

圈图与简单图的冠图的 $D(2)$ -点和可区别边染色的界

何静, 强会英

(兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070)

摘要: 利用组合零点定理、构造染色法和数学归纳法, 研究圈图与简单图的冠图的 $D(2)$ -点和可区别边染色问题, 得到了圈图与简单图的冠图的 $D(2)$ -点和可区别边色数的界为 $\Delta(G)+1$, 进而推出路图与简单图的冠图的界为 $\Delta(G)+1$.

关键词: 圈图; 简单图; 冠图; $D(2)$ -点和可区别边染色; $D(2)$ -点和可区别边色数

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)02-0375-07

Bound of $D(2)$ -Vertex Sum Distinguishing Edge-Coloring of Corona Graph of a Cycle and Simple Graphs

HE Jing, QIANG Huiying

(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: We studied the $D(2)$ -vertex sum distinguishing edge-coloring problem of the corona graph of a cycle and a simple graphs by using combinatorial nullstellensatz, constructing coloring function and mathematical induction. We obtained that the bound of $D(2)$ -vertex sum distinguishing edge-coloring of the corona graph of a cycle and a simple graphs was $\Delta(G)+1$, and then we derived that the bound of the corona graph of a path and a simple graphs was $\Delta(G)+1$.

Keywords: cycle graph; simple graph; corona graph; $D(2)$ -vertex sum distinguishing edge-coloring; $D(2)$ -vertex sum distinguishing edge-coloring number

目前, 关于图染色问题的研究已有很多结果, 如 $D(\beta)$ -点和可区别边染色(记为 $D(\beta)$ -VSDEC)等^[1-3]. 本文在 $D(\beta)$ -VSDEC 的基础上, 研究圈图与简单图的冠图的 $D(2)$ -VSDEC 问题, 得到了其 $D(2)$ -VSDEC 的一个上界.

本文讨论的图均为有限、无向的简单图, 分别用 $V(G), E(G), \Delta(G)$ 表示图 G 的顶点集、边集、最大度. 令 $C = \{1, 2, \dots, k\}$ 为 k -色集, $C(u)$ 称为点 u 的色集合, 记 $\{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\} \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 表示边 $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ 所染颜色序列, $d(\Delta, \Delta)$ 表示图 G 中两个最大度点之间的距离, $S(u)$ 表示与 u 点关联边的颜色数之和. 其他未说明的术语参见文献[4-16].

1 预备知识

定义 1^[1] 设 f 为图 G 的一个 k -正常边染色, $\forall uv \in E(G)$, 有 $S(u) \neq S(v)$, 其中 $S(u) =$

收稿日期: 2024-04-02. 网络首发日期: 2024-09-04.

第一作者简介: 何静(2000—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事图论的研究, E-mail: 1947194097@qq.com. 通信作者简介: 强会英(1968—), 女, 汉族, 硕士, 教授, 从事图论及其应用的研究, E-mail: qhy2005ww@126.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 61962035).

网络首发地址: <https://link.cnki.net/urlid/22.1340.o.20240902.1630.001>.

$\sum_{uv \in E(G)} f(uv)$, 则 f 称为 G 的一个 k -邻和可区别边染色. 使得 G 存在 k -邻和可区别边染色的最小颜色数 k 称为 G 的邻和可区别边色数, 记为 $\chi'_{\Sigma}(G)$.

定义 2^[2] 令 f 是图 G 的一个 k -正常边染色, $\forall u, v \in V(G)$, 若 $d_G(u, v) \leq 2$, 则 $S(u) \neq S(v)$, 其中 $S(u) = \sum_{u\omega \in E(G)} f(u\omega)$, 则 f 称为图 G 的 2-距离和可区别边染色. 染色中用到的最小颜色数 k 称为 G 的 2-距离和可区别边色数, 记为 $\chi'_{2-\Sigma}(G)$.

引理 1^[2] 对于简单图 G , $\chi'_{2-\Sigma}(G) \geq \chi'_{\Sigma}(G) \geq \Delta(G)$, 若图 G 存在两个距离不超过 2 的最大度点, 则 $\chi'_{2-\Sigma}(G) \geq \Delta(G) + 1$.

引理 2(组合零点定理)^[4] 令 F 为任一数域, $Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 F 上的多项式, 设 $\deg(Q) = \sum_{i=1}^n k_i$, 其中 k_i 为非负整数, 且 $C_Q(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}) \neq 0$, 若 $S_1, S_2, \dots, S_n \subseteq F$ 且 $|S_i| > k_i (1 \leq i \leq n)$, 则存在 $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \dots, s_n \in S_n$, 使得 $Q(s_1, s_2, \dots, s_n) \neq 0$.

引理 3^[5] 设 $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^n$ 是关于 n 个变量的多项式, 其中 $n \geq 2$, 则多项式 Q 中最高次项 $(x_1 x_2 x_3 \dots x_n)^n$ 的系数 $C_Q((x_1 x_2 x_3 \dots x_n)^n) \neq 0$.

