

具有收获项和双时滞及 Allee 效应影响的 Lotka-Volterra 捕食-食饵系统的 Hopf 分支分析

衣薪燃, 吕堂红

(长春理工大学 数学与统计学院, 长春 130022)

摘要: 针对自然界中生物种群对环境变化或种群间的相互作用无法做出即时反应的问题, 通过引入两个时滞作为分支参数, 分析相应的特征方程, 并讨论系统在各平衡点处的局部稳定性和 Hopf 分支的存在性. 首先, 在两个时滞都等于 τ 时, 用中心流形定理和规范型理论, 得到决定 Hopf 分支方向及周期解稳定性的显式公式; 其次, 通过数值模拟验证理论分析的准确性. 结果表明: 当时滞超出临界值时, 系统的稳定性发生改变并产生 Hopf 分支. 在生物模型中引入时滞有助于进行更准确地预测种群动态.

关键词: 双时滞; Allee 效应; Lotka-Volterra 捕食-食饵系统; Hopf 分支; 周期解

中图分类号: O175.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)02-0321-10

Hopf Bifurcation Analysis of Lotka-Volterra Predator-Prey System with Harvest Terms, Two Time Delays and Allee Effect

YI Xinran, LÜ Tanghong

(School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China)

Abstract: Aiming at the problem that organism populations in nature were not able to react quickly to environmental changes or interactions amongst populations. By introducing two time delays as branching parameters, we analyzed the corresponding characteristic equations and discussed the local stability of the system at each equilibrium point and the existence of Hopf bifurcation. Firstly, we obtained explicit formulas that determined the direction of Hopf bifurcation and the stability of periodic solutions when two time delays equal to τ by using the central manifold theorem and canonical type theory. Secondly, numerical simulation was used to verify the accuracy of theoretical analysis. The results show that the stability of the system changes and a Hopf bifurcation is generated when the time delay surpasses a critical value. Time delay is introduced into biological models can help predict population dynamics more accurately.

Keywords: two time delays; Allee effect; Lotka-Volterra predator-prey system; Hopf bifurcation; periodic solution

收稿日期: 2024-05-16. 网络首发日期: 2024-11-15.

第一作者简介: 衣薪燃(2000—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事常微分方程定性理论及分支理论的研究, E-mail: yixinr0224@163.com. **通信作者简介:** 吕堂红(1979—), 女, 汉族, 硕士, 教授, 从事常微分方程定性理论及分支理论的研究, E-mail: lvtanghong@163.com.

基金项目: 吉林省教育厅科学研究项目(批准号: JJKH20240891KJ).

网络首发地址: <https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20241113.1726.002>.

0 引言

捕食者与食饵之间的动态关系是生态系统的重要组成部分,为揭示这种复杂的数量动态特征,建立合理的数学模型,并对其进行动力学行为分析备受关注,例如: Takyi 等^[1]提出了一个捕食者具有捕食警戒和狩猎合作的捕食者-食饵系统; Wu 等^[2]研究了一类具有恐惧效应和非线性收获的 Leslie-Gower 捕食者-食饵模型; Yang 等^[3]分析了一类具有羊群行为和强 Allee 效应的食饵-捕食者系统. 而实际上,由于个体之间交配、生存空间及防御行为等的减少,生物种群数量是不能无限制增长的. 当食饵种群的数量降低到一定程度时,它们可能会受 Allee 效应的影响,使食饵种群更易成为捕食者的目标,食饵数量会进一步降低. 这种正反馈环境可能导致食饵种群的崩溃,同时也会影响捕食者种群.

