doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024172

Hom-李代数的广义 Reynolds 算子和 Hom-NS-李代数

徐森荣[1]，汪 为[1]，赵 嘉[2]
（1. 江苏大学 数学科学学院，江苏 镇江 212013；2. 南通大学 理学院，江苏 南通 226019）

摘要： 首先，通过给定一个 Hom-李代数及其表示，证明 Hom-李代数上的强拟迹函数可以诱导 3-Hom-李代数及其表示，从而证明 Hom-李代数上的广义 Reynolds 算子也是诱导3-Hom-李代数上的广义 Reynolds 算子；其次，研究 Hom-NS-李代数和广义 Reynolds 算子的相互导出性质，并给出相应范畴的伴随关系.

关键词： Hom-李代数；广义 Reynolds 算子；3-Hom-李代数；Hom-NS-李代数
中图分类号： O152.5 **文献标志码：** A **文章编号：** 1671-5489(2025)02-0353-07

Generalized Reynolds Operators on Hom-Lie Algebras and Hom-NS-Lie Algebras

XU Senrong[1], WANG Wei[1], ZHAO Jia[2]
(1. *School of Mathematical Sciences, Jiangsu University, Zhenjiang* 212013, *Jiangsu Province, China*;
2. *School of Sciences, Nantong University, Nantong* 226019, *Jiangsu Province, China*)

Abstract: Firstly, by providing a Hom-Lie algebra and its representation, we proved that a strong quasi-trace function on a Hom-Lie algebra could induce a 3-Hom-Lie algebra and its representation, thereby proving that a generalized Reynolds operator on a Hom-Lie algebra was also a generalized Reynolds operator on the induced 3-Hom-Lie algebra. Secondly, we studied the mutual derivation properties of Hom-NS-Lie algebras and generalized Reynolds operators, and gave the adjoint relation of the corresponding categories.

Keywords: Hom-Lie algebra; generalized Reynolds operator; 3-Hom-Lie algebra; Hom-NS-Lie algebra

Reynolds 算子[1]，也称为时间平均算子，目前广泛应用于泛函分析和不变理论中，并且与几何、代数自同构、导子、有理 G-模等有密切联系. 在对扭曲 Poisson 理论的研究中，Uchino[2] 在结合代数上引入了广义 Reynolds 算子(也称为扭曲 Rota-Baxter 算子)的概念. 受 Uchino 工作的启发，Das[3] 引入了李代数上广义 Reynolds 算子的上同调，并研究了其形变理论；Hou 等[4] 建立了 3-李代数上的广义 Reynolds 算子的上同调，并给出了广义 Reynolds 算子、Nijenhuis 算子和 NS-3-李代数之间的关系；Li 等[5] 给出了 3-Hom-李代数的广义 Reynolds 算子的上同调，并利用 Hom-李代数的迹函数方法，构造了 3-Hom-李代数上的广义 Reynolds 算子和 3-Hom-NS-李代数.

收稿日期： 2024-04-17.

第一作者简介： 徐森荣(1990—)，男，汉族，博士，副教授，从事李代数的研究，E-mail：senrxu@163.com. **通信作者简介：** 赵 嘉(1989—)，男，汉族，博士，讲师，从事高阶李理论的研究，E-mail：zhaojia@ntu.edu.cn.

基金项目： 国家自然科学基金(批准号：12201253)和江苏省自然科学基金(批准号：BK20220510).

作为迹函数的推广，文献[6]引入了李代数的拟迹函数的概念，并证明其可以诱导3-李代数；文献[7]利用李代数的拟迹函数得到了相对Rota-Baxter算子的若干刻画. 本文考虑迹函数在Hom-型代数上的推广，首先引入Hom-李代数的拟迹函数和强拟迹函数，并证明Hom-李代数的强拟迹函数可以诱导出3-Hom-李代数及其表示；其次，证明在强拟迹函数条件下，给定一个Hom-李代数及其表示，Hom-李代数的广义Reynolds算子也是强拟迹函数诱导的3-Hom-李代数及其表示的广义Reynolds算子；最后，研究Hom-NS-李代数与广义Reynolds算子的相互导出性质，得到了其对应范畴间的伴随关系. 本文所有的线性空间和代数都在特征为零的域$\mathbb{K}$上.

1 预备知识

定义1[8] Hom-李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$由一个线性空间$\mathfrak{g}$、一个双线性映射$[\cdot,\cdot]$: $\wedge^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$和一个线性映射$\alpha$: $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$组成，且满足如下Hom-Jacobi恒等式：

$$[\alpha(x),[y,z]]+[\alpha(y),[z,x]]+[\alpha(z),[x,y]]=0,\qquad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}.$$

如果α满足$\alpha([x,y])=[\alpha(x),\alpha(y)]$，则称$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$是保积Hom-李代数.

本文考虑保积Hom-李代数，并简称为Hom-李代数. 由于任意一个李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$均可视为一个Hom-李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}})$，因此，Hom-李代数是李代数的一种推广.

定义2[9] 设$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$是Hom-李代数，$V$是线性空间，$\mathfrak{g}$在线性空间$V$上关于$A\in\mathfrak{gl}(V)$的表示是一个线性映射$\rho$: $\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$，满足

$$\rho(\alpha(x))\circ A=A\circ\rho(x),$$
$$\rho([x,y])\circ A=\rho(\alpha(x))\circ\rho(y)-\rho(\alpha(y))\circ\rho(x),\qquad \forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

Hom-李代数$\mathfrak{g}$在V上关于$A\in\mathfrak{gl}(V)$的表示记作(V,ρ,A).