引理 4^[6] 设 C_m 是 $m (m \geq 3)$ 阶的圈, P_n 是 $n (n \geq 3)$ 阶的路, 则 $\chi'_{2-\Sigma}(C_m \circ P_n) = n + 3$.

引理 5^[6] 设 C_m 是 $m (m \geq 3)$ 阶的圈, C_n 是 $n (n \geq 3)$ 阶的圈, 则 $\chi'_{2-\Sigma}(C_m \circ C_n) = n + 3$.

引理 6^[6] 对完全图 $K_n (n \geq 3)$, 有 $\chi'_{2-\Sigma}(K_n) = \chi'_{\Sigma}(K_n) = \begin{cases} n, & n \equiv 1 \pmod{2}, \\ n + 1, & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$

定义 3^[7] 简单图 G 和 H 的冠图 (记为 $G \circ H$) 是指将 H 复制 $|V(G)|$ 次, 把第 i 个 H 中的每个顶点与 G 中第 i 个顶点相连接 ($1 \leq i \leq |V(G)|$).

特别地, 当 H 为 r 阶空图时, 图 $G \circ H$ 称为 r -冠图, 记为 $I_r(G)$. 1-冠图简称为冠图, 记为 $I(G)$.

2 主要结果

定理 1 对于冠图 $I_r(C_n) (r \geq 1, n \geq 3)$, 有 $\chi'_{2-\Sigma}(I_r(C_n)) = \begin{cases} \Delta + 2, & n = 5 \text{ 且 } r = 1; \\ \Delta + 1, & \text{其他.} \end{cases}$

证明: 由于 $\Delta(I_r(C_n)) = r + 2$, 因此根据引理 1 得

$$\chi'_{2-\Sigma}(I_r(C_n)) \geq \Delta(I_r(C_n)) + 1 = r + 3.$$

记

$$V(I_r(C_n)) = \{v_1, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1r}, v_2, v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2r}, \dots, v_n, v_{n1}, v_{n2}, \dots, v_{nr}\},$$

$$E(I_r(C_n)) = \{v_i v_{i+1 \pmod{n}} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\}.$$

根据 H 的阶数 r 分以下 3 种情形讨论.

情形 1) 当 $r = 1, n = 5$ 时, $\Delta(I_1(C_5)) = 3$, $\chi'_{2-\Sigma}(I_1(C_5)) \geq 4$.

假设 $\chi'_{2-\Sigma}(I_1(C_5)) = 4$, 由 $C_4^3 = 4$ 知, 这 4 种组合的和互不相同, 而图 $I_1(C_5)$ 任意 $d(\Delta, \Delta) \leq 2$, 需要 5 种不同的颜色数之和, 因此 4 种颜色不够染, 故 $\chi'_{2-\Sigma}(I_1(C_5)) \geq \Delta + 2 = 5$. 下面给出 $I_1(C_5)$ 的一个 5-D(2)-VSD-边染色以及各点的颜色数之和, 如图 1 所示.

情形 2) 当 $1 \leq r \leq 4$ 时, $I_r(C_n)$ 中存在 $d(\Delta, \Delta) \leq 2$, 由引理 1 知 $\chi'_{2-\Sigma}(I_r(C_n)) \geq \Delta(I_r(C_n)) + 1$. 下面给出冠图 $I_r(C_n)$ 的一个 $\Delta(I_r(C_n)) + 1$ -D(2)-VSD-边染色.

① 当 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 时, 边染色 φ 为 $\varphi(v_i v_{ij}) = j + 3 (1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4)$, 边 $v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_n v_1$ 用

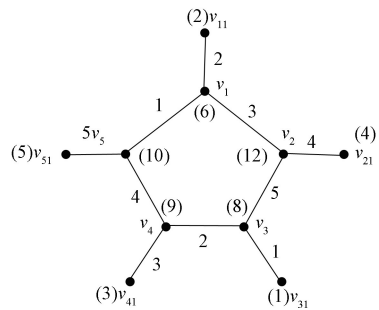


图 1 $I_1(C_5)$

Fig. 1 $I_1(C_5)$

颜色 1, 2, 3 循环染色. 此时, 各点的颜色数之和为 $S(v_{ij}) = j + 3 (1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4)$,

$$S(v_i) = \begin{cases} \frac{j^2 + 7j + 8}{2}, & i \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{j^2 + 7j + 6}{2}, & i \equiv 2 \pmod{3}, \\ \frac{j^2 + 7j + 10}{2}, & i \equiv 0 \pmod{3}, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4.$$

② 当 $n \equiv 1 \pmod{3}$ 时, 只需对 ① 中部分边的染色做如下调整: 边染色 φ 为 $\varphi(v_n v_1) = 4, \varphi(v_1 v_{11}) = 2, \varphi(v_2 v_{21}) = 3, \varphi(v_n v_{n1}) = 1$; 其余各边的染色方法同 ①. 此时, 各点的颜色数之和为

$$S(v_1) = \frac{j^2 + 7j + 6}{2}, \quad S(v_2) = \frac{j^2 + 7j + 4}{2}, \quad S(v_n) = \frac{j^2 + 7j + 8}{2}, \quad 1 \leq j \leq 4.$$

正常边染色条件下, 1 度顶点易和可区别, 其余各点的颜色数之和均与 ① 相同.