Allee 效应描述了一些物种在低密度下表现出的合作性和繁殖率降低的现象^[4-5]. 文献[6-9]探讨了 Allee 效应对濒危物种和种群恢复的影响,但关于食饵 Allee 效应对系统动力学行为作用机制的研究目前报道较少. 因此,在捕食者-食饵模型中,考虑 Allee 效应对种群数量变化和系统稳定性的影响有一定的意义. 周起梅等^[10]对 Allee 效应如何影响食饵种群进行了深入研究,结果表明, Allee 效应会使捕食-食饵系统需要更多的时间达到稳定状态,其模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1-x) - axy\left(\frac{x}{m+x}\right), \\ \frac{dy}{dt} = bxy - dy, \end{cases} \quad (1)$$

其中 x 和 y 分别表示食饵种群和捕食者种群在 t 时刻的种群密度, $\frac{x}{m+x}$ 表示 Allee 效应, a 表示食饵种群的转化率, r 表示捕食者种群的固有增长率, b 和 d 分别表示捕食者种群的捕食率和死亡率, a, r, b, d, m 均为正常数.

研究表明,时滞现象普遍存在于自然界、社会科学、经济学等诸多领域. 高鹤等^[11]研究了一类具时滞的捕食-食饵共生模型; Yang 等^[12]提出了一类时滞阶段结构捕食者-食饵模型; 林文贤^[13]研究了带脉冲的时滞分数阶尼偏微分方程解的振动性. 包含时滞现象的动力系统称为时滞动力系统,通常用时滞微分方程或差分方程描述. 即使是微小的时滞,也可能使系统中原来稳定的平衡点失去稳定性,出现周期性振荡或者周期解,而 Hopf 分支是导致周期解产生的一种机制,将时滞作为分支参数,研究系统的 Hopf 分支性质有助于理解系统的动态行为.

本文在模型(1)的基础上,考虑捕食者种群具有成熟期和孕育期,相应的引入时滞 τ_1 和 τ_2 ,并考虑人为开采与捕捞对种群的影响,引入收获项 $q_1 E_1 x$ 和 $q_2 E_2 y$,提出如下具有双时滞和收获项以及 Allee 效应影响的 Lotka-Volterra 捕食-食饵系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx[1-x(t-\tau_1)] - axy\left(\frac{x}{m+x}\right) - q_1 E_1 x, \\ \frac{dy}{dt} = bx(t-\tau_2)y - dy - q_2 E_2 y, \end{cases} \quad (2)$$

其中 τ_1 表示捕食者种群的成熟期时滞, τ_2 表示捕食者种群的孕育期时滞, E_1 和 E_2 分别表示两种群的捕捞努力量, $q_i \geq 0 (i=1,2)$ 表示两种群的收获系数, $q_1 E_1 x$ 和 $q_2 E_2 y$ 表示对两物种的收获量,其他参数意义同模型(1). 在现有的 Lotka-Volterra 捕食-食饵系统中,引入双时滞和收获项并考虑 Allee 效应的研究目前文献报道较少,本文通过对捕食者两种时期时滞的讨论与分析,可深入理解生态系统中捕食者和食饵之间的相互作用.

1 正平衡点的存在性

定理 1 若 $r(b-d-q_2 E_2) > bq_1 E_1$ 成立,则系统(2)存在唯一正平衡点

$$E^*(x^*, y^*) = \left(\frac{d+q_2 E_2}{b}, \frac{(mb+d+q_2 E_2)[r(b-d-q_2 E_2)-bq_1 E_1]}{ab(d+q_2 E_2)} \right).$$

证明: 将系统(2)的正平衡点记作 $E^* = (x^*, y^*)$, 若该正平衡点存在, 则应满足方程组

$$\begin{cases} rx(1-x) - axy\left(\frac{x}{m+x}\right) - q_1E_1x = 0, \\ bxy - dy - q_2E_2y = 0. \end{cases} \quad (3)$$

由式(3)的第二个方程可知

$$x^* = \frac{d + q_2E_2}{b},$$

将其代入式(3)的第一个方程可得

$$y^* = \frac{(mb + d + q_2E_2)[r(b - d - q_2E_2) - bq_1E_1]}{ab(d + q_2E_2)},$$

故当 $r(b - d - q_2E_2) > bq_1E_1$ 时, 系统(2)存在唯一正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$.

