow y^*$ 强收敛于 $L^2(\Omega_\tau)$. 注意到

$$\int_\Omega (y^{(n)} - y^*)^2 dx = \int_{\Omega \setminus \Omega_\tau} (y^{(n)} - y^*)^2 dx + \int_{\Omega_\tau} (y^{(n)} - y^*)^2 dx.$$

先令 $n \rightarrow \infty$, 再令 $\tau \rightarrow 0^+$, 则可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega (y^{(n)} - y^*)^2 dx = 0$, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, $y^{(n)} \rightarrow y^*$ 强收敛于 $L^2(\Omega)$.

由定义 1 可知, 对任意的 $\varphi \in \mathcal{B}$, 有

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial y^{(n)}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \sqrt{a} y^{(n)} \vec{b} \cdot \nabla \varphi + \sqrt{a} \vec{d} \cdot \nabla y^{(n)} \varphi + c_n y^{(n)} \varphi + \lambda y^{(n)} \varphi \right) dx = \int_\Omega f \varphi dx.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由 $\{c_n\}$ 和 $\{y^{(n)}\}$ 的收敛性可知,

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial y^*}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \sqrt{a} y^* \vec{b} \cdot \nabla \varphi + \sqrt{a} \vec{d} \cdot \nabla y^* \varphi + c^* y^* \varphi + \lambda y^* \varphi \right) dx = \int_\Omega f \varphi dx.$$

因此 $y^* = S(c^*)$.

由于在 $L^2(\Omega)$ 空间中范数有弱下半连续性, 故

$$J(c^*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(c_n) = \inf_{c \in U_{ad}} J(c).$$

因此 $J(c^*) = \inf_{c \in U_{ad}} J(c)$. 证毕.

2 最优控制存在的必要条件

定理 2 假设 c^* 是 $\min_{c \in U_{ad}} J(c)$ 的最优控制, $y^* = S(c^*)$, 则有

$$c^* = \min \left\{ 0, \max \left\{ \bar{c}, \frac{1}{k} p y^* \right\} \right\}, \tag{7}$$

其中 p 是如下问题的弱解:

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) - \text{div}(\sqrt{a} \vec{d} p) - \sqrt{a} \vec{b} \cdot \nabla p + c^* p + \lambda p &= y^* - y_d, \quad x \in \Omega, \\ p|_{\Sigma} &= 0, \quad x \in \Sigma. \end{aligned}$$

证明: 对任意的 $c \in U_{ad}$, 记 $\bar{c} = c - c^*$. 对 $0 \leq \epsilon \leq 1$, 记 $c^\epsilon = c^* + \epsilon \bar{c}$, $y^\epsilon = S(c^\epsilon)$. 显然, $y^\epsilon - y^*$ 是问题(4)-(2)当 $c = c^*$, $f = -y^\epsilon \epsilon \bar{c}$ 时的解. 由命题 1, 有 $\|y^\epsilon - y^*\|_{L^2(\Omega)} \leq C\epsilon$. 因此

$$y^\epsilon \rightarrow y^* \text{ 强收敛于 } L^2(\Omega), \quad \epsilon \rightarrow 0. \tag{8}$$

定义 $\omega = \frac{y^\epsilon - y^*}{\epsilon}$, 则 ω 是问题(4)-(2)当 $c = c^*$, $f = -y^\epsilon \bar{c}$ 时的解. 经计算可得

$$\frac{J(c^* + \epsilon \bar{c}) - J(c^*)}{\epsilon} = \int_\Omega \omega \cdot \frac{(y^\epsilon + y^*)}{2} dx - \int_\Omega \omega \cdot y_d dx + \frac{k}{2} \int_\Omega (2c^* \bar{c} + \epsilon \bar{c}^2) dx.$$

令 $\epsilon \rightarrow 0$, 有

$$0 \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(c^* + \epsilon \bar{c}) - J(c^*)}{\epsilon} = \int_\Omega \omega (y^* - y_d) dx + k \int_\Omega c^* \bar{c} dx. \tag{9}$$