③ 当 $n \equiv 2 \pmod{3}$ 且 $n \neq 5$ 时, 只需对 ② 中部分边的染色做如下调整: 边染色 φ 为 $\varphi(v_{n-3} v_{n-4}) = 4, \varphi(v_{n-2} v_{n-3}) = 1, \varphi(v_{n-1} v_{n-2}) = 2, \varphi(v_n v_{n-1}) = 3, \varphi(v_{n-1} v_{(n-1)1}) = 4, \varphi(v_{n-2} v_{(n-2)1}) = 3, \varphi(v_{n-3} v_{(n-3)1}) = 2, \varphi(v_{n-4} v_{(n-4)1}) = 1$; 其余各边的染色方法同 ②. 此时, 各点的颜色数之和为

$$S(v_{n-1}) = \frac{j^2 + 7j + 10}{2}, \quad S(v_{n-2}) = \frac{j^2 + 7j + 4}{2}, \\ S(v_{n-3}) = \frac{j^2 + 7j + 6}{2}, \quad S(v_{n-4}) = \frac{j^2 + 7j + 8}{2}, \quad 1 \leq j \leq 4.$$

正常边染色条件下, 1 度顶点易和可区别, 其余各点的颜色数之和均与 ② 相同.

特别地, 当 $n = 5$ 时, $I_r(C_5)$ 的 $\Delta(I_r(C_5)) + 1 - D(2)$ -VSD-边染色如图 2 所示. 此时各点的颜色数之和为

$$S(v_1) = \frac{j^2 + 7j + 8}{2}, \quad S(v_2) = \frac{j^2 + 7j + 6}{2}, \quad S(v_3) = \frac{j^2 + 7j + 4}{2}, \\ S(v_4) = \frac{j^2 + 7j + 2}{2}, \quad S(v_5) = \frac{j^2 + 7j + 10}{2}, \quad 2 \leq j \leq 4.$$

故 2-距离内和可区别.

情形 3) 当 $r \geq 5$ 时, 记 $G' = G - \{v_1 v_r\}$, 如图 3 所示.

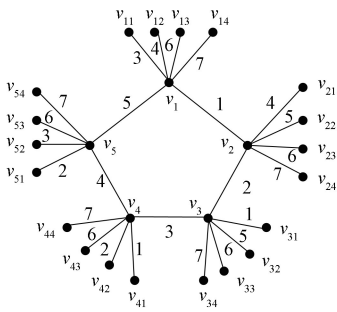


图 2 $I_r(C_5) (1 \leq r \leq 4)$
Fig. 2 $I_r(C_5) (1 \leq r \leq 4)$

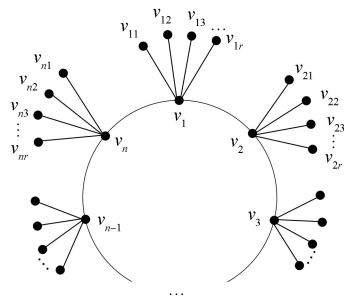


图 3 $I_r(C_n)$
Fig. 3 $I_r(C_n)$

假设 G' 存在 $\Delta(G') + 1 - D(2)$ -VSD-边染色 φ' . 下面将染色 φ' 扩展为图 G 的 $\Delta(G) + 1 - D(2)$ -VSD-边染色 φ . 因为 $r \geq 5$, 所以 1 度点和 $(r + 2)$ 度点易 $D(2)$ -和可区别. 下面对边 $v_1 v_{11}, v_1 v_{12}, \dots, v_1 v_r$ 重新染色. 令 $\varphi(v_1 v_{1m}) = x_m (1 \leq m \leq r)$, 其中 $r = \Delta(G) - 2$, 所得的染色为正常边染色. 令 S_m 表示 x_m 的可用颜色集, 则 $|S_m| = (\Delta(G) + 1) - 2 = \Delta(G) - 1 (1 \leq m \leq r)$, 由染色条件得多项式:

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_r) = \prod_{1 \leq m < n \leq r} (x_m - x_n) \left(\sum_{s=1}^r x_s + \varphi'(v_n v_1) + \varphi'(v_1 v_2) - S_{G'}(v_n) \right) \times \\ \left(\sum_{s=1}^r x_s + \varphi'(v_n v_1) + \varphi'(v_1 v_2) - S_{G'}(v_2) \right) \times$$

$$\left(\sum_{s=1}^r x_s + \varphi'(v_n v_1) + \varphi'(v_1 v_2) - S_G(v_{n-1})\right) \times$$

$$\left(\sum_{s=1}^r x_s + \varphi'(v_n v_1) + \varphi'(v_1 v_2) - S_G(v_3)\right).$$