2 局部稳定性及 Hopf 分支

系统(2)在正平衡点 E^* 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} P_{11} + P'_{11}e^{-\lambda\tau_1} & P_{12} \\ P'_{21}e^{-\lambda\tau_2} & P_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$P_{11} = r - rx^* - \frac{2amx^*y^* + ax^{*2}y^*}{(m+x^*)^2} - q_1E_1, \quad P'_{11} = -rx^*,$$

$$P_{12} = \frac{-ax^{*2}}{m+x^*}, \quad P'_{21} = by^*, \quad P_{22} = bx^* - d - q_2E_2.$$

则系统(2)的特征方程为

$$\lambda^2 + A_1\lambda + (A_2\lambda + A_3)e^{-\lambda\tau_1} + A_4e^{-\lambda\tau_2} + A_5 = 0, \quad (4)$$

其中

$$A_1 = -(P_{11} + P_{22}), \quad A_2 = -P'_{11}, \quad A_3 = P'_{11}P_{22}, \quad A_4 = -P_{12}P'_{21}, \quad A_5 = P_{11}P_{22}.$$

假设:

$$(H_1) \quad A_1 + A_2 > 0, \quad A_3 + A_4 + A_5 > 0;$$

$$(H_2) \quad p_1 > 0, \quad q_1 > 0;$$

$$(H_3) \quad q_1 < 0;$$

$$(H_4) \quad p_1 < 0, \quad q_1 > 0, \quad p_1^2 > 4q_1;$$

$$(H_5) \quad f'(\omega_{10}^2) > 0.$$

对于上述两个时滞, 下面分 5 种情形讨论.

情形 1) $\tau_1 = \tau_2 = 0$.

此时, 系统(2)的特征方程(4)变为

$$\lambda^2 + (A_1 + A_2)\lambda + A_3 + A_4 + A_5 = 0.$$

根据 Routh-Hurwitz 准则, 若假设 (H_1) 成立, 则系统(2)的正平衡点 E^* 在无时滞情形下是局部渐近稳定的.

情形 2) $\tau_1 = 0, \tau_2 > 0$.

此时, 系统(2)的特征方程(4)变为

$$\lambda^2 + (A_1 + A_2)\lambda + A_3 + A_4e^{-\lambda\tau_2} + A_5 = 0. \quad (5)$$

令 $\lambda = i\omega_1$ ($\omega_1 > 0$) 是该方程的根, 将其代入式(5)有

$$-\omega_1^2 + (A_1 + A_2)\omega_1 i + A_3 + A_5 + A_4e^{-i\omega_1\tau_2} = 0, \quad (6)$$

分离式(6)的实部和虚部得

$$\begin{cases} (A_1 + A_2)\omega_1 = A_4 \sin(\omega_1\tau_2), \\ \omega_1^2 - (A_3 + A_5) = A_4 \cos(\omega_1\tau_2), \end{cases} \quad (7)$$

整理得

$$\omega_1^4 + [(A_1 + A_2)^2 - 2(A_3 + A_5)]\omega_1^2 + (A_3 + A_5)^2 - A_4^2 = 0. \quad (8)$$

令 $\omega_1^2 = u_1$, 则式(8)变为 $u_1^2 + p_1 u_1 + q_1 = 0$, 其中

$$p_1 = (A_1 + A_2)^2 - 2(A_3 + A_5), \quad q_1 = (A_3 + A_5)^2 - A_4^2.$$

令 $f(u_1) = u_1^2 + p_1 u_1 + q_1$, 并假设 (H_2) 成立, 则方程(8)的所有根都有负实部.

