

含有疫苗接种项离散传染病模型 SIVS 的稳定性和分岔分析

王 轲, 雷策宇, 韩晓玲

(西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070)

摘要: 首先, 用下代矩阵的方法求解所建立的传染病模型 SIVS (Susceptible-Infectious-Immune-Susceptible) 的基本再生数 R_0 , 通过该阈值得到无病平衡点一直存在, 地方病平衡点仅当 $R_0 > 1$ 时才存在, 进而确定疾病消亡和持久的条件. 其次, 借助 Jacobi 矩阵的性质、Jury 判据以及 Lyapunov 函数的构造等方法证明该模型在平衡点处的稳定性以及产生分岔的情形, 结果表明: 当 $R_0 \leq 1$ 时, 无病平衡点全局渐近稳定, 且在 $R_0 = 1$ 时产生翻转分岔; 当 $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点局部渐近稳定, 如果忽略现实中对接触率 β 的限制, 模型在地方病平衡点处会产生倍周期分岔甚至混沌现象. 最后, 结合数值模拟的图像和敏感性指数法验证理论分析结果, 并得出提高疫苗接种率和恢复率可有效降低疾病发病率的结论.

关键词: 离散模型; 模型 SIVS; 疫苗接种; 稳定性; 分岔

中图分类号: O175.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)02-0331-09

Stability and Bifurcation Analysis of Discrete SIVS Epidemic Model with Vaccination Items

WANG Ke, LEI Ceyu, HAN Xiaoling

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Firstly, the basic reproduction number R_0 of the SIVS (Susceptible-Infectious-Immune-Susceptible) epidemic model is solved by the method of next generation matrix, through the threshold, the disease-free equilibrium point always exists, and the endemic equilibrium point only exists when $R_0 > 1$, furthermore, the conditions of extinction and persistence of the disease are determined. Secondly, the stability and the bifurcation situations of the model at the equilibrium point are proved by the properties of Jacobian matrix, Jury criteria and the construction of Lyapunov function. The results show that when $R_0 < 1$, the disease-free equilibrium point is globally asymptotically stable, and the transcritical bifurcation occurs when $R_0 = 1$. When $R_0 > 1$, the endemic equilibrium point is locally asymptotically stable, if the limitation on contact rate β in reality is ignored, the model will produce the period-doubling bifurcation and even chaotic phenomena at the endemic equilibrium point. Finally, numerical simulation and sensitivity index method are used to

收稿日期: 2024-04-02. 网络首发日期: 2024-07-01.

第一作者简介: 王 轲(1999—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事常微分方程边值问题及其应用的研究, E-mail: wangke202212@126.com. **通信作者简介:** 韩晓玲(1978—), 女, 汉族, 博士, 教授, 从事常微分方程边值问题及其应用的研究, E-mail: hanxiaoling9@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12161079) 和西北师范大学研究生科研资助项目(批准号: 2023KYZZ-S116).

网络首发地址: <https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20240628.1329.001>.

verify the theoretical analysis results, it is concluded that improving the vaccination rate and recovery rate can effectively reduce the incidence of the disease.

Keywords: discrete model; SIVS model; vaccination; stability; bifurcation

传染病严重影响人们的日常生活和社会经济发展,因此通过分析传染病模型的动力学行为进而揭示疾病的传播规律和发展趋势有一定的意义.目前,关于传染病连续模型的研究已取得许多成果,但对离散模型的研究相对较少,而离散数据在现实中更具合理性,且有更丰富的动力学行为. Córdova-Lepe 等^[1]考虑到连续模型 SIR (Susceptible-Infectious-Removed) 的脉冲流具有时间间隔,通过引入 Euler 离散化的处理方法建立了相应的离散模型,类比发现离散模型中理论与数据具有更好的相关性.目前,关于离散模型 SIR 和 SIS (Susceptible-Infectious-Susceptible) 的动力学行为研究已有很多结果^[2-4]. Lu 等^[5]研究了具有广义非单调饱和和发生率的传染病模型 SIRS (Susceptible-Infectious-Removed-Susceptible) 在平衡点处的稳定性及产生的分岔情形.宋宇恒等^[6]对非线性 SEIR (Susceptible-Exposed-Infectious-Removed) 传染病模型的平稳分布进行了研究.除上述常见的连续和离散传染病模型的应用外,随机传染病模型的应用也非常广泛^[7-9].

疫苗接种在天花、麻疹、流感等一些传染病预防中具有重要作用,能有效降低疾病的发病率.因此,考虑疫苗接种的传染病模型 SIVS 的应用也越来越普遍^[10-11]. Xiang 等^[12]研究了一类含有疫苗接种的离散传染病模型 SIRS,并在一些限制条件下证明了系统的稳定性,同时利用数值模拟验证了理论分析结果.除对模型动力学行为的研究外, Parsamanesh 等^[13]用向前 Euler 法将连续模型离散化,进一步研究了离散化步长对系统动力学行为的影响.在仓室模型 SIVS 的研究中,免疫群体除常见的有效疫苗接种的个体外还包括经感染恢复后获得暂时免疫的个体^[14].上述研究均为总种群规模是常量的传染病模型,如果考虑因病死亡率则种群总规模显然不再为常量,例如,对具有饱和发病率的离散传染病模型 SIVS 的分析^[15].对于连续传染病模型 SIVS 的动力学分析, Parsamanesh^[16]给出了系统一致持久性以及正解存在性的证明,并用几何方法验证了地方病平衡点的全局渐近稳定性.