特别地，$(\mathfrak{g},\mathrm{ad},\alpha)$是Hom-李代数$\mathfrak{g}$在自身$\mathfrak{g}$上关于$\alpha$的表示，称为Hom-李代数的伴随表示，其中ad: $\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$定义为$\mathrm{ad}(x)(y)=[x,y]$，$\forall x,y\in\mathfrak{g}$.

下面考虑Hom-李代数的上同调[9]. 设$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$是Hom-李代数，$(V,\rho,A)$是$\mathfrak{g}$关于$A$的表示. 对任意的$x_i\in\mathfrak{g}$，定义$\mathfrak{g}$上且系数在$(V,\rho,A)$中的$p$-Hom-上链空间为

$$C^p_{\alpha,A}(\mathfrak{g},V)=\{f\in\mathrm{Hom}(\wedge^p\mathfrak{g},V)\mid A\circ f(x_1,\cdots,x_p)=f(\alpha(x_1),\cdots,\alpha(x_p))\}.$$

令$f\in C^p_{\alpha,A}(\mathfrak{g},V)$，定义$d$: $C^p_{\alpha,A}(\mathfrak{g},V)\to C^{p+1}_{\alpha,A}(\mathfrak{g},V)$为

$$\begin{aligned}d(f)(x_1,\cdots,x_{p+1})=&\sum_{j=1}^{p+1}(-1)^{j+1}\rho(\alpha^p(x_j))f(x_1,\cdots,\hat{x}_j,\cdots,x_{p+1})+\\&\sum_{1\leqslant j<k\leqslant p+1}(-1)^{j+k}f([x_j,x_k],\alpha(x_1),\cdots,\hat{x}_j,\cdots,\hat{x}_k,\cdots,\alpha(x_{p+1})),\end{aligned}\tag{1}$$

其中α^p表示线性映射α的p次复合. 于是$d\circ d=0$，因此d是上边缘算子. 用$Z^p(\mathfrak{g},V)$和$B^p(\mathfrak{g},V)$分别表示p-阶闭链和p-阶上边缘的集合，则Hom-李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$的$p$-阶上同调群为

$$H^p_\rho(\mathfrak{g},V)=Z^p_\rho(\mathfrak{g},V)/B^p_\rho(\mathfrak{g},V).$$

特别地，将伴随表示ad对应的p-阶闭链、p-阶上边缘和p-阶上同调群分别记作$Z^p_{\mathrm{ad}}(\mathfrak{g})$，$B^p_{\mathrm{ad}}(\mathfrak{g})$和$H^p_{\mathrm{ad}}(\mathfrak{g})$. 此时，若$f=-[\cdot,\cdot]$，即$f(x,y)=-[x,y]$，$\forall x,y\in\mathfrak{g}$，则$f\in Z^2_{\mathrm{ad}}(\mathfrak{g})$.

定义3[10-11] 设$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$是Hom-李代数，$(V,\rho,A)$是$\mathfrak{g}$关于$A$的表示，令$\Phi\in Z^2_\rho(\mathfrak{g},V)$. 如果线性映射$R$: $V\to\mathfrak{g}$满足如下恒等式：

$$\alpha\circ R=R\circ A,$$
$$[Ru,Rv]=R(\rho(Ru)v-\rho(Rv)u+\Phi(Ru,Rv)),\qquad \forall u,v\in V,$$

则线性映射R称为Hom-李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$上的$\Phi$-广义Reynolds算子.

定义4 设$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$是Hom-李代数，$\tau\in\mathfrak{g}^*$，如果$\tau$满足

$$\tau(\alpha(x))\tau(y)=\tau(x)\tau(\alpha(y)),\quad \tau([x,y,z]_\tau)=0,\quad \forall x,y,z\in\mathfrak{g},$$

其中

$$[x,y,z]_\tau=\tau(x)[y,z]+\tau(y)[z,x]+\tau(z)[x,y]:=\circlearrowleft_{x,y,z}\tau(x)[y,z],\tag{2}$$

这里 $\circlearrowleft_{x,y,z}$ 表示对变量 x,y,z 的轮换求和，则称线性函数 τ 是 Hom-李代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$ 上的拟迹函数. 如果 τ 满足

$$\tau\circ\alpha=\tau,\quad \tau([x,y,z]_\tau)=0,\quad \forall x,y,z\in\mathfrak{g},\tag{3}$$

则称线性函数 τ 是 Hom-李代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$ 上的强拟迹函数.

注 1　由定义 4 可知，Hom-李代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$ 上的强拟迹函数一定是拟迹函数. 另一方面，当 $\alpha=\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$ 时，Hom-李代数上的强拟迹函数和拟迹函数等价，其含义即为李代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ 上的拟迹函数[6]. 因此，Hom-李代数上的强拟迹函数和拟迹函数是李代数上拟迹函数概念的推广.