在假设条件 (H_1) , (H_3) 成立的情形下, 式(5)有唯一正根 ω_{10}^2 , 将 ω_{10}^2 代入式(7)有

$$\tau_{1k} = \frac{1}{\omega_{10}} \arccos \frac{\omega_{20}^2 - (A_3 + A_5)}{A_4} + \frac{2k\pi}{\omega_{10}}, \quad k = 0, 1, \dots.$$

假设 (H_1) 和 (H_4) 同时成立, 则式(5)有两个正根 ω_{\pm}^2 , 将其代入式(7)有

$$\tau_{1n}^{\pm} = \frac{1}{\omega_{\pm}} \arccos \frac{\omega_{20}^2 - (A_3 + A_5)}{A_4} + \frac{2n\pi}{\omega_{\pm}}, \quad n = 0, 1, \dots.$$

引理 1 若假设条件 (H_5) 成立, 则 $\text{sign}\left\{\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right)\bigg|_{\tau_2=\tau_{1k}, \omega=\omega_{10}}\right\} > 0$.

证明: 对式(5)关于 τ_2 求导, 有

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right)^{-1} = -\frac{2\lambda + A_1 + A_2}{\lambda[\lambda^2 + (A_1 + A_2)\lambda + A_3 + A_5]} - \frac{\tau_2}{\lambda},$$

经计算得

$$\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right)^{-1}\bigg|_{\lambda=i\omega_1} = \frac{2\omega_1^2 + (A_1 + A_2)^2 - 2(A_3 + A_5)}{[\omega_1^2 - (A_3 + A_5)]^2 + (A_1 + A_2)^2\omega_1^2} = \frac{f'(\omega_1^2)}{[\omega_1^2 - (A_3 + A_5)]^2 + (A_1 + A_2)^2\omega_1^2}.$$

若 (H_5) 成立, 则可得如下横截性条件:

$$\begin{aligned} \text{sign}\left\{\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right)\bigg|_{\tau_2=\tau_{1k}, \omega=\omega_{10}}\right\} &> 0, \\ \text{sign}\left\{\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right)\bigg|_{\tau_1=\tau_{1n}^+, \omega=\omega_+}\right\} &> 0, \quad \text{sign}\left\{\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right)\bigg|_{\tau_1=\tau_{1n}^-, \omega=\omega_-}\right\} > 0. \end{aligned}$$

综上, 可得如下结果.

定理 2 对于系统(2), 当 $\tau_1 = 0$, $\tau_2 > 0$ 且假设条件 (H_1) 成立时, 有如下结论:

1) 如果 (H_2) 成立, 则当 $\tau_2 \geq 0$ 时, 系统(2)的平衡点 E^* 是局部渐近稳定的;

2) 如果 (H_5) 成立, 则平衡点 E^* 对所有的 $\tau_2 \in (0, \tau_{10})$ 是渐近稳定的, 对所有的 $\tau_2 > \tau_{10}$ 是不稳定的; 当 $\tau_2 = \tau_{10}$ 时, 系统(2)在正平衡点处发生 Hopf 分支.

情形 3) $\tau_1 > 0$, $\tau_2 = 0$.

此时, 系统(2)的特征方程(4)变为

$$\lambda^2 + A_1\lambda + A_4 + A_5 + (A_2\lambda + A_3)e^{-\lambda\tau_1} = 0. \quad (9)$$

令 $\lambda = i\omega_2$ ($\omega_2 > 0$) 是该方程的根, 将其代入式(9)有

$$\begin{cases} \omega_2^2 - (A_4 + A_5) = A_2\omega_2 \sin(\omega_2\tau_1) + A_3 \cos(\omega_2\tau_1), \\ -A_1\omega_2 = A_2\omega_2 \cos(\omega_2\tau_1) - A_3 \sin(\omega_2\tau_1), \end{cases}$$

平方相加得

$$\omega_2^4 + [A_1^2 - 2(A_4 + A_5)]\omega_2^2 + (A_4 + A_5)^2 - A_3^2 = 0. \quad (10)$$

令 $\omega_2^2 = u_2$, 则有 $u_2^2 + p_2 u_2 + q_2 = 0$, 其中 $p_2 = A_1^2 - 2(A_4 + A_5)$, $q_2 = (A_4 + A_5)^2 - A_3^2$.

假设:

(H_6) $p_2 > 0$, $q_2 > 0$;

(H_7) $A_5^2 - (A_3 + A_4)^2 < 0$.

