doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024124

Gorenstein($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-投射模的稳定性

罗宏蓉，陈文静
(西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070)

摘要：设 R 是有单位元的交换环，($\mathscr{L},\mathscr{A}$)是完备的对偶对. 先引入一种相对于完备对偶对($\mathscr{L},\mathscr{A}$)的 Gorenstein 同调模类 $\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$，再研究 $\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$ 的一些性质. 最后，借助一些特殊的模类证明$\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$与 Gorenstein($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-投射模类一致.

关键词：Gorenstein($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-投射模；稳定性；Gorenstein 平坦模；正合序列；对偶对
中图分类号：O153.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2024)06-1296-05

Stability of Gorenstein ($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-Projective Modules

LUO Hongrong, CHEN Wenjing
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*)

Abstract: Let R be an associative ring with an identity, and ($\mathscr{L},\mathscr{A}$) be a complete duality pair. Firstly, we introduce the class $\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$ of Gorenstein homological modules with respect to the complete duality pair ($\mathscr{L},\mathscr{A}$). Secondly, we study some properties of $\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$. Finally, we prove that $\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$ coincides with the class of Gorenstein ($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-projective modules with the help of some special classes of modules.

Keywords: Gorenstein ($\mathscr{L},\mathscr{A}$)-projective module; stability; Gorenstein flat module; exact sequence; duality pair

0 引 言

稳定模理论[1]的发展与 Gorenstein 同调代数的发展密切相关. 在 Gorenstein 同调代数中，可用 Gorenstein 投射模、Gorenstein 内射模和 Gorenstein 平坦模代替经典同调代数中的投射模、内射模和平坦模. 如果存在一个平坦 R-模的正合序列

$$\mathbb{F}=\cdots\to F_2\to F_1\to F_0\to F_{-1}\to F_{-2}\to\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Im}(F_0\to F_{-1})$，并且对任意的内射右 R-模 I，$I\otimes_R\mathbb{F}$ 是正合的，则称 R-模 M 为 Gorenstein 平坦模(简称 G-平坦模)[2]. 用 $\mathscr{GF}(R)$表示 Gorenstein 平坦模类. 文献[3]引入了两种 Gorenstein 同调模类 $\mathscr{G}^{(2)}\mathscr{F}(R)$和 $\mathscr{G}_I^{(2)}\mathscr{F}(R)$，即 R-模 $M\in\mathscr{G}^{(2)}\mathscr{F}(R)$，当且仅当存在 Gorenstein 平坦模的正合序列

$$\mathbb{G}=\cdots\to G_2\to G_1\to G_0\to G_{-1}\to G_{-2}\to\cdots,\tag{1}$$

使得 $M\cong\mathrm{Im}(G_0\to G_{-1})$，并且对任意的 Gorenstein 内射右 R-模 H，$H\otimes_R\mathbb{G}$ 是正合的；R-模 $M\in\mathscr{G}_I^{(2)}\mathscr{F}(R)$，当且仅当存在 Gorenstein 平坦模的正合序列(1)，使得 $M\cong\mathrm{Im}(G_0\to G_{-1})$，并且对任意

收稿日期：2024-04-02. **网络首发日期**：2024-08-30.
第一作者简介：罗宏蓉(2000—)，女，汉族，硕士研究生，从事环的同调理论的研究，E-mail：17834485531@163.com. **通信作者简介**：陈文静(1989—)，女，汉族，博士，副教授，从事环的同调理论的研究，E-mail：chenwj@nwnu.edu.cn.
基金项目：国家自然科学基金(批准号：11901463；12361007)和甘肃省青年科技基金计划项目(批准号：20JR5RA517).
网络首发地址：https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20240829.0925.001.

的内射右 R-模 I，$I\otimes_R\mathbb{G}$ 是正合的．文献[3]证明了 $\mathscr{GF}(R)=\mathscr{G}^{(2)}\mathscr{F}(R)=\mathscr{G}_I^{(2)}\mathscr{F}(R)$，从而得到了 Gorenstein 平坦模的稳定性．目前，关于 Gorenstein 同调模类的研究备受关注．Holm 等[4]引入了对偶对的概念，对相对同调代数的研究具有重要作用．Gillespie[5]引入了 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模、内射模和平坦模，即相对于完备对偶对$(\mathscr{L},\mathscr{A})$的 Gorenstein 投射模、内射模和平坦模，研究了一些与相对于完备对偶对的 Gorenstein 同调模有关的模型结构．Wang 等[6]研究了相对于完备对偶对的 Gorenstein 平坦模．Chen 等[7]建立了一些与 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模有关的粘合．事实上，相对于完备对偶对的 Gorenstein 投射模是相对于完备对偶对的 Gorenstein 平坦模，而相对于完备对偶对的 Gorenstein 平坦模是 Gorenstein 平坦模．