定义 5[12]　3-Hom-李代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha)$ 由一个线性空间 $\mathfrak{g}$、一个三元反对称线性映射 $[\cdot,\cdot,\cdot]:\wedge^3\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 和一个线性映射 $\alpha:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 组成，满足

$$\alpha([x_1,x_2,x_3])=[\alpha(x_1),\alpha(x_2),\alpha(x_3)],\qquad \forall x_1,x_2,x_3\in\mathfrak{g},$$

且对 $\forall x,y,z,w,t\in\mathfrak{g}$ 有下列 3-Hom-Jacobi 恒等式成立：

$$\begin{aligned}[\alpha(x),\alpha(y),[z,w,t]]=&[[x,y,z],\alpha(w),\alpha(t)]+[\alpha(z),[x,y,w],\alpha(t)]+\\&[\alpha(z),\alpha(w),[x,y,t]].\end{aligned}$$

引理 1　设 τ 是 Hom-李代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$ 上的强拟迹函数，则 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\tau,\alpha)$ 是 3-Hom-李代数，称为由强拟迹函数诱导的 3-Hom-李代数，简记为 $\mathfrak{g}_\tau$，其中三元括号 $[\cdot,\cdot,\cdot]_\tau$ 由式(2)给出.

证明：由定义 5 直接验证即得.

定义 6[13]　设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha)$ 是 3-Hom-李代数，V 是线性空间，$\mathfrak{g}$ 在线性空间 V 上关于 $A\in\mathfrak{gl}(V)$ 的表示是一个线性映射 $\tilde{\rho}:\wedge^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$，满足如下恒等式：

$$\tilde{\rho}(\alpha(x),\alpha(y))\circ A=A\circ\tilde{\rho}(x,y),\tag{4}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{\rho}(\alpha(x),\alpha(y))\tilde{\rho}(z,w)-\tilde{\rho}(\alpha(z),\alpha(w))\tilde{\rho}(x,y)=\\&\qquad(\tilde{\rho}([x,y,z],\alpha(w))+\tilde{\rho}(\alpha(z),[x,y,w]))\circ A,\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{\rho}([x,y,z],\alpha(w))\circ A-\tilde{\rho}(\alpha(x),\alpha(y))\tilde{\rho}(z,w)=\\&\qquad\tilde{\rho}(\alpha(y),\alpha(z))\tilde{\rho}(x,w)+\tilde{\rho}(\alpha(z),\alpha(x))\tilde{\rho}(y,w),\quad\forall x,y,z,w\in\mathfrak{g}.\end{aligned}\tag{6}$$

3-Hom-李代数 $\mathfrak{g}$ 在 V 上关于 $A\in\mathfrak{gl}(V)$ 的表示记作 $(V,\tilde{\rho},A)$.

显然，$(\mathfrak{g},\widetilde{\mathrm{ad}},\alpha)$ 是 3-Hom-李代数 $\mathfrak{g}$ 在自身 $\mathfrak{g}$ 上关于 α 的表示，称为 3-Hom-李代数 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示，这里 $\widetilde{\mathrm{ad}}:\wedge^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 定义为 $\widetilde{\mathrm{ad}}(x,y)(z)=[x,y,z]$，$\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$.

引理 2　设 (V,ρ,A) 是 Hom-李代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$ 的表示，$\tau\in\mathfrak{g}^*$ 是 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$ 的强拟迹函数. 定义 $\rho_\tau:\wedge^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ 为

$$\rho_\tau(x,y)=\tau(x)\rho(y)-\tau(y)\rho(x),\qquad x,y\in\mathfrak{g},\tag{7}$$

则 (V,ρ_τ,A) 是诱导 3-Hom-李代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\tau,\alpha)$ 的表示.

证明：由定义 6，只需证式(4)～(6)成立. 不失一般性，下面只证式(6)成立. 对任意的 $x,y,z,w\in\mathfrak{g}$ 和 $v\in V$，由式(3)可知

$$\begin{aligned}&\rho_\tau([x,y,z]_\tau,\alpha(w))\circ A-\rho_\tau(\alpha(x),\alpha(y))\rho_\tau(z,w)=\\
&\qquad-\tau(\alpha(w))\rho([x,y,z]_\tau)\circ A-\\
&\qquad(\tau(\alpha(x))\rho(\alpha(y))-\tau(\alpha(y))\rho(\alpha(x)))(\tau(z)\rho(w)-\tau(w)\rho(z))=\\
&\qquad-\tau(w)\tau(x)\rho([y,z])\circ A-\tau(w)\tau(y)\rho([z,x])\circ A-\\
&\qquad\tau(w)\tau(z)\rho([x,y])\circ A-\tau(x)\tau(z)\rho(\alpha(y))\rho(w)+\\
&\qquad\tau(x)\tau(w)\rho(\alpha(y))\rho(z)+\tau(y)\tau(z)\rho(\alpha(x))\rho(w)-\\
&\qquad\tau(y)\tau(w)\rho(\alpha(x))\rho(z)=\\
&\qquad\tau(w)\tau(x)\rho(\alpha(z))\rho(y)-\tau(w)\tau(y)\rho(\alpha(z))\rho(x)-\\
&\qquad\tau(w)\tau(z)\rho(\alpha(x))\rho(y)+\tau(w)\tau(z)\rho(\alpha(y))\rho(x)-\\
&\qquad\tau(x)\tau(z)\rho(\alpha(y))\rho(w)+\tau(y)\tau(z)\rho(\alpha(x))\rho(w)=\end{aligned}$$

$$\rho_\tau(\alpha(y),\alpha(z))\rho_\tau(x,w)+\rho_\tau(\alpha(z),\alpha(x))\rho_\tau(y,w),$$

因此式(6)成立，证毕.