去掉 $Q(x_1, x_2, \dots, x_r)$ 中的常数得

$$\tilde{Q}(x_1, x_2, \dots, x_r) = \prod_{1 \leq m < n \leq r} (x_m - x_n) \left(\sum_{s=1}^r x_s\right)^4.$$

令 $\tilde{Q}_1(x_1, x_2, \dots, x_r) = \tilde{Q}(x_1, x_2, \dots, x_r) \prod_{1 \leq m < n \leq r} (x_m - x_n) \left(\sum_{s=1}^r x_s\right)^\theta$, 可得

$$\tilde{Q}'_1(x_1, x_2, \dots, x_r) = \prod_{1 \leq m < n \leq r} (x_m - x_n)^2 \left(\sum_{s=1}^r x_s\right)^r.$$

由引理 2 和引理 3 得, $C_{\tilde{Q}_1}((x_1 x_2 \cdots x_r)^r) = C_{\tilde{Q}'_1}((x_1 x_2 \cdots x_r)^r) \neq 0$, 且存在 $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \dots, s_r \in S_r$ 满足 $\tilde{Q}_1(s_1, s_2, \dots, s_r) \neq 0$, \tilde{Q} 是 \tilde{Q}_1 的一个因式, 因此 $\tilde{Q}(x_1, x_2, \dots, x_r) \neq 0$, 即 $\chi'_{2-\Sigma}(G) \leq \Delta(G) + 1$. 证毕.

定理 2 设 C_n 是 $n(n \geq 3)$ 阶的圈, H 是 $m(m \geq 2)$ 阶的连通图, 则有 $\chi'_{2-\Sigma}(C_n \circ H) \leq \Delta + 1$.

证明: 根据 $C_n \circ H$ 的结构知, $\Delta(C_n \circ H) = m + 2$, 且存在 $d(\Delta, \Delta) \leq 2$. 由引理 1 可知 $\chi'_{2-\Sigma}(C_n \circ H) \geq \Delta + 1$. 设 $C_n = v_1 v_2 v_3 \cdots v_n v_1$, 与 v_i 相邻的点记为 $v_{i1}, v_{i2} (1 \leq i \leq n)$. 下面根据 m 的大小分 3 种情形讨论.

情形 1) 当 $m = 2$ 时, $H = P_2$. $\Delta(C_n \circ P_2) = 4$ 且 $d(\Delta, \Delta) \leq 2$, 故 $\chi'_{2-\Sigma}(C_n \circ P_2) \geq 5$. 下面给出 $C_n \circ P_2$ 的 5-D(2)-VSD-边染色.

① 当 $n \equiv 0 \pmod 3$ 时, 边染色 φ 为 $\varphi(v_i v_{ij}) = j + 3, \varphi(v_{i1} v_{i2}) = 1 (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2)$; 边 $v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_n v_1$ 按 1, 2, 3 循环染色. 此时, 各点的颜色数之和为 $\{S(v_1), S(v_2), \dots, S(v_n)\} \rightarrow \{13, 12, 14, \dots, 13, 12, 14\}, S(v_{ij}) = j + 4, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2$, 易见染色方法是 2-距离内点和可区别的.

② 当 $n \equiv 1 \pmod 3$ 时, 边染色 φ 为 $\varphi(v_i v_{i2}) = 5 (1 \leq i \leq n), \varphi(v_i v_{i1}) = 4 (2 \leq i \leq n - 2), \varphi(v_1 v_{11}) = 3, \varphi(v_n v_{n1}) = 2, \varphi(v_{n-1} v_{(n-1)1}) = 1, \varphi(v_{i1} v_{i2}) = 1 (i \neq n - 1), \varphi(v_{(n-1)1} v_{(n-1)2}) = 2, \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_n v_1\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3, 4\}$. 此时, 各点的颜色数之和为 $\{S(v_1), S(v_2), \dots, S(v_{n-2})\} \rightarrow \{13, 12, 14, \dots, 13, 12, 14\}, S(v_n) = 14, S(v_{n-1}) = 11, S(v_{ij}) = j + 4 (2 \leq i \leq n - 2; 1 \leq j \leq 2), S(v_{(n-1)1}) = 3, S(v_{(n-1)2}) = 7, S(v_{n1}) = 3, S(v_{n2}) = 6, S(v_{11}) = 4, S(v_{12}) = 6$, 易见染色方法是 2-距离内点和可区别的.

③ 当 $n \equiv 2 \pmod 3$ 时, 根据不同 n 值分下列 3 种情形讨论.

(i) 当 $n = 5$ 时, 给出 $C_5 \circ P_2$ 的一个 $\Delta + 1$ -D(2)-VSD-边染色及各点的颜色数之和, 如图 4 所示.

(ii) 当 $n = 8$ 时, 给出 $C_8 \circ P_2$ 的一个 $\Delta + 1$ -D(2)-VSD-边染色及各点的颜色数之和, 如图 5 所示.