若假设 (H_6) 成立, 则式(10)无正根.

由于 $\tau_1 > 0$, $\tau_2 = 0$ 时的证明与情形 2) 类似, 故有

$$\tau_{2\eta} = \frac{1}{\omega_{20}} \arccos \frac{(A_3 - A_1 A_2)\omega_{20}^2 - A_3(A_4 + A_5)}{A_3^2 + A_2^2\omega_{20}^2} + \frac{2\eta\pi}{\omega_{20}}, \quad \eta = 0, 1, 2, \dots.$$

对于系统(2), 当 $\tau_1 > 0, \tau_2 = 0$ 时, 若条件 (H_1) 和 $2\omega_2^2 + A_1^2 - A_2^2 - 2(A_4 + A_5) > 0$ 成立, 则当 $\tau_1 = \tau_{20}$ 时, 系统(2)发生 Hopf 分支.

情形 4) $\tau_1 = \tau_2 = \tau > 0$.

此时, 系统(2)的特征方程(4)简化为

$$\lambda^2 + A_1\lambda + A_5 + (A_2\lambda + A_3 + A_4)e^{-\lambda\tau} = 0. \tag{11}$$

令 $\lambda = i\omega_3 (\omega_3 > 0)$ 是该方程的根, 将其代入式(11)可得

$$\begin{cases} \omega_3^2 - A_5 = A_2\omega_3 \sin(\omega_3\tau) + (A_3 + A_4)\cos(\omega_3\tau), \\ -A_1\omega_3 = A_2\omega_3 \cos(\omega_3\tau) - (A_3 + A_4)\sin(\omega_3\tau), \end{cases} \tag{12}$$

由 $\sin^2(\omega_3\tau) + \cos^2(\omega_3\tau) = 1$ 可得

$$\omega_3^4 + (A_1^2 - A_2^2 - 2A_5)\omega_3^2 + A_5^2 - (A_3 + A_4)^2 = 0.$$

如果条件 (H_1) 和 (H_7) 成立, 则式(11)有唯一正根 ω_{30}^2 , 将其代入式(12)有

$$\begin{cases} \tau_{30} = \frac{1}{\omega_{30}} \arccos \frac{(A_3 + A_4)(\omega_{30}^2 - A_5) - A_1A_2\omega_{30}^2}{A_3 + A_4 + A_2^2\omega_{30}^2}, \\ \omega_{30} = \sqrt{\frac{-\Delta_2 + \sqrt{\Delta_2^2 - 4[A_5^2 - (A_3 + A_4)^2]}}{2}}, \end{cases}$$

其中 $\Delta_2 = A_1^2 - A_2^2 - 2A_5$. 后续证明与情形 2) 类似, 故对于系统(2)有下列结果.

定理 3 当 $\tau_1 = \tau_2 = \tau > 0$ 时, 若条件 (H_1) 和 (H_7) 成立, 则当 $\tau \in [0, \tau_{30})$ 时, 平衡点 E^* 是局部稳定的; 当 $\tau > \tau_{30}$ 时, 平衡点 E^* 稳定性被破坏; 当 $\tau = \tau_{30}$ 时, 系统(2)发生 Hopf 分支.

情形 5) $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$.

考虑到式(4)中 τ_1 在稳定区间, 以 τ_2 为参数, 设 $\lambda = i\omega_4 (\omega_4 > 0)$ 是方程(4)的根, 将其代入式(4)有

$$\begin{cases} -A_1\omega_4 + A_4 \sin(\omega_4\tau_2) = A_2\omega_4 \cos(\omega_4\tau_1) - A_3 \sin(\omega_4\tau_1), \\ \omega_4^2 - A_5 - A_4 \cos(\omega_4\tau_2) = A_2\omega_4 \sin(\omega_4\tau_1) + A_3 \cos(\omega_4\tau_1), \end{cases} \tag{13}$$

消去 τ_2 , 有

$$\omega_4^4 + (A_1^2 + A_2^2 - 2A_5)\omega_4^2 + A_3^2 + A_5^2 - A_4^2 - 2[A_2\omega_4^3 - (A_2A_5 - A_1A_3)\omega_4] \sin(\omega_4\tau_1) + 2[\omega_4^2(A_1A_2 - A_3) + A_3A_5] \cos(\omega_4\tau_1) = 0.$$

假设:

(H_8) 式(13)有有限个正根;

(H_9) $AC + BD > 0$.