下面给出3-Hom-李代数的上同调[13]. 设$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha)$是3-Hom-李代数，$(V,\tilde{\rho},A)$是$\mathfrak{g}$关于$A$的表示，$\mathfrak{g}$上并且系数在$(V,\tilde{\rho},A)$中的$p$-Hom-上链空间$\widetilde{C}^p_{\alpha,A}(\mathfrak{g},V)$定义为如下集合：

$$\{f\in \mathrm{Hom}(\otimes^{p-1}(\wedge^2\mathfrak{g})\wedge\mathfrak{g},V)\,|\,A\circ f(X_1,\cdots,X_{p-1},z)=f(\alpha(X_1),\cdots,\alpha(X_{p-1}),\alpha(z))\},$$

其中$X_i=x_i\wedge y_i\in\wedge^2\mathfrak{g}$，$\alpha(X_i)=\alpha(x_i)\wedge\alpha(y_i)$，$z\in\mathfrak{g}$，$1\leqslant i\leqslant p-1$.

对任意的$f\in\widetilde{C}^p_{\alpha,A}(\mathfrak{g},V)$，定义$\partial$：$\widetilde{C}^p_{\alpha,A}(\mathfrak{g},V)\to\widetilde{C}^{p+1}_{\alpha,A}(\mathfrak{g},V)$为

$$\begin{aligned}\partial(f)(X_1,\cdots,X_p,z)=&\sum_{1\leqslant j<k\leqslant p}(-1)^j f(\alpha(X_1),\cdots,\hat{X}_j,\cdots,\alpha(X_{k-1}),[X_j,X_k]_F,\alpha(X_{k+1}),\cdots,\alpha(X_p),\alpha(z))+\\&\sum_{j=1}^{p}(-1)^j f(\alpha(X_1),\cdots,\hat{X}_j,\cdots,\alpha(X_p),[X_j,z])+\\&\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}\tilde{\rho}(\alpha^p(X_j))f(X_1,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_p,z)+\\&(-1)^{p+1}\tilde{\rho}(\alpha^p(y_p),\alpha^p(z))f(X_1,\cdots,X_{p-1},x_p)+\\&(-1)^{p+1}\tilde{\rho}(\alpha^p(z),\alpha^p(x_p))f(X_1,\cdots,X_{p-1},y_p),\end{aligned}\tag{8}$$

这里$X_i=x_i\wedge y_i\in\wedge^2\mathfrak{g}$，$z\in\mathfrak{g}$，$1\leqslant i\leqslant p$，$[X_j,z]=[x_j,y_j,z]$，并且$[X_j,X_k]_F$定义为

$$[X_j,X_k]_F=[x_j,y_j,x_k]\wedge\alpha(y_k)+\alpha(x_k)\wedge[x_j,y_j,y_k].$$

由于$\partial\circ\partial=0$，因此∂是上边缘算子. 用$\widetilde{Z}^p_{\tilde{\rho}}(\mathfrak{g},V)$和$\widetilde{B}^p_{\tilde{\rho}}(\mathfrak{g},V)$分别表示$p$-阶闭链和$p$-阶上边缘的集合，则3-Hom-李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha)$的$p$-阶上同调群为

$$\widetilde{H}^p_{\tilde{\rho}}(\mathfrak{g},V)=\widetilde{Z}^p_{\tilde{\rho}}(\mathfrak{g},V)/\widetilde{B}^p_{\tilde{\rho}}(\mathfrak{g},V).$$

特别地，伴随表示$\widetilde{\mathrm{ad}}$对应的p-阶闭链、p-阶上边缘和p-阶上同调群分别记为$\widetilde{Z}^p_{\widetilde{\mathrm{ad}}}(\mathfrak{g})$，$\widetilde{B}^p_{\widetilde{\mathrm{ad}}}(\mathfrak{g})$和$\widetilde{H}^p_{\widetilde{\mathrm{ad}}}(\mathfrak{g})$.

定义7[5] 设$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha)$是3-Hom-李代数，$(V,\tilde{\rho},A)$是$\mathfrak{g}$关于$A$的表示，令$\Phi\in\widetilde{Z}^2_{\tilde{\rho}}(\mathfrak{g},V)$. 对任意$u,v,w\in V$，如果线性映射$R$：$V\to\mathfrak{g}$满足如下恒等式：

$$\alpha\circ R=R\circ A,\tag{9}$$

$$[Ru,Rv,Rw]=R(\tilde{\rho}(Ru,Rv)w+\tilde{\rho}(Rv,Rw)u+\tilde{\rho}(Rw,Ru)v+\Phi(Ru,Rv,Rw)),\tag{10}$$

则线性映射R称为3-Hom-李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha)$上的$\Phi$-广义Reynolds算子.

引理3 设(V,ρ,A)是Hom-李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$的表示，$\tau\in\mathfrak{g}^*$是$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$的强拟迹函数，则下列结论成立：

1) $Z^1_\rho(\mathfrak{g},V)\subseteq\widetilde{Z}^1_{\rho_\tau}(\mathfrak{g}_\tau,V)$；

2) 令$\Phi\in Z^2_\rho(\mathfrak{g},V)$，定义

$$\widetilde{\Phi}(x,y,z):=\tau(x)\Phi(y,z)+\tau(y)\Phi(z,x)+\tau(z)\Phi(x,y),\qquad\forall\, x,y,z\in\mathfrak{g},$$

则$\widetilde{\Phi}\in\widetilde{Z}^2_{\rho_\tau}(\mathfrak{g}_\tau,V)$，其中$\rho_\tau$是强拟迹函数$\tau$诱导的3-Hom-李代数$\mathfrak{g}_\tau$的表示，由式(7)给出.