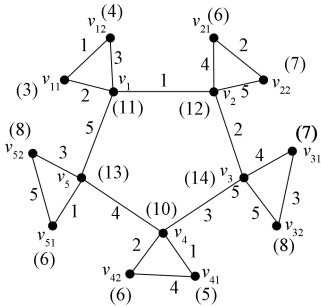


图 4 $C_5 \circ P_2$
Fig. 4 $C_5 \circ P_2$

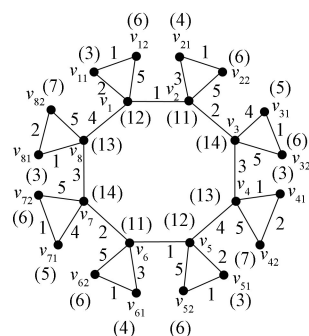


图 5 $C_8 \circ P_2$
Fig. 5 $C_8 \circ P_2$

(iii) 当 $n \neq 8$ 时, $\varphi(v_i v_{i2}) = 5 (1 \leq i \leq n), \varphi(v_i v_{i1}) = 4 (i \neq 3, 4, 5, 7, 8, 9), \varphi(v_3 v_{31}) = \varphi(v_7 v_{71}) = 1, \varphi(v_4 v_{41}) = \varphi(v_8 v_{81}) = 2, \varphi(v_5 v_{51}) = \varphi(v_9 v_{91}) = 3, \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_8 v_9, v_9 v_{10}, v_{10} v_{11}, \dots, v_{n-1} v_n, v_n v_1\} \rightarrow$

$\{1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3\}$, $\varphi(v_{i_1}v_{i_2}) = 1 (i \neq 3, 7)$, $\varphi(v_{31}v_{32}) = \varphi(v_{71}v_{72}) = 2$.

此时, 各点的颜色数之和为 $\{S(v_1), S(v_2), \dots, S(v_n)\} \rightarrow \{13, 12, 11, 14, 13, 12, 11, 14, 13, 12, 14, 13, 12, 14, \dots, 13, 12, 14\}$, $S(v_{ij}) = j + 4 (i \neq 3, 4, 5, 7, 8, 9, 1 \leq j \leq 2)$, $S(v_{31}) = S(v_{41}) = S(v_{81}) = S(v_{71}) = 3$, $S(v_{32}) = S(v_{72}) = 7$, $S(v_{51}) = S(v_{91}) = 4$, $S(v_{42}) = S(v_{52}) = S(v_{82}) = S(v_{92}) = 6$, 易见染色方法是 2-距离内点和可区别的.

情形 2) 当 $m=3$ 时, $H=P_3$ 或 C_3 , 由引理 4 和引理 5 可知结论成立.

情形 3) 当 $m \geq 4$ 时, 根据图 H 最大度点的分布特点, 分以下两种情形讨论.

① 当简单图 H 上的每个点都是最大度点, 且度数均为 m 时, 设 $C_n = v_1 v_2 v_3 \dots v_n v_1$, 与 v_i 相邻的点记为 $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, v_{i_4} (1 \leq i \leq n)$. 下面对阶数 m 进行归纳.

(i) 当 $m=4$ 时, 给出 $C_n \circ H$ 的 $\Delta + 1 - D(2) - \text{VSD}$ -边染色.

当 $n \equiv 0 \pmod 3$ 时, 边染色 ψ 为 $\psi(v_i v_{ij}) = j + 3 (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4)$, $\psi(v_{i_1} v_{i_3}) = \psi(v_{i_2} v_{i_4}) = 1$, $\psi(v_{i_1} v_{i_4}) = \psi(v_{i_2} v_{i_3}) = 2$, $\psi(v_{i_1} v_{i_2}) = \psi(v_{i_3} v_{i_4}) = 3 (1 \leq i \leq n)$. 边 $v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_n v_1$ 用颜色 1, 2, 3 循环染色. 此时, 各点的颜色数之和为 $\{S(v_{i_1}), S(v_{i_2}), S(v_{i_3}), S(v_{i_4})\} \rightarrow \{10, 11, 12, 13\}$, $\{S(v_1), S(v_2), \dots, S(v_n)\} \rightarrow \{26, 25, 27, \dots, 26, 25, 27\} (1 \leq i \leq n)$.

当 $n \equiv 1 \pmod 3$ 时, 只需对 $n \equiv 0 \pmod 3$ 情形中的染法做如下调整: 边染色 ψ 为 $\psi(v_1 v_{11}) = 2$, $\psi(v_2 v_{21}) = 3$, $\psi(v_n v_{n1}) = 1$, $\psi(v_n v_1) = 4$, $\psi(v_{11} v_{14}) = \psi(v_{12} v_{13}) = \psi(v_{21} v_{22}) = \psi(v_{23} v_{24}) = \psi(v_{n1} v_{n3}) = \psi(v_{n2} v_{n4}) = 4$; 其余各边均按 $n \equiv 0 \pmod 3$ 情形中的染色方法进行染色. 此时, 各点的颜色数之和为 $S(v_1) = 25$, $S(v_2) = 24$, $S(v_{22}) = 12$, $S(v_{12}) = S(v_{23}) = 13$, $S(v_{13}) = S(v_{24}) = S(v_{n2}) = 14$, $S(v_{14}) = S(v_{n3}) = 15$, $S(v_{n4}) = 16$, 其余各点的颜色数之和均与 $n \equiv 0 \pmod 3$ 情形中相同.