由于感染者自身的差异性以及接受治疗的程度不同,部分感染者可恢复获得暂时免疫,而部分感染者仅被治愈,仍为易感者.本文首先建立一类考虑感染者差异性的离散传染病模型 SIVS;其次,求解该模型的平衡点及基本再生数,研究该模型在平衡点处的稳定性,并分析该模型在平衡点处产生的分岔情况;最后利用数值模拟产生的分岔图、Lyapunov 指数图、复平面上的特征值图以及不同参数对应的解图验证理论分析结果,并利用敏感指数法分析模型中重要参数对疾病发病率的影响.

1 模型及分析

1.1 模型构建

用 S_n, I_n, V_n 分别表示整个人群中易感者、感染者、免疫者在 n 时刻的数量,用 N_n 表示 n 时刻种群的总规模,则 $N_n = S_n + I_n + V_n$. 本文模型做如下假设:在任意阶段人口的自然死亡率相同;人口出生率等于自然死亡率;疾病以标准发生率 $\beta SI/N$ 进行传播;免疫群体存在免疫丧失率.疾病的传播流程如图 1 所示.模型中所有参数均为正,参数的生物学意义如下:易感者 S 表示对疾病没有免疫且易被感染的个体;感染者 I 表示有能力传播疾病的个体;免疫者 V 表示通过疫苗接种或经感染恢复后对疾病暂时免疫的个体;人口规模 N 表示人口总数;接触率 β 表示一个感染者在单位时间内成功接触的易感者数;易感者疫苗接种率 δ 表示易感人群中接种疫苗的人所占比例;新生儿疫苗接种率 q 表

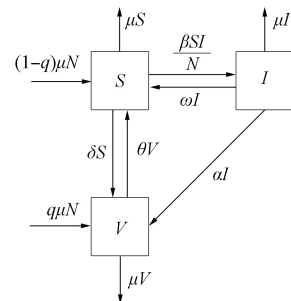


图 1 疾病传播流程

Fig. 1 Flow chart of disease transmission

示新增人群中接种疫苗的人所占比例; 免疫丧失率 θ 表示免疫者丧失免疫能力的速率; 自然死亡率 μ 表示自然因素导致的个体死亡比率; 治愈率 ω 表示感染个体经治愈但对疾病不免疫的比率; 恢复率 α 表示感染个体恢复后获得暂时免疫的比率. 用差分方程系统建立模型:

$$\begin{cases} S_{n+1} = (1-q)\mu N_n + (1-\mu-\delta)S_n - \frac{\beta S_n I_n}{N_n} + \omega I_n + \theta V_n, \\ I_{n+1} = (1-\alpha-\omega-\mu)I_n + \frac{\beta S_n I_n}{N_n}, \\ V_{n+1} = (1-\mu-\theta)V_n + \alpha I_n + \delta S_n + q\mu N_n. \end{cases} \quad (1)$$

将系统(1)的 3 个式子相加得 $N_{n+1} = N_n$, 显然人口规模为一个常数, 记作 N , 则 $V_n = N - S_n - I_n$. 因此模型(1)可简化为

$$\begin{cases} S_{n+1} = (1-q)\mu N + (1-\mu-\delta-\theta)S_n - \frac{\beta S_n I_n}{N} + (\omega-\theta)I_n + \theta N, \\ I_{n+1} = (1-\alpha-\omega-\mu)I_n + \frac{\beta S_n I_n}{N}. \end{cases} \quad (2)$$

为保证模型(1)在初值条件 $(S(0), I(0), V(0))$ 下的解非负, 需满足以下条件:

$$\begin{cases} \mu + \delta + \theta + \beta < 1, \\ \alpha + \omega + \mu < 1, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $S(0) > 0$, $I(0) \geq 0$, $V(0) \geq 0$.

1.2 平衡点的求解

由于该离散模型平衡点处满足 $S_{n+1} = S_n$, $I_{n+1} = I_n$, 故模型(2)的平衡点等价于如下系统的解:

$$\begin{cases} (1-q)\mu N - (\mu + \delta + \theta)S - \frac{\beta SI}{N} + (\omega - \theta)I + \theta N = 0, \\ \frac{\beta SI}{N} - (\alpha + \omega + \mu)I = 0. \end{cases} \quad (4)$$

由系统(4)的第二个方程知, $I=0$ 或 $\frac{\beta S}{N} = \alpha + \omega + \mu$.

当 $I=0$ 时,

$$S = \frac{(1-q)\mu N + \theta N}{\mu + \delta + \theta},$$

此时为模型(2)的无病平衡点 E^0 :

$$E^0 = (S^0, I^0) = \left(\frac{(1-q)\mu N + \theta N}{\mu + \delta + \theta}, 0 \right). \quad (5)$$

当 $\frac{\beta S}{N} = \alpha + \omega + \mu$ 时,

$$\begin{aligned} S &= \frac{(\alpha + \omega + \mu)N}{\beta}, \\ I &= \frac{\beta[(1-q)\mu + \theta]N - (\mu + \delta + \theta)(\alpha + \omega + \mu)N}{\beta(\alpha + \mu + \theta)}, \end{aligned}$$

此时为模型(2)的地方病平衡点 E^* :

$$E^* = (S^*, I^*) = \left(\frac{(\alpha + \omega + \mu)N}{\beta}, \frac{\beta[(1-q)\mu + \theta]N - (\mu + \delta + \theta)(\alpha + \omega + \mu)N}{\beta(\alpha + \mu + \theta)} \right). \quad (6)$$