证明：1) 对任意的$f\in Z^1_\rho(\mathfrak{g},V)$，有$A\circ f=f\circ\alpha$，且

$$d(f)(x,y)=\rho(\alpha(x))f(y)-\rho(\alpha(y))f(x)-f([x,y])=0,\qquad\forall\, x,y\in\mathfrak{g}.$$

令$x,y,z\in\mathfrak{g}$，由式(7)，(8)和$\tau\circ\alpha=\tau$，直接计算可知

$$\begin{aligned}\partial(f)(x,y,z)=&\rho_\tau(\alpha(x),\alpha(y))f(z)+\rho_\tau(\alpha(y),\alpha(z))f(x)+\\&\rho_\tau(\alpha(z),\alpha(x))f(y)-f([x,y,z]_\tau)=\\&\tau(x)d(f)(y,z)+\tau(y)d(f)(z,x)+\tau(z)d(f)(x,y)=0.\end{aligned}$$

2) 由于$\Phi\in Z^2_\rho(\mathfrak{g},V)$，所以对任意的$x,y\in\mathfrak{g}$，有$A\circ\Phi(x,y)=\Phi(\alpha(x),\alpha(y))$且$d(\Phi)=0$. 其中，

$$\begin{aligned}d(\Phi)(x,y,z)=&\rho(\alpha^2(x))\Phi(y,z)+\rho(\alpha^2(y))\Phi(z,x)+\rho(\alpha^2(z))\Phi(x,y)-\\&\Phi([x,y],\alpha(z))-\Phi([y,z],\alpha(x))-\Phi([z,x],\alpha(y)),\quad\forall\, x,y,z\in\mathfrak{g}.\end{aligned}$$

一方面，对任意的$x,y,z\in\mathfrak{g}$，由于$A\circ\Phi(x,y)=\Phi(\alpha(x),\alpha(y))$且$\tau\circ\alpha=\tau$，因此

$$A\circ\widetilde{\Phi}(x,y,z)=A(\tau(x)\Phi(y,z)+\tau(y)\Phi(z,x)+\tau(z)\Phi(x,y))=$$

$$\begin{aligned}&\tau(x)\Phi(\alpha(y),\alpha(z))+\tau(y)\Phi(\alpha(z),\alpha(x))+\tau(z)\Phi(\alpha(x),\alpha(y))=\\&\tau(\alpha(x))\Phi(\alpha(y),\alpha(z))+\tau(\alpha(y))\Phi(\alpha(z),\alpha(x))+\tau(\alpha(z))\Phi(\alpha(x),\alpha(y))=\\&\widetilde{\Phi}(\alpha(x),\alpha(y),\alpha(z)),\end{aligned}$$

从而 $\widetilde{\Phi}\in\widetilde{C}^2_{\alpha,A}(\mathfrak{g}_\tau,V)$. 另一方面，对任意的 $X_1=x_1\wedge x_2$，$X_2=x_3\wedge x_4\in\wedge^2\mathfrak{g}$，$x_5\in\mathfrak{g}$，有

$$\begin{aligned}\partial(\widetilde{\Phi})(X_1,X_2,x_5)=&-\widetilde{\Phi}([X_1,X_2]_F,\alpha(x_5))-\widetilde{\Phi}(\alpha(x_3),\alpha(x_4),[x_1,x_2,x_5]_\tau)+\\&\widetilde{\Phi}(\alpha(x_1),\alpha(x_2),[x_3,x_4,x_5]_\tau)+\\&\rho_\tau(\alpha^2(x_1),\alpha^2(x_2))\widetilde{\Phi}(x_3,x_4,x_5)-\rho_\tau(\alpha^2(x_3),\alpha^2(x_4))\widetilde{\Phi}(x_1,x_2,x_5)-\\&\rho_\tau(\alpha^2(x_4),\alpha^2(x_5))\widetilde{\Phi}(x_1,x_2,x_3)-\rho_\tau(\alpha^2(x_5),\alpha^2(x_3))\widetilde{\Phi}(x_1,x_2,x_4)=\\&\tau(x_1)\tau(x_3)d(\widetilde{\Phi})(x_2,x_4,x_5)+\tau(x_1)\tau(x_4)d(\widetilde{\Phi})(x_2,x_5,x_3)+\\&\tau(x_1)\tau(x_5)d(\widetilde{\Phi})(x_2,x_3,x_4)-\tau(x_2)\tau(x_3)d(\widetilde{\Phi})(x_1,x_4,x_5)-\\&\tau(x_2)\tau(x_4)d(\widetilde{\Phi})(x_1,x_5,x_3)-\tau(x_2)\tau(x_5)d(\widetilde{\Phi})(x_1,x_3,x_4)=0,\end{aligned}$$

从而得 $\widetilde{\Phi}\in\widetilde{Z}^2_{\rho_\tau}(\mathfrak{g}_\tau,V)$. 证毕.