当 $n \equiv 2 \pmod 3$ 且 $n \neq 5$ 时, 只需对 $n \equiv 1 \pmod 3$ 情形中的染法做如下调整: 边染色 ψ 为 $\psi(v_{n-4} v_{(n-4)1}) = 1$, $\psi(v_{n-3} v_{(n-3)1}) = 2$, $\psi(v_{n-2} v_{(n-2)1}) = 3$, $\psi(v_{n-4} v_{n-3}) = 4$, $\psi(v_{n-3} v_{n-2}) = 1$, $\psi(v_{n-2} v_{n-1}) = 2$, $\psi(v_{n-1} v_n) = 3$, $\psi(v_{(n-4)1} v_{(n-4)3}) = \psi(v_{(n-4)2} v_{(n-4)4}) = \psi(v_{(n-3)1} v_{(n-3)4}) = \psi(v_{(n-3)2} v_{(n-3)3}) = \psi(v_{(n-2)1} v_{(n-2)2}) = \psi(v_{(n-2)3} v_{(n-2)4}) = 4$; 其余各点均按 $n \equiv 1 \pmod 3$ 情形中的染色方法进行染色. 此时, 各点的颜色数之和为 $S(v_{n-2}) = 24$, $S(v_{n-1}) = 27$, $S(v_{(n-4)2}) = S(v_{(n-3)3}) = S(v_{(n-2)4}) = 14$, $S(v_{(n-4)3}) = S(v_{(n-3)4}) = 15$, $S(v_{(n-4)4}) = 16$, $S(v_{(n-2)2}) = 12$, $S(v_{(n-3)2}) = S(v_{(n-2)3}) = 13$; 其余各点的颜色数之和均与 $n \equiv 1 \pmod 3$ 情形中相同.

特别地, 当 $n=5$ 时, 给出 $C_5 \circ K_4$ 的 $\Delta + 1 - D(2) - \text{VSD}$ -边染色以及各点的颜色数之和, 如图 6 所示.

(ii) 当 $m \geq 5$ 时, 假设冠图 $C_n \circ H'$ 中图 H' 的阶数为 m , $C_n \circ H'$ 存在 $\chi'_{2-\Sigma}(C_n \circ H') \leq \Delta' + 1$. 下面根据 m 的奇偶性对 $(m+1)$ 阶图 H 进行归纳讨论.

当 m 为奇数时, H' 为 K_m , $\chi'_{2-\Sigma}(C_n \circ H') \leq \Delta' + 1$. 给 H' 增加一个点, 使得图 H 加上对应圈上的点所构成的图是 K_{m+2} , 且 $m+2$ 为奇数, $\Delta(C_n \circ H) = m+3$. 根据引理 6 可知, 图 K_{m+2} 存在 $m+2 - D(2) - \text{VSD}$ -边染色, 且每个点所缺的颜色不同. 因为冠图 $C_n \circ H$ 存在 $d(\Delta, \Delta) \leq 2$, 由引理 1 可知, 图 $C_n \circ H$ 至少需要 $(m+4)$ 种颜色. 故用剩余的 $1 + (m+4) - (m+2) = 3$ 种颜色去染圈 C_n 上的边.

不妨设用 $1, 2, \dots, (m+2)$ 种颜色对与 v_1 关联的 K_{m+2} 进行正常染色, 使得 $\bar{C}(v_1) = \{1\}$. 边 $v_n v_1$ 染颜色 1, 剩余的两种颜色 $m+3, m+4$ 染边 $v_1 v_2$. 设 $v_1 v_2$ 为颜色 $m+3$, 此时 v_1 点的颜色集和为 $\frac{(m+4)(m+3)}{2}$, 不同于 $S(v_{1j}) (1 \leq j \leq m)$. 用颜色 $1, 2, \dots, m+1, m+3$ 对与 v_n 关联的 K_{m+2} 进行正常

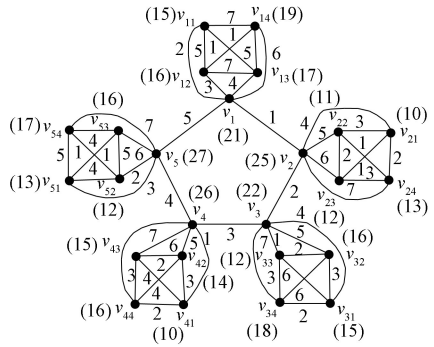


图 6 $C_5 \circ K_4$
Fig. 6 $C_5 \circ K_4$

染色,使得 $\bar{C}(v_n) = \{1\}$. 因为 $v_n v_1$ 的颜色为 1, 故还剩颜色 $m+2$ 和 $m+4$. 用颜色 $m+4$ 去染边 $v_{n-1} v_n$, 此时

$$S(v_n) = \frac{m^2 + 7m + 16}{2} \neq S(v_1) = \frac{m^2 + 7m + 12}{2},$$

且 $\bar{C}(v_1) = \{m+4\}$, $\bar{C}(v_n) = \{m+2\}$, $\bar{C}(v_i) = \{m+3, m+4, x\} (x \in [2, m+2])$. 易见染色方法是 2-距离和可区别的.