下面用文献[17]的下代矩阵方法求解模型(2)的基本再生数 R_0 . 定义

$$\mathcal{F} = \frac{\beta SI}{N}, \quad \mathcal{V} = (\alpha + \omega + \mu)I,$$

在 E^0 处分别求 \mathcal{F}, \mathcal{V} 关于 I 的偏导得:

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial I} \Big|_{E^0} = \frac{\beta S^0}{N} = \frac{[(1-q)\mu + \theta]\beta}{\mu + \delta + \theta},$$

$$V = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial I} \Big|_{E^0} = \alpha + \omega + \mu,$$

故

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\beta[(1-q)\mu + \theta]}{(\alpha + \omega + \mu)(\mu + \delta + \theta)}, \quad (7)$$

R_0 的值表示在一个完全易感的人群中引入一个感染者后新增的感染人数. 当 $R_0 < 1$ 时, 疾病将会消亡; 当 $R_0 > 1$ 时, 疾病持续存在. 由式(5),(6)得:

$$S^0 = \frac{N[(1-q)\mu + \theta]}{\mu + \delta + \theta} = \frac{(\alpha + \omega + \mu)N}{\beta} R_0, \quad (8)$$

$$I^* = \frac{\beta[(1-q)\mu + \theta]N - (\mu + \delta + \theta)(\alpha + \omega + \mu)N}{\beta(\alpha + \mu + \theta)} = \frac{(\mu + \delta + \theta)(\alpha + \omega + \mu)N(R_0 - 1)}{\beta(\alpha + \mu + \theta)}. \quad (9)$$

显然模型(2)的无病平衡点总存在, 地方病平衡点仅在 $R_0 > 1$ 时才存在.

2 稳定性分析

定理 1 当 $R_0 < 1$ 时, 模型(2)在无病平衡点 E^0 处是局部渐近稳定的.

证明: 模型(2)在 (S, I) 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(S, I) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I}{N} + (1 - \mu - \delta - \theta) & \omega - \theta - \frac{\beta S}{N} \\ \frac{\beta I}{N} & \frac{\beta S}{N} + 1 - (\alpha + \omega + \mu) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

故模型(2)在 E^0 的 Jacobi 矩阵为

$$J^0 = J(E^0) = \begin{pmatrix} 1 - \mu - \delta - \theta & \omega - \theta - \frac{\beta S^0}{N} \\ 0 & 1 - (\alpha + \omega + \mu)(1 - R_0) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

根据代数运算得 J^0 的特征值分别为

$$\lambda_1 = 1 - \mu - \delta - \theta, \quad \lambda_2 = 1 - (\alpha + \omega + \mu)(1 - R_0).$$

结合条件(3), $|\lambda_1| < 1$ 显然成立. 若 $|\lambda_2| < 1$ 也成立, 则需满足 $R_0 < 1$. 故当 $R_0 < 1$ 时, J^0 所有特征值的模都小于 1, 模型(2)在无病平衡点 E^0 处是局部渐近稳定的.

定理 2 当 $R_0 > 1$ 时, 模型(2)在地方病平衡点 E^* 处是局部渐近稳定的.

证明: 模型(2)在 E^* 处的 Jacobi 矩阵为

$$J^* = J(E^*) = \begin{pmatrix} 1 - \mu - \delta - \theta - \frac{\beta I^*}{N} & -\alpha - \omega - \theta \\ \frac{\beta I^*}{N} & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

故

$$\text{tr}(J^*) = 2 - \mu - \delta - \theta - \frac{\beta I^*}{N},$$

$$\det(J^*) = 1 - \mu - \delta - \theta - \frac{\beta I^*}{N} + \frac{\beta I^*}{N}(\alpha + \mu + \theta).$$

令

$$b_1 = \mu + \delta + \theta + \frac{\beta I^*}{N}, \quad b_2 = \frac{\beta I^*}{N}(\alpha + \mu + \theta),$$

则

$$\text{tr}(J^*) = 2 - b_1, \quad \det(J^*) = 1 - b_1 + b_2.$$

记模型(2)在 E^* 处的特征方程为

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(J^*) + \det(J^*), \quad (13)$$

根据二维 Jury 判据可知, 当以下 3 个条件成立时, J^* 所有特征值的模都小于 1:

- 1) $p(1) > 0 \Leftrightarrow 1 - \text{tr}(\mathbf{J}^*) + \det(\mathbf{J}^*) > 0$;
- 2) $p(-1) > 0 \Leftrightarrow 1 + \text{tr}(\mathbf{J}^*) + \det(\mathbf{J}^*) > 0$;
- 3) $a_0 < a_n \Leftrightarrow \det(\mathbf{J}^*) < 1$.