若条件 (H_8) 成立, 则式(13)的根可表示为 $\omega_{41}, \omega_{42}, \dots, \omega_{4j}$. 对每个固定的 $\omega_{4i} (i = 1, 2, \dots, j)$, 由式(13)可表示出对应的 $\tau_{4i}^{(k)}$ 为

$$\tau_{4i}^{(k)} = \frac{1}{\omega_{4i}} \arccos \frac{\omega_{4i}^2 - A_5 - A_2\omega_{4i} \sin(\omega_{4i}\tau_1) - A_3 \cos(\omega_{4i}\tau_1)}{A_4} + \frac{2k\pi}{\omega_{4i}}, \quad i = 1, 2, \dots, j, \quad k = 0, 1, \dots.$$

令 $\tau^* = \min\{\tau_{4i}^{(k)} \mid i = 1, 2, \dots, j; k = 0, 1, \dots\}$, $\omega^* = \omega_{4i}$.

引理 2 若条件 (H_9) 成立, 则 $\text{sign}\left\{\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right)\right\}_{\tau_2=\tau^*} > 0$.

证明: 对式(4)关于 τ_2 求导有

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right)^{-1} = \frac{2\lambda + A_1 + [A_2 - \tau_1(A_2\lambda + A_3)]e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda A_4 e^{-\lambda\tau_2}} - \frac{\tau_2}{\lambda},$$

计算可得

$$\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right)^{-1}\Bigg|_{\tau_2=\tau^*} = \frac{AC + BD}{C^2 + D^2},$$

其中

$$\begin{aligned} A &= A_1 + (A_2 - A_3\tau_1)\cos(\omega^*\tau_1) - A_2\tau_1\omega^*\sin(\omega^*\tau_1), \\ B &= 2\omega^* + (A_3\tau_1 - A_2)\sin(\omega^*\tau_1) - A_2\tau_1\omega^*\cos(\omega^*\tau_1), \end{aligned}$$

$$C = A_4 \omega^* \sin(\omega^* \tau^*), \quad D = A_4 \omega^* \cos(\omega^* \tau^*).$$

又因为 $C^2 + D^2 > 0$, 由 $AC + BD > 0$, 则有

$$\text{sign} \left\{ \text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau_2} \right) \Big|_{\tau_2 = \tau^*} \right\} > 0.$$

由上述讨论可得:

定理 4 对于系统(2), 设 $\tau_1 \in [0, \tau_{10}]$ 为从其稳定区间选择的值, 若条件 $(H_1), (H_8), (H_9)$ 成立, 则当 $\tau_2 \in [0, \tau^*]$ 时, 平衡点 E^* 是渐近稳定的; 当 $\tau > \tau^*$ 时, 平衡点 E^* 是不稳定的; 当 $\tau = \tau^*$ 时, 系统(2)在正平衡点处发生 Hopf 分支.

3 Hopf 分支方向及稳定性

下面在 $\tau_1 = \tau_2 = \tau = \tau_{30}$ 条件下, 用 Hassard 等^[14] 给出的方法研究并计算系统(2)在正平衡点 E^* 处 Hopf 分支特性的表现形式.