因为 v_1 点在 2-距离以内的同度点至多有 5 个, 且 $m \geq 5, m+4 \geq 9$, 按上述染色方法, 易做到 $D(2)$ -VSD-边染色. 故当 m 为奇数时, $\chi'_{2-\Sigma}(C_n \circ H) \leq \Delta + 1$.

当 m 为偶数时, 与 m 为奇数时的情形讨论类似. 由引理 6 知, 图 K_{m+2} 存在 $m+3$ - $D(2)$ -VSD-边染色, 且每个点所缺的颜色不同. 由冠图的结构特点和引理 1 可知, 图 $C_n \circ H$ 至少需要 $(m+4)$ 种颜色. 故用剩余的 $2+(m+4)-(m+3)=3$ 种颜色去染圈 C_n 上的边.

同理, 不妨用颜色 $1, 2, \dots, m+3$ 对与 v_1 关联的 K_{m+2} 进行正常染色, 使得 $\bar{C}(v_1) = \{1, 2\}$. 用剩余的 3 种颜色去染圈 C_n 上的边. 边 $v_n v_1$ 染颜色 1, 边 $v_1 v_2$ 染颜色 2. 此时 v_1 点的颜色集和为 $S(v_1) = \frac{m^2 + 7m + 12}{2}$, 不同于 $S(v_{1j}) (1 \leq j \leq m)$. 用颜色 $1, 2, \dots, m+2, m+4$ 对与 v_2 关联的 K_{m+2} 进行正常染色, 使得 $\bar{C}(v_2) = \{2, x\}, x \in \{1, 3, 4, \dots, m+2, m+4\}$. 因为边 $v_1 v_2$ 的颜色为 2, 故还剩颜色 x 和颜色 $m+3$. 用颜色 x 去染边 $v_2 v_3, S(v_2) \neq S(v_1)$ 满足条件. 此时 $\bar{C}(v_1) = \{m+4\}, \bar{C}(v_2) = \{m+3\}, \bar{C}(v_i) = \{m+4, y, z\} (y, z \in [1, m+3] \text{ 且 } y \neq z)$. 易见染色方法是 2-距离和可区别的.

同理, 按照上述染色方法, 易做到 $D(2)$ -VSD-边染色. 故当 m 为偶数时, $\chi'_{2-\Sigma}(C_n \circ H) \leq \Delta + 1$.

② 当简单图 H 上的每个点不全是最大度点时, 根据最大度点的情况分以下两种情形讨论.

(i) 当 H 有唯一的最大度点时, 不妨设图 H 的最大度最大为 $P, \Delta(C_n \circ H) = P + 2$, 且存在 $d(\Delta, \Delta) \leq 2$, 故图 $C_n \circ H$ 至少需要 $(P + 3)$ 种颜色. 此时 $P \geq 4$, 且 $C_{P+3}^{P+2} = P + 3 \geq 7$, 这 C_{P+3}^{P+2} 种组合的和互不相同. 在圈 C_n 上 2-距离内的点至多有 5 个, 易做到 $D(2)$ -VSD-边染色. 而对于 H , 用 P 种颜色即可. 此时, P 度点和 $(P+2)$ 度点易做到 $D(2)$ -VSD-边染色. 当图 H 的最大度小于 P 时, 显然. 故当 H 有唯一最大度点时结论成立.

(ii) 当 H 至少有 2 个最大度点时, 不妨设图 H 的最大度最大为 P , 故图 H 至少需要 $(P+1)$ 种颜色实现 $D(2)$ -VSD-边染色. 图 $C_n \circ H$ 至少需要 $(P+3)$ 种颜色. $C_{P+3}^{P+1} = \frac{(P+3)(P+2)}{2} P + 2 \geq 2P + 3$, 这 $(2P+3)$ 种组合的和互不相同, 因此图 H 能做到 $(P+1)$ - $D(2)$ -VSD-边染色. 此时, P 度点与 $(P+2)$ 度点易做到 $D(2)$ -VSD-边染色. 圈 C_n 上的点同情形(i). 故当 H 至少有 2 个最大度点时结论成立.

综上所述, $G \circ H$ 存在 $(\Delta + 1)$ - $D(2)$ -VSD-边染色.