当 $\text{tr}(\mathbf{J}^*) > 0$ 时, 由于 $b_2 > 0$, 故 $\text{tr}(\mathbf{J}^*) < 1 + \det(\mathbf{J}^*)$ 成立. 当 $\text{tr}(\mathbf{J}^*) < 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 |\text{tr}(\mathbf{J}^*)| - 1 - \det(\mathbf{J}^*) &= -\text{tr}(\mathbf{J}^*) - 1 - \det(\mathbf{J}^*) = 2b_1 - b_2 - 4 = \\
 &2\left(\mu + \delta + \theta + \frac{\beta I^*}{N}\right) - \frac{\beta I^*}{N}(\alpha + \mu + \theta) - 4 < \\
 &- 2 - \frac{\beta I^*}{N}(\alpha + \mu + \theta) + 2\frac{\beta I^*}{N} < -\frac{\beta I^*}{N}(\alpha + \mu + \theta) < 0,
 \end{aligned}$$

故 $-\text{tr}(\mathbf{J}^*) < 1 + \det(\mathbf{J}^*)$ 成立. 又因为 $\frac{\beta I^*}{N} > \frac{\beta I^*}{N}(\alpha + \mu + \theta)$, 所以 $-b_1 + b_2 < 0$, 即 $1 + \det(\mathbf{J}^*) < 2$ 也成立.

综上所述, 当 $R_0 > 1$ 时, \mathbf{J}^* 所有特征值的模都小于 1, 模型(2)在地方病平衡点处是局部渐近稳定的.

定理 3 当 $R_0 \leq 1$ 时, 模型(2)在无病平衡点 E^0 处是全局渐近稳定的.

证明: 在无病平衡点 E^0 处构造 Lyapunov 函数 $V(I_n) = I_n$, 由式(8)得 $R_0 = \frac{\beta S_n}{(\alpha + \omega + \mu)N}$, 因此

$$\begin{aligned}
 V(I_{n+1}) - V(I_n) &= I_{n+1} - I_n = \frac{\beta S_n I_n}{N} + (1 - \alpha - \omega - \mu)I_n - I_n = \\
 &\frac{\beta S_n I_n}{N} - (\alpha + \omega + \mu)I_n + V(I_n) = \\
 &(\alpha + \omega + \mu)\left(\frac{\beta S_n}{N(\alpha + \omega + \mu)} - 1\right)I_n + V(I_n) \leq \\
 &\left(\frac{\beta S_n}{(\alpha + \omega + \mu)N} - 1\right)I_n + V(I_n) = (R_0 - 1)I_n + V(I_n).
 \end{aligned}$$

当 $R_0 \leq 1$ 时, $V(I_{n+1}) - V(I_n) \leq (R_0 - 1)I_n \leq 0$, 即当 $R_0 \leq 1$ 时, 模型(2)在无病平衡点 E^0 处是全局渐近稳定的.

3 分岔分析

当模型中参数变化影响平衡点的稳定性时, 会产生分岔且相应 Jacobi 矩阵特征值的模等于 1. 由分岔理论知: 当特征值 $\lambda = 1$ 时, 产生跨临界分岔; 当 $\lambda = -1$ 时, 产生倍周期分岔; 当有一对共轭复根且模为 1 时, 产生 Neimark-Sacker 分岔.

定理 4 模型(2)在无病平衡点 E^0 处仅当 $R_0 = 1$ 时, 产生跨临界分岔, 没有产生倍周期分岔和 Neimark-Sacker 分岔.

证明: 由条件(3)得 \mathbf{J}^0 的特征值 $0 < \lambda_1 < 1$ ($|\lambda_1| \neq 1$). 若 $\lambda_2 = 1$, 则 $R_0 = 1$, 此时模型(2)在 E^0 处产生跨临界分岔.

假设 $\lambda_2 = -1$ 成立, 则有 $(\alpha + \omega + \mu)(1 - R_0) = 2$, 即

$$R_0 = 1 - \frac{2}{\alpha + \omega + \mu}.$$

结合条件(3)知此时 $R_0 < 0$, 与 R_0 的定义矛盾, 因此模型(2)在无病平衡点 E^0 处不会产生倍周期分岔. 显然 λ_1, λ_2 均为实数, 故也不会产生 Neimark-Sacker 分岔.

定理 5 模型(2)在地方病平衡点 E^* 处均不会产生跨临界分岔、倍周期分岔和 Neimark-Sacker 分岔.

证明: 反设 $\lambda = 1$ 是特征方程(13)的一个解, 则 $\lambda = 1$ 为 \mathbf{J}^* 的一个特征值, 从而 $1 - \text{tr}(\mathbf{J}^*) + \det(\mathbf{J}^*) = 0$, 即 $b_2 = 0$. 由式(9)得

$$\frac{\beta I^*}{N} = \frac{(\mu + \delta + \theta)(\alpha + \omega + \mu)(R_0 - 1)}{\alpha + \mu + \theta},$$

显然当且仅当 $R_0 = 1$ 时, $b_2 = 0$ 才成立, 但这与地方病平衡点在 $R_0 > 1$ 时存在矛盾, 因此模型(2)在 E^* 处不会产生跨临界分岔.

假设 $\lambda = -1$ 是特征方程(13)的一个解, 则 $\lambda = -1$ 也为 J^* 的一个特征值, 从而 $P(-1) = 0$, 即

$$\begin{aligned} 1 + \text{tr}(J^*) + \det(J^*) &= 4 - 2b_1 + b_2 = \\ 4 - 2\left(\mu + \delta + \theta + \frac{\beta I^*}{N}\right) + \frac{\beta I^*}{N}(\alpha + \mu + \theta) &= \\ 2[2 - (\mu + \delta + \theta)] - \frac{\beta I^*}{N}[2 - (\alpha + \mu + \theta)] &= 0, \end{aligned}$$

且

$$\frac{\beta I^*}{N} = \frac{2[2 - (\mu + \delta + \theta)]}{2 - (\alpha + \mu + \theta)}. \tag{14}$$

显然与 $R_0 > 1$ 时, $P(-1) > 0$ 矛盾. 故模型(2)在地方病平衡点 E^* 处不会产生倍周期分岔.