设(V,ρ,A)是 Hom-李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$的表示，$\tau\in\mathfrak{g}^*$ 是$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$的强拟迹函数. 由引理 1 和引理 2 知，$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\tau,\alpha)$是强拟迹函数 τ 诱导的 3-Hom-李代数，且(V,ρ_τ,A)是$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\tau,\alpha)$的表示. 进一步，由引理 3 可得如下定理.

定理 1　若 R：$V\to\mathfrak{g}$ 是 Hom-李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$上的 Φ-广义 Reynolds 算子，则 R 也是诱导 3-Hom-李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot,\cdot]_\tau,\alpha)$上的 $\widetilde{\Phi}$-广义 Reynolds 算子.

证明：由于 R 是 Hom-李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$上的 Φ-广义 Reynolds 算子，所以 $\Phi\in Z^2_\rho(\mathfrak{g},V)$. 由引理 3 可知，$\widetilde{\Phi}\in\widetilde{Z}^2_{\rho_\tau}(\mathfrak{g}_\tau,V)$. 因此，只需证式(9)和式(10)成立，其中式(9)成立显然，下证式(10)成立. 对任意的 $u,v,w\in V$，有

$$\begin{aligned}[Ru,Rv,Rw]_\tau=&\tau(Ru)[Rv,Rw]+\tau(Rv)[Rw,Ru]+\tau(Rw)[Ru,Rv]=\\&\tau(Ru)R(\rho(Rv)w-\rho(Rw)v+\Phi(Rv,Rw))+\tau(Rv)R(\rho(Rw)u-\rho(Ru)w+\\&\Phi(Rw,Ru))+\tau(Rw)R(\rho(Ru)v-\rho(Rv)u+\Phi(Ru,Rv))=\\&R(\tau(Ru)\rho(Rv)w-\tau(Rv)\rho(Ru)w+\tau(Rv)\rho(Rw)u-\tau(Rw)\rho(Rv)u+\\&\tau(Rw)\rho(Ru)v-\tau(Ru)\rho(Rw)v+\tau(Ru)\Phi(Rv,Rw)+\\&\tau(Rv)\Phi(Rw,Ru)+\tau(Rw)\Phi(Ru,Rv))=\\&R(\rho_\tau(Ru,Rv)w+\rho_\tau(Rv,Rw)u+\rho_\tau(Rw,Ru)v+\widetilde{\Phi}(Ru,Rv,Rw)),\end{aligned}$$

结论得证.

注 2　由定义 4 可知，定理 1 是在 $\tau\in\mathfrak{g}^*$ 强拟迹函数条件下得到的，文献[5]考虑了关于线性函数 τ 的其他条件，即在

$$\tau(\alpha(x))\rho(y)=\tau(x)\rho(y),\quad \tau([x,y])=0,\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{g}$$

的情况下也得到了定理 1 的类似结果.

2　主要结果

作为 Hom-李代数的广义 Reynolds 算子的底层结构，下面考虑 Hom-NS-李代数，并给出 Hom-NS-李代数和广义 Reynolds 算子的相互导出性质. 进一步，考虑 Hom-NS-李代数范畴和广义 Reynolds 算子范畴，并给出它们之间的伴随关系.

定义 8[11]　Hom-NS-李代数$(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot\},[\![\cdot,\cdot]\!],\alpha)$是一个向量空间 $\mathfrak{g}$，并赋予双线性映射

$$\{\cdot,\cdot\}:\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\to\mathfrak{g},\qquad [\![\cdot,\cdot]\!]:\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$$

和一个线性映射 α：$\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$，满足对任意的 $x,y,z\in\mathfrak{g}$ 下式成立：

$$\alpha(\{x,y\})=\{\alpha(x),\alpha(y)\},\qquad \alpha([\![x,y]\!])=[\![\alpha(x),\alpha(y)]\!],$$

$$\{\{x,y\},\alpha(z)\}-\{\alpha(x),\{y,z\}\}-\{\{y,x\},\alpha(z)\}+\{\alpha(y),\{x,z\}\}+\{[\![x,y]\!],\alpha(z)\}=0,$$

$$\circlearrowleft_{x,y,z}[\![\alpha(x),[y,z]_*]\!]+\circlearrowleft_{x,y,z}\{\alpha(x),[\![y,z]\!]\}=0,$$

其中$[x,y]_*=\{x,y\}-\{y,x\}+[\![x,y]\!]$.

引理 4[11] 设$(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot\},[\![\cdot,\cdot]\!],\alpha)$是 Hom-NS-李代数，则$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_*,\alpha)$是 Hom-李代数，称为$(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot\},[\![\cdot,\cdot]\!],\alpha)$的相邻 Hom-李代数，并且$(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot\},[\![\cdot,\cdot]\!],\alpha)$称为$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_*,\alpha)$的兼容 Hom-NS-李代数.

定义 9 Hom-NS-李代数之间的态射$\eta:(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot\},[\![\cdot,\cdot]\!],\alpha)\to(\mathfrak{g}',\{\cdot,\cdot\}',[\![\cdot,\cdot]\!]',\alpha')$是一个线性映射$\eta:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$，满足对任意的$x,y\in\mathfrak{g}$下式成立：

$$\eta(\{x,y\})=\{\eta(x),\eta(y)\}',\quad \eta([\![x,y]\!])=[\![\eta(x),\eta(y)]\!]',\quad \eta\circ\alpha=\alpha'\circ\eta.$$

设$(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot\},[\![\cdot,\cdot]\!],\alpha)$是 Hom-NS-李代数，线性映射$\beta:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$和$\Phi:\wedge^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$分别定义为

$$\beta(x)(y)=\{x,y\},\quad \Phi(x,y)=[\![x,y]\!],\quad \forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

定理 2 沿用上述记号，则下列结论成立：

1) $(\mathfrak{g},\beta,\alpha)$是相邻 Hom-李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_*,\alpha)$的表示；

2) 恒等映射$\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$是$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_*,\alpha)$关于表示$(\mathfrak{g},\beta,\alpha)$的$\Phi$-广义 Reynolds 算子.