由定义 1 知, 对任意的 $v \in \mathcal{B}$, 有

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} - \sqrt{a} \vec{\omega b} \cdot \nabla v + \sqrt{a} \vec{d} \cdot \nabla \omega v + c^* \omega v + \lambda \omega v \right) dx = - \int_{\Omega} y^\epsilon \bar{c} v dx, \tag{10}$$

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} - \sqrt{a} \vec{v b} \cdot \nabla p + \sqrt{a} \vec{d} \cdot \nabla v p + c^* v p + \lambda v p \right) dx = \int_{\Omega} (y^* - y_d) v dx. \tag{11}$$

在式(10)中取 $v = p$, 有

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} - \sqrt{a} \vec{\omega b} \cdot \nabla p + \sqrt{a} \vec{d} \cdot \nabla \omega p + c^* \omega p + \lambda \omega p \right) dx = - \int_{\Omega} y^\epsilon \bar{c} p dx. \tag{12}$$

在式(11)中取 $v = \omega$, 有

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} - \sqrt{a} \vec{\omega b} \cdot \nabla p + \sqrt{a} \vec{d} \cdot \nabla \omega p + c^* \omega p + \lambda \omega p \right) dx = \int_{\Omega} (y^* - y_d) \omega dx. \tag{13}$$

由式(12)和式(13), 有

$$\int_{\Omega} (y^* - y_d) \omega dx = - \int_{\Omega} y^\epsilon \bar{c} p dx. \tag{14}$$

将式(14)代入式(9), 可得

$$\int_{\Omega} (kc^* - y^\epsilon p)(c - c^*) dx \geq 0, \quad \forall c \in U_{ad}.$$

再由式(8), 有

$$\int_{\Omega} (kc^* - y^* p)(c - c^*) dx \geq 0, \quad \forall c \in U_{ad}.$$

由文献[12]可得式(7). 证毕.

3 最优控制的唯一性

下面证明当 λ 充分大时最优控制的唯一性.

定理 3 如果 λ 充分大, 则优化系统

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) + \operatorname{div}(\sqrt{a} \vec{b} y) + \sqrt{a} \vec{d} \cdot \nabla y + c^*(y, p)y + \lambda y = f, \quad x \in \Omega, \tag{15}$$

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) - \operatorname{div}(\sqrt{a} \vec{d} p) - \sqrt{a} \vec{b} \cdot \nabla p + c^*(y, p)p + \lambda p = g, \quad x \in \Omega, \tag{16}$$

$$y(x) = p(x) = 0, \quad x \in \Sigma \tag{17}$$

的解唯一, 其中 $g = y - y_d$, $c^*(y, p) = \min \left\{ 0, \max \left\{ \bar{c}, \frac{1}{k} p y \right\} \right\}$.

证明: 令 $(y_1, p_1), (y_2, p_2)$ 是系统(15)~(17)的两个解, 则 $(y_1 - y_2, p_1 - p_2)$ 是系统

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial (y_1 - y_2)}{\partial x_i} \right) + \operatorname{div}(\sqrt{a} \vec{b} (y_1 - y_2)) + \sqrt{a} \vec{d} \cdot \nabla (y_1 - y_2) + c^*(y_1, p_1)y_1 - c^*(y_2, p_2)y_2 + \lambda(y_1 - y_2) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{18}$$

$$- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial (p_1 - p_2)}{\partial x_i} \right) - \operatorname{div}(\sqrt{a} \vec{d} (p_1 - p_2)) - \sqrt{a} \vec{b} \cdot \nabla (p_1 - p_2) + c^*(y_1, p_1)p_1 - c^*(y_2, p_2)p_2 + \lambda(p_1 - p_2) = y_1 - y_2, \quad x \in \Omega, \tag{19}$$

$$y_1 - y_2 = p_1 - p_2 = 0, \quad x \in \partial\Omega \tag{20}$$

的解.