推论 1 设 P_n 是 $n(n \geq 2)$ 阶的路, H 是 $m(m \geq 1)$ 阶的连通图, 则有 $\chi'_{2-\Sigma}(P_n \circ H) \leq \Delta + 1$.

证明: 由于 $P_n \circ H$ 与 $C_n \circ H$ 的结构相同, 故类似定理 2 的证明可知结论成立.

参 考 文 献

[1] 田双亮, 杨环, 杨青, 等. 路的联的邻和可区别边染色 [J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(9): 29-35. (TIAN S L, YANG H, YANG Q, et al. Neighbor Sum Distinguishing Edge Coloring of the Join of Paths [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2020, 55(9): 29-35.)

[2] 强会英, 姚丽. 无 K_4 -子式图的 2-距离和可区别边染色 [J]. 山东大学学报(理学版), 2021, 56(11): 83-86. (QIANG H Y, YAO L. 2-Distance Sum Distinguishing Edge Coloring of K_4 -Minor-Free Graphs [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2021, 56(11): 83-86.)

[3] 姚丽, 强会英, 杨笑蕊. 两类笛卡尔积图的邻和可区别全染色 [J]. 兰州交通大学学报, 2020, 39(3): 125-129. (YAO L, QIANG H Y, YANG X R. The Neighbor Sum Distinguishing Total Coloring of Two Types Cartesian Graph [J]. Journal of Lanzhou Jiaotong University, 2020, 39(3): 125-129.)

- [4] NOGA A. Combinatorial Nullstellensatz [J]. *Combinatorics, Probability and Computing*, 1999, 8(1/2): 7-29.
- [5] CHENG X H, DING L H, WANG G H, et al. Improved Bounds for Neighbor Sum (Set) Distinguishing Choosability of Planar Graphs [J]. *Discrete Mathematics*, 2020, 343(7): 111856-1-111856-19.
- [6] 姚丽. 几类图的 2-距离和可区别染色 [D]. 兰州: 兰州交通大学, 2021. (YAO L. 2-Distance Sum Distinguishing Coloring of Several Kinds of Graphs [D]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2021.)
- [7] 杨笑蕊, 强会英, 李雨虹. 两类冠图的邻和可区别全染色 [J]. *兰州交通大学学报*, 2019, 38(5): 114-117. (YANG X R, QIANG H Y, LI Y H. Neighbor Sum Distinguishing Total Coloring of Two Types of Corona Graphs [J]. *Journal of Lanzhou Jiaotong University*, 2019, 38(5): 114-117.)
- [8] BURRIS A C, SCHELP R H. Vertex-Distinguishing Proper Edge-Colorings [J]. *Journal of Graph Theory*, 1997, 26(2): 73-82.
- [9] BAZGAN C, HARKAT-BENHAMDINE A, LI H, et al. On the Vertex-Distinguishing Proper Edge-Colorings of Graphs [J]. *Journal of Combinatorial Theory: Series B*, 1999, 75(2): 288-301.
- [10] ZHANG Z F, LIU L Z, WANG J F. Adjacent Strong Edge Coloring of Graph [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2002, 15(5): 623-626.
- [11] FLANDRIN E, MARCZYK A, PRZYBYLO J, et al. Neighbor Sum Distinguishing Index [J]. *Graphs and Combinatorics*, 2013, 29(5): 1329-1336.
- [12] PILŚNIAK M, WOŹNIAK M. On the Total-Neighbor-Distinguishing Index by Sums [J]. *Graphs and Combinatorics*, 2015, 31(3): 771-782.
- [13] 潘文华, 徐常青. 无 K_4 -图子式的图的邻和可区别边染色 [J]. *数学进展*, 2017, 46(6): 839-847. (PAN W H, XU C Q. Neighbor Sum Distinguishing Edge Colorings of K_4 -Minor Free Graphs [J]. *Advances in Mathematics*, 2017, 46(6): 839-847.)
- [14] 张忠辅, 李敬文, 陈祥恩, 等. 图的距离不大于 β 的任意两点可区别的边染色 [J]. *数学学报(中文版)*, 2006, 49(3): 703-708. (ZHANG Z F, LI J W, CHEN X E, et al. $D(\beta)$ -Vertex-Distinguishing Proper Edge-Coloring of Graphs [J]. *Acta Mathematica Sinica (Chinese Series)*, 2006, 49(3): 703-708.)
- [15] YU X W, WANG G H, WU J L, et al. Neighbor Sum Distinguishing Edge Coloring of Subcubic Graphs [J]. *Acta Mathematica Sinica (English Series)*, 2017, 33(2): 252-262.
- [16] 刘欢, 强会英, 王洪申, 等. 树图的 2-距离和可区别染色 [J]. *山东大学学报(理学版)*, 2024, 59(2): 47-52. (LIU H, QIANG H Y, WANG H S, et al. 2-Distance Sum Distinguishing Coloring of Trees [J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2024, 59(2): 47-52.)

(责任编辑: 赵立芹)