证明：1) 因为对任意的$x,y\in\mathfrak{g}$，$\alpha(\{x,y\})=\{\alpha(x),\alpha(y)\}$，所以$\beta(\alpha(x))\circ\alpha=\alpha\circ\beta(x)$成立. 下面只需证

$$\beta([x,y]_*)\circ\alpha=\beta(\alpha(x))\circ\beta(y)-\beta(\alpha(y))\circ\beta(x).$$

令$x,y,z\in\mathfrak{g}$，直接计算可得

$$\begin{aligned}\beta([x,y]_*)(\alpha(z))&=\{\{x,y\}-\{y,x\}+[\![x,y]\!],\alpha(z)\}=\{\alpha(x),\{y,z\}\}-\{\alpha(y),\{x,z\}\}=\\&\beta(\alpha(x))(\beta(y)(z))-\beta(\alpha(y))(\beta(x)(z)),\end{aligned}$$

从而结论1)成立.

2) 一方面，$\alpha\circ\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}=\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}\circ\alpha$显然成立. 另一方面，对任意的$x,y\in\mathfrak{g}$，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}(\beta(\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}x)(y)-\beta(\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}y)(x)+\Phi(x,y))&=\{x,y\}-\{y,x\}+[\![x,y]\!]=\\&[x,y]_*=[\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}x,\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}y]_*,\end{aligned}$$

因此$\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$是$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_*,\alpha)$关于表示$(\mathfrak{g},\beta,\alpha)$的$\Phi$-广义 Reynolds 算子. 证毕.

引理 5[11] 设$R:V\to\mathfrak{g}$是 Hom-李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$上关于表示$(V,\rho,A)$的$\Phi$-广义 Reynolds 算子，则$(V,\{\cdot,\cdot\}_V,[\![\cdot,\cdot]\!]_V,A)$是一个 Hom-NS-李代数，其中

$$\{u,v\}_V=\rho(Ru)v,\quad [\![u,v]\!]_V=\Phi(Ru,Rv),\quad \forall u,v\in V.$$

定理 3 设$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$是 Hom-李代数，则在$\mathfrak{g}$上存在一个兼容的 Hom-NS-李代数结构当且仅当存在$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$上关于一个表示$(V,\rho,A)$的可逆的$\Phi$-广义 Reynolds 算子$R:V\to\mathfrak{g}$. 进一步，$\mathfrak{g}$上兼容的 Hom-NS-李代数结构如下：

$$\{x,y\}=R\circ\rho(x)\circ R^{-1}(y),\quad [\![x,y]\!]=R\circ\Phi(x,y),\quad \forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

证明：由定理2可知必要性成立，下证充分性. 假设存在$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$上关于一个表示$(V,\rho,A)$的可逆的$\Phi$-广义 Reynolds 算子$R:V\to\mathfrak{g}$，则由引理5可知，在$V$上存在一个 Hom-NS-李代数结构：

$$\{u,v\}_V=\rho(Ru)v,\quad [\![u,v]\!]_V=\Phi(Ru,Rv),\quad \forall u,v\in V.$$

因为$R:V\to\mathfrak{g}$是可逆的Φ-广义 Reynolds 算子，所以

$$\begin{gathered}\{x,y\}:=R\{R^{-1}(x),R^{-1}(y)\}_V=R\circ\rho(x)\circ R^{-1}(y),\\ [\![x,y]\!]:=R[\![R^{-1}(x),R^{-1}(y)]\!]_V=R\circ\Phi(x,y),\qquad \forall x,y\in\mathfrak{g},\end{gathered}$$

定义了$\mathfrak{g}$上的 Hom-NS-李代数$(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot\},[\![\cdot,\cdot]\!],\alpha)$. 下面只需证兼容性，对任意的$x,y\in\mathfrak{g}$，有

$$\begin{aligned}\{x,y\}-\{y,x\}+[\![x,y]\!]&=R\circ\rho(x)\circ R^{-1}(y)-R\circ\rho(y)\circ R^{-1}(x)+R\circ\Phi(x,y)=\\&R(\rho(x)R^{-1}(y)-\rho(y)R^{-1}(x)+\Phi(x,y))=\\&[R(R^{-1}(x)),R(R^{-1}(y))]=[x,y],\end{aligned}$$

结论得证.