对方程(18)选取检验函数 $y_1 - y_2$, 对方程(19)选取检验函数 $p_1 - p_2$, 并将两个积分等式求和可得

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left(\frac{\partial (y_1 - y_2)}{\partial x_i} \frac{\partial (y_1 - y_2)}{\partial x_j} + \frac{\partial (p_1 - p_2)}{\partial x_i} \frac{\partial (p_1 - p_2)}{\partial x_j} \right) dx + \lambda \int_{\Omega} ((y_1 - y_2)^2 + (p_1 - p_2)^2) dx = \int_{\Omega} (\sqrt{a} (\vec{b} - \vec{d}) \cdot \nabla (y_1 - y_2)(y_1 - y_2) + \sqrt{a} (\vec{b} - \vec{d}) \cdot \nabla (p_1 - p_2)(p_1 - p_2)) dx +$$

$$\int_{\Omega} (c^*(y_1, p_1)y_1 - c^*(y_2, p_2)y_2)(y_1 - y_2)dx + \int_{\Omega} (c^*(y_1, p_1)p_1 - c^*(y_2, p_2)p_2)(p_1 - p_2)dx - \int_{\Omega} (p_1 - p_2)(y_1 - y_2)dx, \tag{21}$$

由命题 1 有

$$\|y_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M^{1/2} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \|p_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq N^{1/2} (\|f\| + \|y_d\|_{L^\infty(\Omega)}).$$

此时,

$$N^{1/2} = \max\{\sqrt{2}M, \sqrt{2M}\}. \tag{22}$$

因此

$$|c^*(y_1, p_1)y_1 - c^*(y_2, p_2)y_2| = |c^*(y_1, p_1)(y_1 - y_2) + y_2(c^*(y_1, p_1) - c^*(y_2, p_2))| \leq \bar{c}|y_1 - y_2| + \frac{M^{1/2}}{k} \|f\|_{L^\infty(\Omega)} |p_1 y_1 - p_2 y_2|, \tag{23}$$

其中

$$|p_1 y_1 - p_2 y_2| \leq |p_1(y_1 - y_2) + y_2(p_1 - p_2)| \leq N^{1/2} (\|f\| + \|y_d\|_{L^\infty(\Omega)}) |y_1 - y_2| + M^{1/2} \|f\|_{L^\infty(\Omega)} |p_1 - p_2|. \tag{24}$$

从而有

$$|c^*(y_1, p_1)y_1 - c^*(y_2, p_2)y_2| \leq \bar{c}|y_1 - y_2| + \frac{M^{1/2}N^{1/2}}{k} (\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \|y_d\|_{L^\infty(\Omega)}) \times \|f\|_{L^\infty(\Omega)} |y_1 - y_2| + \frac{M}{k} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^2 |p_1 - p_2| \leq C_1(|y_1 - y_2| + |p_1 - p_2|), \tag{25}$$

其中

$$C_1 = \max\left\{\bar{c} + \frac{M^{1/2}N^{1/2}}{k} (\|f\| + \|y_d\|_{L^\infty(\Omega)}) \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \frac{M}{k} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right\}. \tag{26}$$

于是

$$\left| \int_{\Omega} (c^*(y_1, p_1)y_1 - c^*(y_2, p_2)y_2)(y_1 - y_2)dx \right| \leq C_1 \int_{\Omega} ((y_1 - y_2)^2 + |y_1 - y_2| |p_1 - p_2|)dx \leq \frac{3}{2}C_1 \int_{\Omega} ((y_1 - y_2)^2 + (p_1 - p_2)^2)dx. \tag{27}$$

同理有

$$\left| \int_{\Omega} (c^*(y_1, p_1)p_1 - c^*(y_2, p_2)p_2)(p_1 - p_2)dx \right| \leq \frac{3}{2}C_1 \int_{\Omega} ((y_1 - y_2)^2 + (p_1 - p_2)^2)dx. \tag{28}$$