受上述研究的启发，本文引入一种相对于完备对偶对$(\mathscr{L},\mathscr{A})$的 Gorenstein 同调模类 $\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$．用 $\mathscr{GP}$ 表示相对于完备对偶对$(\mathscr{L},\mathscr{A})$的 Gorenstein 投射模类，证明 $\mathscr{GP}=\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$，从而得到 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模的稳定性．本文所讨论的环均为有单位元的交换环，如果无特殊说明，模都表示左 R-模．

1　预备知识

对任意的 R-模 M，$M^+=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$表示 M 的示性模．

定义 1（对偶对）[4]　如果$(\mathscr{L},\mathscr{A})$满足以下条件：

1）$L\in\mathscr{L}$ 当且仅当 $L^+\in\mathscr{A}$；

2）$\mathscr{A}$ 关于直和项和有限直和封闭．

则称$(\mathscr{L},\mathscr{A})$是环 R 上的对偶对，其中 $\mathscr{L}$ 是左 R-模类，$\mathscr{A}$ 是右 R-模类．

定义 2（完全对偶对）[4]　如果 $R\in\mathscr{L}$，并且 $\mathscr{L}$ 关于直和及扩张封闭，则称对偶对$(\mathscr{L},\mathscr{A})$是完全的．

定义 3（对称对偶对）[4]　如果$(\mathscr{L},\mathscr{A})$和$(\mathscr{A},\mathscr{L})$都是对偶对，则称对偶对$\{\mathscr{L},\mathscr{A}\}$是对称的．

定义 4（完备对偶对）[4]　如果$\{\mathscr{L},\mathscr{A}\}$是对称对偶对，并且$(\mathscr{L},\mathscr{A})$是完全对偶对，则称对偶对$(\mathscr{L},\mathscr{A})$是完备的．

定义 5（Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模）[5]　如果存在一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{L})$-正合的正合序列 $\mathbb{P}$：$\cdots\to P_1\to P_0\to P_{-1}\to P_{-2}\to\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(P_{-1}\to P_{-2})$，则称 R-模 M 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模，其中每个 P_i 是投射模．

由文献[5]知，$\mathscr{GP}$ 关于扩张、直和、直和项及满同态的核封闭．用 $\mathscr{P}$ 表示投射 R-模类．由文献[8]知，$\mathscr{P}\subseteq\mathscr{GP}$，$\mathbb{P}$ 的所有核、像、余核都是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模，并且对任意的 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模 M、任意的 $L\in\mathscr{L}$ 及任意的 $i\geqslant1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L)=0$．

2　主要结果

用 $\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$ 表示满足下列条件的所有 R-模 M 构成的模类：存在一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{L})$-正合的正合序列 $\mathbb{G}$：$\cdots\to G_1\to G_0\to G_{-1}\to G_{-2}\to\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(G_{-1}\to G_{-2})$，其中每个 G_i 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模．显然 $\mathbb{G}$ 的所有核、像以及余核都属于 $\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$，并且 $\mathscr{GP}\subseteq\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$．用 $\mathscr{S}$-$\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$ 表示满足下列条件的所有 R-模 N 构成的模类，即有一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{L})$-正合的正合列 $0\to N\to G\to N\to0$，其中 G 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模．显然 $\mathscr{S}$-$\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}\subseteq\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$．

命题 1　设 $M\in\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$，则对任意的 $L\in\mathscr{L}$ 及任意的 $i\geqslant1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L)=0$．

证明：设 $M\in\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$，则存在一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{L})$-正合的正合序列$\cdots\to G_1\to G_0\to G_{-1}\to G_{-2}\to\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}(G_{-1}\to G_{-2})$，其中 G_i 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模．令 $K_0=\mathrm{Ker}(G_0\to G_{-1})\in\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$，则有正合列 $0\to K_0\to G_0\to M\to0$．设 $L\in\mathscr{L}$，则有正合列 $0\to\mathrm{Hom}_R(M,L)\to\mathrm{Hom}_R(G_0,L)\to\mathrm{Hom}_R(K_0,L)\to0$．由长正合列引理[9]知，有正合序列

$$0\to\mathrm{Hom}_R(M,L)\to\mathrm{Hom}_R(G_0,L)\to\mathrm{Hom}_R(K_0,L)\to\mathrm{Ext}_R^1(M,L)\to\mathrm{Ext}_R^1(G_0,L).$$