令 HNSL 表示 Hom-NS-李代数范畴，其对象是 Hom-NS-李代数，态射由定义9给出. 令 GRO 表示广义 Reynolds 算子范畴，其对象是 Hom-李代数上的Φ-广义 Reynolds 算子，Φ为2-阶闭链. 态射定义如下：设$R:V\to\mathfrak{g}$是 Hom-李代数$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],\alpha)$上关于表示$(V,\rho,A)$的$\Phi$-广义 Reynolds 算子，

R'：$V'\to\mathfrak{g}'$是 Hom-李代数$(\mathfrak{g}',[\cdot,\cdot]',\alpha')$上关于表示$(V',\rho',A')$的 Φ'-广义 Reynolds 算子，则 R 到 R'的态射是线性映射 ϕ：$\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$和 ψ：$V\to V'$组成的二元组(ϕ,ψ)，满足 $\phi\circ\alpha=\alpha'\circ\phi$，$\psi\circ A=A'\circ\psi$，且下式成立：

$$\psi(\rho(x)v)=\rho(\phi(x))\psi(v),\quad \psi\circ\Phi=\Phi'\circ(\phi\otimes\phi),\quad \phi\circ R=R'\circ\psi,\quad \forall\, x\in\mathfrak{g},\quad v\in V.$$

由引理 5 可知，给定一个 Φ-广义 Reynolds 算子，可以构造 Hom-NS-李代数，因此，这个构造给出了从 GRO 范畴到 HNSL 范畴的函子 F：GRO→HNSL.

另一方面，设$(\mathfrak{g},\{\cdot,\cdot\},[\![\cdot,\cdot]\!],\alpha)$是 Hom-NS-李代数，由引理 4 知，其相邻 Hom-李代数是$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_*,\alpha)$，简记为 $\mathfrak{g}_{\mathrm{HLie}}$. 由定理 2 知，Hom-李代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{HLie}}$在 $\mathfrak{g}$ 上有一个表示$(\mathfrak{g},\beta,\alpha)$：

$$\beta(x)(y)=\{x,y\},\quad \forall\, x\in\mathfrak{g}_{\mathrm{HLie}},\quad y\in\mathfrak{g}.$$

进一步，定义 Φ：$\mathfrak{g}_{\mathrm{HLie}}\otimes\mathfrak{g}_{\mathrm{HLie}}\to\mathfrak{g}$，$\Phi(x,y)=[\![x,y]\!]$，$\forall\, x,y\in\mathfrak{g}$，则由定义 8 可知，$\Phi$ 是 Hom-李代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{HLie}}$关于上述表示的 2-阶闭链，且恒等映射 $\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$：$\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 是$(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_*,\alpha)$关于表示$(\mathfrak{g},\beta,\alpha)$的 Φ-广义 Reynolds 算子. 上述过程给出了从 Hom-NS-李代数到 Φ-广义 Reynolds 算子的构造，并且保持函子性质，从而可得从 HNSL 范畴到 GRO 范畴的函子 G：HNSL→GRO. 因此，有如下结果.

定理 4　存在函子的伴随对 F：GRO⇆HNSL：G，且存在伴随关系

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{HNSL}}(\mathfrak{g},F(R))\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{GRO}}(G(\mathfrak{g}),R).$$

参 考 文 献

[1] REYNOLDS O. On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion [J]. Philos Trans Roy Soc A, 1895, 186: 123-164.

[2] UCHINO K. Quantum Analogy of Poisson Geometry, Related Dendriform Algebras and Rota-Baxter Operators [J]. Lett Math Phys, 2008, 85(2/3): 91-109.

[3] DAS A. Twisted Rota-Baxter Operators and Reynolds Operators on Lie Algebras and NS-Lie Algebras [J]. J Math Phys, 2021, 62(9): 091701-1-091701-19.

[4] HOU S, SHENG Y H. Generalized Reynolds Operators on 3-Lie Algebras and NS-3-Lie Algebras [J]. Int J Geom Methods Mod Phys, 2021, 18(14): 2150223-1-2150223-29.

[5] LI Y Z, WANG D G. Twisted Rota-Baxter Operators on 3-Hom-Lie Algebras [J]. Comm Algebra, 2023, 51(11): 4662-4675.

[6] TAN Y J, XU S R. Quasi-trace Functions on Lie Algebras and Their Applications to 3-Lie Algebras [J]. Czechoslovak Math J, 2022, 72(2): 559-591.

[7] 徐森荣，谭易兰，赵嘉. 相对罗巴算子的拟迹函数方法和上同调 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2023，61(6)：1313-1318. (XU S R, TAN Y L, ZHAO J. Quasi-trace Function Method and Cohomology of Relative Rota-Baxter Operators [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2023, 61(6): 1313-1318.)

[8] HARTWIG J T, LARSSON D, SILVESTROV S. Deformations of Lie Algebras Using σ-Derivations [J]. J Algebra, 2006, 295(2): 314-361.

[9] SHENG Y H. Representations of Hom-Lie Algebras [J]. Algebr Represent Theory, 2012, 15(6): 1081-1098.

[10] XU S R, WANG W, ZHAO J. Twisted Rota-Baxter Operators on Hom-Lie Algebras [J]. AIMS Math, 2024, 9(2): 2619-2640.

[11] DAS A, SEN S. Nijenhuis Operators on Hom-Lie Algebras [J]. Comm Algebra, 2022, 50(3): 1038-1054.

[12] ATAGUEMA H, MAKHLOUF A, SILVESTROV S. Generalization of n-Ary Nambu Algebras and Beyond [J]. J Math Phys, 2009, 50(8): 083501-1-083501-15.

[13] MABROUK S, MAKHLOUF A, MASSOUD S. Generalized Representations of 3-Hom-Lie Algebras [J]. Extracta Math, 2020, 35(1): 99-126.

(责任编辑：赵立芹)