将式(27)和式(28)代入式(21), 再结合 Hölder 不等式, 可得

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left(\frac{\partial(y_1 - y_2)}{\partial x_i} \frac{\partial(y_1 - y_2)}{\partial x_j} + \frac{\partial(p_1 - p_2)}{\partial x_i} \frac{\partial(p_1 - p_2)}{\partial x_j} \right) dx + \lambda \int_{\Omega} ((y_1 - y_2)^2 + (p_1 - p_2)^2) dx \leq \frac{M_1}{2} \int_{\Omega} (a |\nabla(y_1 - y_2)|^2 + a |\nabla(p_1 - p_2)|^2) dx + 3C_1 \int_{\Omega} ((y_1 - y_2)^2 + (p_1 - p_2)^2) dx.$$

取 $\lambda > 3C_1$, 再由式(5), 有

$$\int_{\Omega} (a |\nabla(y_1 - y_2)|^2 + a |\nabla(p_1 - p_2)|^2) dx + \int_{\Omega} ((y_1 - y_2)^2 + (p_1 - p_2)^2) dx \leq 0.$$

所以 $y_1 = y_2, p_1 = p_2$. 证毕.

参 考 文 献

[1] 邹广平, 柳天增, 吴松阳, 等. 基于幂级数与椭圆方程的金属丝网橡胶组合减振器动态迟滞模型 [J]. 机械工程

- 学报, 2023, 59(10): 106-116. (ZOU G P, LIU T Z, WU S Y, et al. Dynamic Hysteresis Model of Metal-Net Rubber Combination Damper Based on Power Series and Ellipse Equation [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2023, 59(10): 106-116.)
- [2] 许作良, 张关泉. 二维稳态各向异性介质渗透率的反演问题 [J]. 计算数学, 2003, 25(2): 145-156. (XU Z L, ZHANG G Q. Identification of the Steady-State Permeability for Two Dimensional Anisotropic Medium [J]. Mathematica Numerica Sinica, 2003, 25(2): 145-156.)
- [3] KNOWLES I. Parameter Identification for Elliptic Problems [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2001, 131(1/2): 175-194.
- [4] FELBER N L, HARBRECHT H, SCHMIDLIN M. Identification of Sparsely Representable Diffusion Parameters in Elliptic Problems [J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2024, 17(1): 61-90.
- [5] QUYEN T N T. Variational Method for Multiple Parameter Identification in Elliptic PDEs [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 461(1): 676-700.
- [6] YIMAMU Y, DENG Z C. Convergence of Inverse Volatility Problem Based on Degenerate Parabolic Equation [J]. Mathematics, 2022, 10(15): 2608-1-2608-22.
- [7] WALSH J, RACKAUCKAS C. On the Budyko-Sellers Energy Balance Climate Model with Ice Line Coupling [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems: Series B, 2015, 20(7): 2187-2216.
- [8] YIN J X, WANG C P. Evolutionary Weighted p -Laplacian with Boundary Degeneracy [J]. Journal of Differential Equations, 2007, 237(2): 421-445.
- [9] 解春雷, 杜润梅. 一类半线性退化抛物方程在边界控制函数作用下的近似能控性 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2021, 59(3): 563-567. (XIE C L, DU R M. Approximate Controllability of a Class of Semilinear Degenerate Parabolic Equations with Boundary Control Functions [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2021, 59(3): 563-567.)
- [10] DURANTE T, KUPENKO O P, MANZO R. On Optimal Boundary Control Problem for a Strongly Degenerate Elliptic Equation [J]. Revista Matemática Complutense, 2020, 33(4): 63-88.
- [11] MASIERO F. Infinite Horizon Stochastic Optimal Control Problems with Degenerate Noise and Elliptic Equations in Hilbert Spaces [J]. Applied Mathematics and Optimization, 2007, 55(3): 285-326.
- [12] TRÖLTZSCH F. Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods, and Applications [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 2010: 21-63.

(责任编辑: 李琦)