因为 G_0 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模，所以有 $\mathrm{Ext}_R^1(G_0,L)=0$．于是有行正合的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{Hom}_R(G_0,L) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(K_0,L) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^1(M,L) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & \downarrow\cong & & \| & & \| \\
\mathrm{Hom}_R(G_0,L) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(K_0,L) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

从而由五引理[9]知 $\mathrm{Ext}_R^1(M,L)=0$. 即对任意的 $G\in\mathcal{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$ 及任意的 $L\in\mathscr{L}$, 有 $\mathrm{Ext}_R^1(G,L)=0$. 令 $K_{i-2}=\mathrm{Ker}(G_{i-2}\to G_{i-3})\in\mathcal{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$, 则由维数转移知, 对任意的 $i\geqslant 1$, 有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L)\cong\mathrm{Ext}_R^1(K_{i-2},L)=0$. 即对任意的 $L\in\mathscr{L}$ 及任意的 $i\geqslant 1$, 有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L)=0$.

命题 2 设 M 是一个 R-模, 则下列叙述等价:

1) $M\in\mathcal{S}\text{-}\mathcal{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$;

2) 存在一个 R-模的正合列 $0\to M\to G\to M\to 0$, 使得 G 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模, 并且对任意的 $L\in\mathscr{L}$, 有 $\mathrm{Ext}_R^1(M,L)=0$;

3) 存在一个 R-模的正合列 $0\to M\to G\to M\to 0$, 使得 G 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模, 并且对任意的 $L\in\mathscr{L}$ 及任意的 $i\geqslant 1$, 有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L)=0$.

证明: 1)⇒2). 设 $M\in\mathcal{S}\text{-}\mathcal{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$, 则有 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{L})$-正合的正合列 $0\to M\to G\to M\to 0$, 其中 G 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模. 设 $L\in\mathscr{L}$, 则有正合列 $0\to\mathrm{Hom}_R(M,L)\to\mathrm{Hom}_R(G,L)\to\mathrm{Hom}_R(M,L)\to 0$. 由长正合列引理[9]知, 有正合序列

$$0\to\mathrm{Hom}_R(M,L)\to\mathrm{Hom}_R(G,L)\to\mathrm{Hom}_R(M,L)\to\mathrm{Ext}_R^1(M,L)\to\mathrm{Ext}_R^1(G,L).$$

因为 G 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模, 所以 $\mathrm{Ext}_R^1(G,L)=0$. 于是有如下行正合的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{Hom}_R(G,L) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M,L) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^1(M,L) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & \downarrow\cong & & \| & & \| \\
\mathrm{Hom}_R(G,L) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M,L) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

从而由五引理[9]知 $\mathrm{Ext}_R^1(M,L)=0$.

2)⇒3). 存在正合列 $0\to M\to G\to M\to 0$, 使得 G 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模, 并且对任意的 $L\in\mathscr{L}$, 有 $\mathrm{Ext}_R^1(M,L)=0$. 于是由长正合列引理[9]知, 有正合序列

$$\cdots\to\mathrm{Ext}_R^i(G,L)\to\mathrm{Ext}_R^i(M,L)\to\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M,L)\to\mathrm{Ext}_R^{i+1}(G,L)\to\cdots,$$

其中 $i\geqslant 1$. 因为 G 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模, 所以对任意的 $j\geqslant 1$, 有 $\mathrm{Ext}_R^j(G,L)=0$. 因此对任意的 $i\geqslant 1$, 有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L)\cong\mathrm{Ext}_R^{i+1}(M,L)$. 即对任意的 $L\in\mathscr{L}$ 及任意的 $i\geqslant 1$, 有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L)\cong\mathrm{Ext}_R^1(M,L)=0$.

3)⇒1). 存在正合列 $0\to M\to G\to M\to 0$, 使得 G 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模, 并且对任意的 $L\in\mathscr{L}$ 及任意的 $i\geqslant 1$, 有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L)=0$. 于是由长正合列引理[9]知, 有正合序列 $0\to\mathrm{Hom}_R(M,L)\to\mathrm{Hom}_R(G,L)\to\mathrm{Hom}_R(M,L)\to 0$, 故 $M\in\mathcal{S}\text{-}\mathcal{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$.