若 J^* 处的特征方程记为 $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$, 则

$$a_1^2 - 4a_2 = (-2 + b_1)^2 - 4(1 - b_1 + b_2) = b_1^2 - 4b_2 = \left(\mu + \delta + \theta - \frac{\beta I^*}{N}\right)^2 > 0.$$

显然 J^* 的特征值均为实数, 故模型(2)在地方病平衡点 E^* 处也不会产生 Neimark-Sacker 分岔.

注 1 上述分岔分析是基于条件(3)对 β 的限制, 若忽略该条件限制, 则由式(9)和式(14)得

$$R_0 = \frac{2[2 - (\mu + \delta + \theta)]}{2 - (\alpha + \mu + \theta)} \frac{\alpha + \mu + \theta}{(\mu + \delta + \theta)(\alpha + \omega + \mu)} + 1.$$

此时模型(2)在地方病平衡点 E^* 处可产生 2, 4, 8, ... 形式的倍周期分岔.

4 数值模拟及分析

下面通过数值模拟验证模型(1)的动力学行为, 并考察疫苗接种率 q 和恢复率 α 对疾病发病率的影响. 取初始值 $S(0) = 1, I(0) = 0.5, V(0) = 0.5$, 将接触率 β 作为分岔参数, 其他参数的取值分别为 $A = 0.25, q = 0.15, \mu = 0.4, d = 0.05, \alpha = 0.15, \theta = 0.25, \gamma = 0.3, \delta = 0.2, \omega = 0.15$.

图 2 为易感人群和感染人群关于接触率 $\beta \in [0, 5]$ 的分岔图和 Jacobi 矩阵关于 β 的 Lyapunov 指数图. 由图 2(A), (B) 可见: 当 $\beta \in [0, 0.802]$ 时, $R_0 < 1$, 无病平衡点是全局渐近稳定的; 当 $\beta = 0.802$ 时, $R_0 = 1$, 此时无病平衡点处产生了一个跨临界分岔; 当 $\beta > 0.802$ 时, $R_0 > 1$, 出现地方病平衡点且地方病平衡点局部渐近稳定; 当 $\beta = 3.839$ 时, 地方病平衡点不稳定且产生 2, 4, 8... 形式的倍周期分岔. 随着 β 的继续增大, 周期变得任意从而出现混沌现象. 由图 2(C) 可得到相同的稳定性结论, $\beta = 0.802$ 和 $\beta = 3.839$ 处的 Lyapunov 指数值都非负, 分别对应跨临界分岔和倍周期分岔的产生.

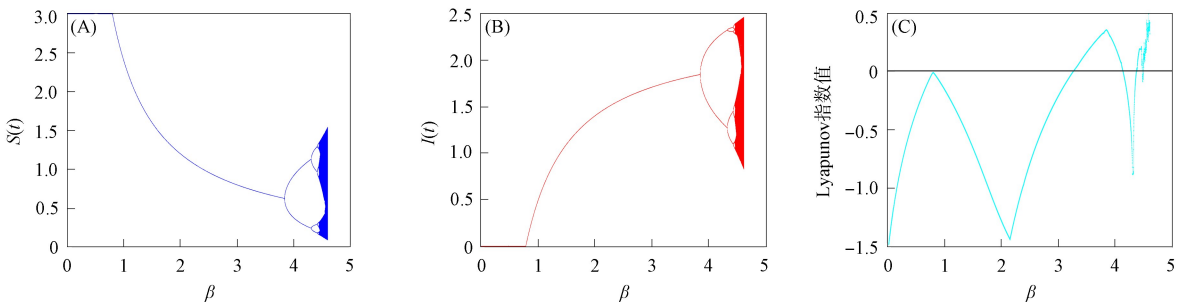


图 2 易感人群(A)和感染人群(B)关于 β 的分岔图及 Jacobi 矩阵关于 β 的 Lyapunov 指数图(C)
 Fig. 2 Bifurcation diagrams for susceptible population (A), infected population (B) in terms of β and Lyapunov exponent diagram (C) of Jacobian matrix in terms of β

图 3 为当 $\beta \in [0, 5]$ 时, Jacobi 矩阵对应的特征值. 由图 3 可见, 模型(1)的 Jacobi 矩阵有一个 $\lambda = 1$ 和 $\lambda = -1$ 的特征值, 且不存在模为 1 的共轭复特征值, 说明该模型可产生跨临界分岔和倍周期分岔,

但不会产生 Neimark-Sacker 分岔. 图 4 和图 5 分别为当其他参数不变, β 取不同值时, 模型(1)对应的解和相图. 由图 4 和图 5 可见: 当 $\beta=0.5$ 时, 模型(1)只有无病平衡点且全局渐近稳定, 疾病将消亡; 当 $\beta=2$ 时, 地方病平衡点局部渐近稳定, 疾病将持续存在; 当 $\beta=4$ 时, 地方病平衡点不稳定, 且产生倍周期分岔; 当 $\beta=4.65$ 时, 模型(1)产生混沌现象, 此时疾病的爆发随机不可控. 图 6 是模型(1)在地方病平衡点局部渐近稳定的情形下($\beta=2$), 分别改变 q 和 α 的值所得模型的解. 由图 6 可见, 提高疫苗接种率和疾病的恢复率都是控制疾病的有效措施.

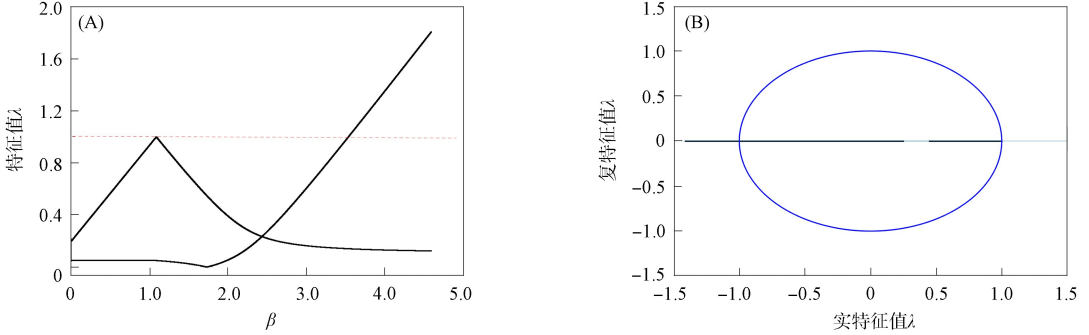


图 3 当 $\beta \in [0, 5]$ 时, Jacobi 矩阵对应的特征值

Fig. 3 Corresponding eigenvalues of Jacobian matrix when $\beta \in [0, 5]$

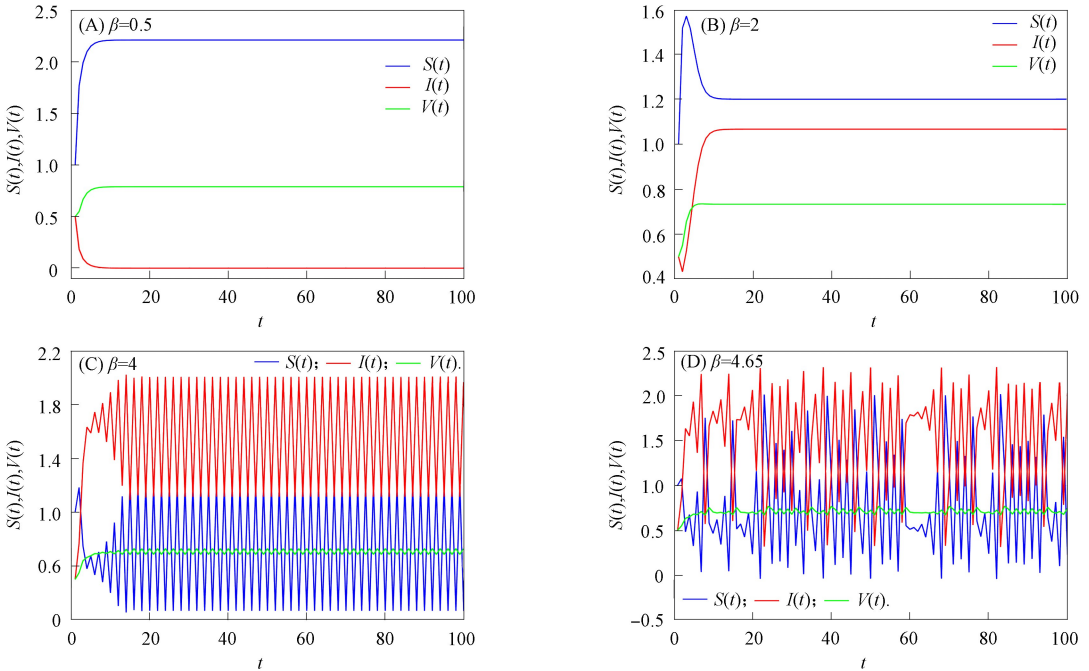


图 4 β 取不同值时模型(1)的解

Fig. 4 Solutions of model (1) for different values of β

根据 R_0 的表达式易得接触率 β 越小, R_0 越小, 此时疾病越可控. 相反, α, ω, δ 与 R_0 呈负相关, 其值越大, R_0 越小, 疾病越可控. 特别地, 假设疫苗接种率 $q=0$, 此时

$$\tilde{R}_0 = \frac{\beta(\mu + \theta)}{(\alpha + \omega + \mu)(\mu + \delta + \theta)},$$

显然 $\tilde{R}_0 > R_0$, 说明 q 越大, R_0 越小, 疾病越可控.

下面用敏感性指数法^[18-19]分析免疫丧失率 θ 和自然死亡率 μ 对 R_0 的影响:

$$\gamma_{\theta}^{R_0} = \frac{\theta(\delta + q\mu)}{[(1 - q)\mu + \theta](\mu + \delta + \theta)} > 0, \tag{15}$$

$$\gamma_{\mu}^{R_0} = \frac{\mu[(1 - q)(\alpha + \omega + \mu)(\mu + \delta + \theta) - (\alpha + \omega + \delta + \theta + 4\mu)((1 - q)\mu + \theta)]}{[(1 - q)\mu + \theta](\alpha + \omega + \mu)(\mu + \delta + \theta)} < 0, \tag{16}$$

式(15),(16)表明,增大自然死亡率 μ 或减小免疫丧失率 θ 都有利于疾病的控制. 因此,政府相关部门可综合考虑上述影响因素,进而对传染病的控制提出合理的预防干预措施.