Chen 等[8]证明了一个模是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模当且仅当它是某个强 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模的直和项. 对于 $\mathcal{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$ 中的模, 本文给出如下结论.

命题 3 若 $M\in\mathcal{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$, 则 M 是 $\mathcal{S}\text{-}\mathcal{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$ 中某个模的直和项.

证明: 设 $M\in\mathcal{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$, 则存在一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{L})$-正合的正合序列 $\cdots\to G_1\to G_0\to G_{-1}\to G_{-2}\to\cdots$, 使得 $M\cong\mathrm{Ker}(G_{-1}\to G_{-2})$, 其中每个 G_i 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模. 令 $K_i=\mathrm{Ker}(G_i\to G_{i-1})\in\mathcal{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$, 其中 $i\in\mathbb{Z}$, $K_{-1}=M$. 于是可得下列 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{L})$-正合的正合列:

$$0\to K_{-2}\to G_{-2}\to K_{-3}\to 0,$$
$$0\to M\to G_{-1}\to K_{-2}\to 0,$$
$$0\to K_0\to G_0\to M\to 0,$$
$$0\to K_1\to G_1\to K_0\to 0,$$
$$0\to K_2\to G_2\to K_1\to 0,$$
$$\cdots\cdots$$

因此有正合列 $0\to N\to G\to N\to 0$，其中 $N=\bigoplus_{i\leqslant -2}K_i\oplus M\bigoplus_{i\geqslant 0}K_i$，$G=\bigoplus_{i\in Z}G_i$. 因为 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-投射模关于直和封闭，所以 G 是 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-投射模，并且 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{L})$作用在正合列 $0\to N\to G\to N\to 0$ 上仍保持正合. 从而 $N\in\mathscr{S}\text{-}\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$，并且 M 是 N 的直和项.

定义 6　设 $M\in\mathscr{S}\text{-}\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$，如果存在一个 R-模的正合列 $0\to M\to N\to G\to 0$，使得 G 是 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-投射模，则称 R-模 N 是 M-型模.

命题 4　设 $M\in\mathscr{S}\text{-}\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$，$N$ 是 M-型模，则下列结论成立：

1）对任意的 $L\in\mathscr{L}$ 及任意的 $i\geqslant 1$，有$\mathrm{Ext}_R^i(N,L)=0$；

2）有一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{L})$-正合的正合列 $0\to N\to P\to K\to 0$，其中 P 是投射模，K 是 M-型模.

证明：1）因为 N 是 M-型模，所以存在正合列 $0\to M\to N\to G\to 0$，使得 G 是 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-投射模. 设 $L\in\mathscr{L}$，则由长正合列引理[9]知，有正合序列

$$\cdots\to\mathrm{Ext}_R^i(G,L)\to\mathrm{Ext}_R^i(N,L)\to\mathrm{Ext}_R^i(M,L)\to\cdots,$$

其中 $i\geqslant 1$. 因为 $M\in\mathscr{S}\text{-}\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$，所以由命题 2 中 3)知，对任意的 $L\in\mathscr{L}$ 及任意的 $i\geqslant 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L)=0$. 又因为 G 是 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-投射模，所以对任意的 $L\in\mathscr{L}$ 及任意的 $i\geqslant 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(G,L)=0$. 因此对任意的 $L\in\mathscr{L}$ 及任意的 $i\geqslant 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(N,L)=0$.

2）因为 $M\in\mathscr{S}\text{-}\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$，所以有正合列 $0\to M\to G'\to M\to 0$，其中 G'是 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-投射模. 因为N 是 M-型模，所以存在正合列 $0\to M\to N\to G\to 0$，使得 G 是 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-投射模. 考虑推出图：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & G' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

因为 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-投射模关于扩张封闭，所以由正合列 $0\to G'\to X\to G\to 0$ 知，X 是 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-投射模. 由文献[8]的命题 3.1 中(3)知，存在正合列 $0\to X\to P\to X'\to 0$，其中 P 是投射模，X'是 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-投射模. 考虑推出图：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & X' \arrow[r, equal] \arrow[d] & X' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

因为 X'是 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-投射模，所以由正合列 $0\to M\to K\to X'\to 0$ 知，K 是M-型模. 由 1)知，对任意的 $L\in\mathscr{L}$，有 $\mathrm{Ext}_R^1(K,L)=0$，因此 $0\to\mathrm{Hom}_R(K,L)\to\mathrm{Hom}_R(P,L)\to\mathrm{Hom}_R(N,L)\to 0$ 是正合的.