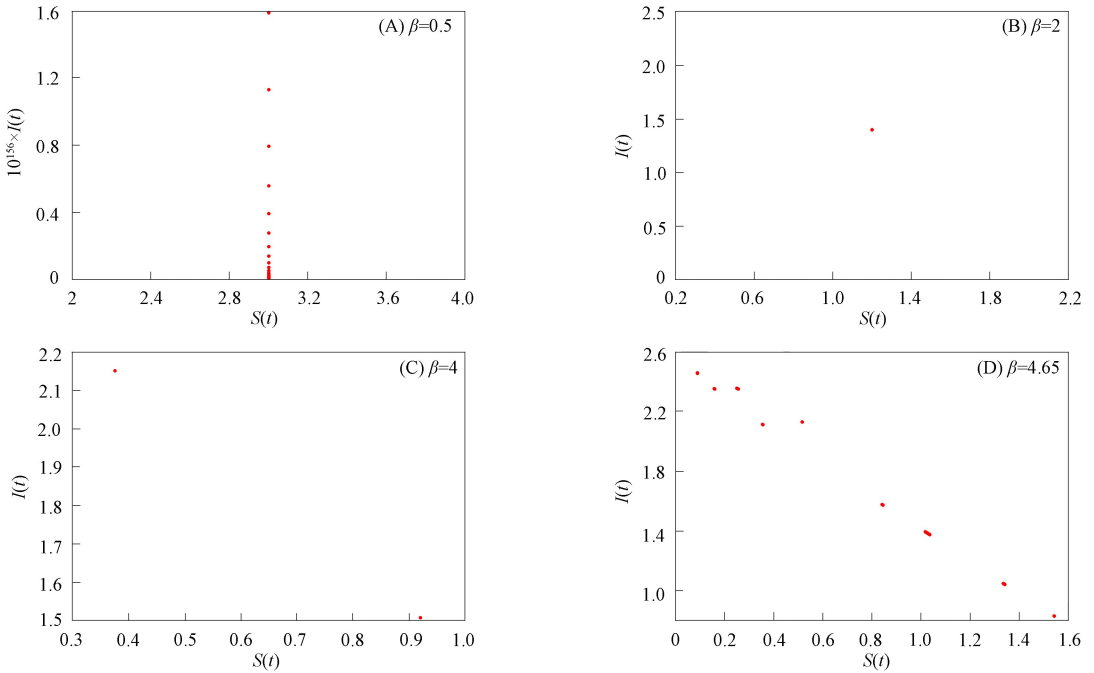


图 5 β 取不同值时模型(1)的相图

Fig. 5 Phase diagrams for different values of β

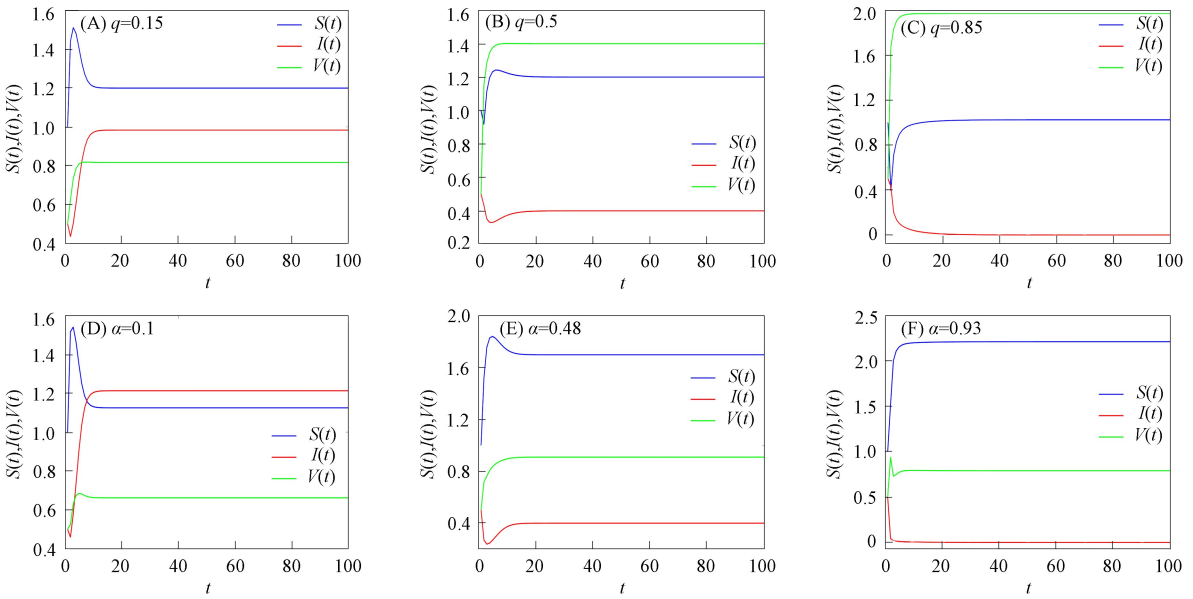


图 6 当 $\beta=2$ 时,不同 q, α 值对应模型(1)的解

Fig. 6 Corresponding solutions of model (1) for different values of q and α when $\beta=2$

综上所述,本文建立了一类离散传染病模型 SIVS,并通过理论方法得到了该模型在平衡点处的稳定性结论:当 $R_0 \leq 1$ 时,无病平衡点全局渐近稳定且不存在地方病平衡点;当 $R_0 > 1$ 时,地方病平衡点局部渐近稳定.此外,本文还利用分岔理论对该模型在平衡点处是否产生以及产生的分岔类型给出证明,只有当 $R_0 = 1$ 时,该模型才会产生跨临界分岔.实际应用中总会存在隔离检疫等措施干预 β 值,因此本文通过数值模拟得到了所建立模型更丰富的动力学行为,所得结果有利于人们对疾病的了解以便相关部门实施预防干预措施.

参 考 文 献

- [1] CÓRDOVA-LEPE F, GUTIÉRREZ R, VILCHES-PONCE K. Analysis of Two Discrete Forms of the Classic Continuous SIR Epidemiological Model [J]. *Journal of Difference Equations and Applications*, 2019, 26(1): 1-24.
- [2] LIU Y, LIU X J. Bifurcations and Structures of the Parameter Space of a Discrete-Time SIS Epidemic Model [J/OL]. *Journal of Mathematics*, (2022-04-23)[2023-05-20]. <https://doi.org/10.1155/2022/2233452>.
- [3] GEORGE R, GUL N, ZEB A, et al. Bifurcations Analysis of a Discrete Time SIR Epidemic Model with Nonlinear Incidence Function [J]. *Results in Physics*, 2022, 38: 105580-1-105580-18.
- [4] LI B, ESKANDARI Z. Dynamical Analysis of a Discrete-Time SIR Epidemic Model [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2023, 360(12): 7989-8007.
- [5] LU M, HUANG J C, RUAN S G, et al. Bifurcation Analysis of an SIRS Epidemic Model with a Generalized Nonmonotone and Saturated Incidence Rate [J]. *Journal of Differential Equations*, 2019, 267(3): 1859-1898.
- [6] 宋宇恒, 仲崇阳, 韩七星. 非线性 SEIR 流行病模型的平稳分布 [J]. *东北师大学报(自然科学版)*, 2022, 54(1): 14-18. (SONG Y H, ZHONG C Y, HAN Q X. Stationary Distribution of a Nonlinear SEIR Epidemic Model [J]. *Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition)*, 2022, 54(1): 14-18.)
- [7] CAO B Q, SHAN M J, ZHANG Q M, et al. A Stochastic SIS Epidemic Model with Vaccination [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Applications*, 2017, 486: 127-143.
- [8] 牛新宇, 吕闯, 郑甲山. 具饱和和发生率的随机 SIR 传染病模型的遍历性 [J]. *东北师大学报(自然科学版)*, 2021, 53(1): 26-31. (NIU X Y, LYU C, ZHENG J S. Ergodicity of a Stochastic SIR Epidemic Model with Saturated Incidence [J]. *Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition)*, 2021, 53(1): 26-31.)
- [9] 夏兰, 赵亚男. 具有标准发生率的随机 SIRS 传染病模型的趋势分析 [J]. *东北师大学报(自然科学版)*, 2021, 53(4): 34-42. (XIA L, ZHAO Y N. Research on Trend of Stochastic SIRS Epidemic Model with Standard Incidence [J]. *Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition)*, 2021, 53(4): 34-42.)
- [10] CAI L M, LI Z Q, SONG X Y. Global Analysis of an Epidemic Model with Vaccination [J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2018, 57(1): 605-628.
- [11] VIVEKANANDHAN G, NOURIAN ZAVAREH M, NATIQ H, et al. Investigation of Vaccination Game Approach in Spreading COVID-19 Epidemic Model with Considering the Birth and Death Rates [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2022, 163: 112565-1-112565-8.
- [12] XIANG L, ZHANG Y Y, HUANG J C. Stability Analysis of a Discrete SIRS Epidemic Model with Vaccination [J]. *Journal of Difference Equations and Applications*, 2020, 26(3): 309-327.
- [13] PARSAMANESH M, ERFANIAN M, MEHRSHAD S. Stability and Bifurcations in a Discrete-Time Epidemic Model with Vaccination and Vital Dynamics [J]. *BMC Bioinformatics*, 2020, 21(1): 525-1-525-15.
- [14] PARSAMANESH M, MEHRSHAD S. Stability of the Equilibria in a Discrete-Time SIVS Epidemic Model with Standard Incidence [J]. *Filomat*, 2019, 33(8): 2393-2408.
- [15] PARSAMANESH M, ERFANIAN M. Stability and Bifurcations in a Discrete-Time SIVS Model with Saturated Incidence Rate [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2021, 150: 111178-1-111178-17.
- [16] PARSAMANESH M. Global Dynamics of an SIVS Epidemic Model with Bilinear Incidence Rate [J]. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2018, 40: 544-557.
- [17] ALLEN L J S, VAN DEN DRIESSCHE P. The Basic Reproduction Number in Some Discrete-Time Epidemic Models [J]. *Journal of Difference Equations and Applications*, 2008, 14(10/11): 1127-1147.
- [18] CHITNIS N, HYMAN J M, CUSHING J M. Determining Important Parameters in the Spread of Malaria through the Sensitivity Analysis of a Mathematical Model [J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2008, 70(5): 1272-1296.
- [19] 王义琳, 郑庭庭, 聂麟飞. 具有无症状的疟疾传播模型的最优控制和敏感性分析 [J]. *东北师大学报(自然科学版)*, 2021, 53(2): 42-48. (WANG Y L, ZHENG T T, NIE L F. Optimal Control and Sensitivity Analysis of Malaria with Asymptomatic [J]. *Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition)*, 2021, 53(2): 42-48.)