推论 1　设 $M\in\mathscr{S}\text{-}\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$，$N$ 是 M-型模，则 N 是 Gorenstein($\mathscr{L}$,$\mathscr{A}$)-投射模.

证明：因为 N 是 M-型模，所以由命题 4 中 2)知，有一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{L})$-正合的正合列 $0\to N\to P^0\to K^0\to 0$，其中 P^0 是投射模，K^0 是 M-型模. 因为 K^0 是 M-型模，所以有一个 $\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{L})$-正合的正合列 $0\to K^0\to P^1\to K^1\to 0$，其中 P^1 是投射模，K^1 是 M-型模. 继续上述过程可得一个

$\mathrm{Hom}_R(-,\mathscr{L})$-正合的正合列 $0\to N\to P^0\to P^1\to\cdots$，其中每个 P^i 是投射模. 因为 N 是 M-型模，所以由命题 4 中 1)知，对任意的 $L\in\mathscr{L}$ 及任意的 $i\geqslant 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(N,L)=0$. 于是由文献[8]的命题 3.1 中(2)知，N 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模.

定理 1 $\mathscr{GP}=\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$.

证明：只需证明 $\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}\subseteq\mathscr{GP}$. 设 $M\in\mathscr{S}$-$\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$，则有正合列 $0\to M\to G\to M\to 0$，其中 G 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模. 因为 G 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模，所以由文献[8]的命题 3.1 中(3)知，存在正合序列 $0\to G\to P\to G'\to 0$，其中 P 是投射模，G' 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模. 考虑下列推出图：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & G' \arrow[r, equal] \arrow[d] & G' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

因为 G' 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模，所以由正合列 $0\to M\to X\to G'\to 0$ 可知，X 是 M-型模. 由推论 1 知，X 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模. 又因为 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模关于满同态的核封闭，所以 M 是 Gorenstein$(\mathscr{L},\mathscr{A})$-投射模，即 $M\in\mathscr{GP}$，因此 $\mathscr{S}$-$\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}\subseteq\mathscr{GP}$. 下证 $\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}\subseteq\mathscr{GP}$. 设 $N\in\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$，则 N 是 $\mathscr{S}$-$\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}$ 中某个模的直和项. 因为 $\mathscr{S}$-$\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}\subseteq\mathscr{GP}$，所以 N 是 $\mathscr{GP}$ 中某个模的直和项. 又因为 $\mathscr{GP}$ 关于直和项封闭，所以 $N\in\mathscr{GP}$. 于是 $\mathscr{GP}_{\mathscr{L}}^{(2)}\subseteq\mathscr{GP}$.

参 考 文 献

[1] AUSLANDER M, BRIDGER M. Stable Module Theory [J/OL]. Memoirs of the American Mathematical Society, (1969-12-31)[2023-08-20]. DOI: 10.1090/memo/0094.

[2] ENOCHS E E, JENDA O M G, TORRECILLAS B. Gorenstein Flat Modules [J]. Journal of Nanjing University (Mathematical Biquarterly), 1993, 10(1): 1-9.

[3] BOUCHIBA S, KHALOUI M. Stability of Gorenstein Flat Modules [J]. Glasgow Mathematical Journal, 2012, 54(1): 169-175.

[4] HOLM H, JØRGENSEN P. Cotorsion Pairs Induced by Duality Pairs [J]. Journal of Commutative Algebra, 2009, 1(4): 621-633.

[5] GILLESPIE J. Duality Pairs and Stable Module Categories [J]. Journal of Pure Applied Algebra, 2019, 223(8): 3425-3435.

[6] WANG Z P, YANG G, ZHU R M. Gorenstein Flat Modules with Respect to Duality Pairs [J]. Communications in Algebra, 2019, 47(12): 4989-5006.

[7] CHEN W J, LIU Z K. Model Structures, Recollements and Duality Pairs [J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2023, 22(1): 2350017-1-2350017-34.

[8] CHEN W J, LI L, RAO Y P. Model Structures and Recollements Induced by Duality Pairs [J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2023, 60(2): 405-423.

[9] 佟文廷. 同调代数引论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1998: 53-201. (TONG W T. An Introduction to Homological Algebra [M]. Beijing: Higher Education Press, 1998: 53-201.)

(责任编辑: 赵立芹)