令 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$, 其中 $u_1(t) = x(\tau t)$, $u_2(t) = y(\tau t)$, $\tau = \tau_{30} + \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$. $\mu = 0$ 是系统(2)的一个 Hopf 分支值, 则系统(2)在 $C = C([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ 上变为一般的泛函微分方程

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{L}_\mu(\mathbf{u}_t) + \mathbf{F}(\mu, \mathbf{u}_t), \quad (14)$$

其中 $\mathbf{L}_\mu: C \rightarrow \mathbb{R}^2$ 和 $\mathbf{F}: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^2$ 分别由以下形式给出:

$$\mathbf{L}_\mu(\boldsymbol{\phi}) = (\tau_{30} + \mu) \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{pmatrix} + (\tau_{30} + \mu) \begin{pmatrix} P'_{11} & 0 \\ P'_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(-1) \\ \phi_2(-1) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}(\mu, \boldsymbol{\phi}) = (\tau_{30} + \mu) (F_1(\mu, \boldsymbol{\phi}), F_2(\mu, \boldsymbol{\phi}))^T,$$

这里

$$\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2) \in C([-1, 0], \mathbb{R}^2),$$

$$F_1(\mu, \boldsymbol{\phi}) = \frac{a_{11}}{2} \phi_1^2(0) + a_{12} \phi_1(0) \phi_2(0) + a_{13} \phi_1(0) \phi_1(-1),$$

$$F_2(\mu, \boldsymbol{\phi}) = b \phi_1(-1) \phi_2(0),$$

$$a_{11} = -\frac{2am^2 y^*}{(m+x^*)^3}, \quad a_{12} = -\frac{ax^{*2} + 2max^*}{(m+x^*)^2}, \quad a_{13} = -r.$$

故由 Riesz 表示定理知, 对于 $\theta \in [-1, 0]$, 存在一个有界变差的 2×2 矩阵 $\boldsymbol{\eta}(\theta, \mu)$, 使得

$$\mathbf{L}_\mu(\boldsymbol{\phi}) = \int_{-1}^0 d\boldsymbol{\eta}(\theta, \mu) \boldsymbol{\phi}(\theta),$$

$$\boldsymbol{\eta}(\theta, \mu) = (\tau_{30} + \mu) \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{22} \end{pmatrix} \delta(\theta) + (\tau_{30} + \mu) \begin{pmatrix} P'_{11} & 0 \\ P'_{21} & 0 \end{pmatrix} \delta(\theta + 1),$$

其中 $\delta(\theta)$ 是 Dirac-Delta 函数.

对于 $\boldsymbol{\phi} \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$, 定义

$$\mathbf{A}(\mu) \boldsymbol{\phi}(\theta) = \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\phi}}(\theta), & \theta \in [-1, 0), \\ \int_{-1}^0 d\boldsymbol{\eta}(\theta, \mu) \boldsymbol{\phi}(\theta), & \theta = 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{R}(\mu) \boldsymbol{\phi}(\theta) = \begin{cases} (0, 0)^T, & \theta \in [-1, 0), \\ \mathbf{F}(\mu, \boldsymbol{\phi}), & \theta = 0. \end{cases}$$

于是系统(14)可改写为如下形式:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}(\mu) \mathbf{u}_t + \mathbf{R}(\mu) \mathbf{u}_t, \quad (15)$$

其中 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{u}_t(\theta) = \mathbf{u}(t + \theta)$, $\theta \in [-1, 0]$.

对于 $\boldsymbol{\psi} \in C^1([-1, 0], (\mathbb{R}^2)^*)$, 定义 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(0)$ 的伴随算子 \mathbf{A}^* 为

$$\mathbf{A}^* \boldsymbol{\psi}(s) = \begin{cases} -\frac{d\boldsymbol{\psi}}{ds}, & s \in (0, 1], \\ \int_{-1}^0 \boldsymbol{\psi}(-s) d\boldsymbol{\eta}(s, \mu), & s = 0; \end{cases}$$

双线性内积为

$$\langle \boldsymbol{\psi}(s), \boldsymbol{\phi}(\theta) \rangle = \overline{\boldsymbol{\psi}}^T(0) \boldsymbol{\phi}(0) - \int_{\theta=-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \overline{\boldsymbol{\psi}}^T(\xi - \theta) d\boldsymbol{\eta}(\theta) \boldsymbol{\phi}(\xi) d\xi.$$

因为 $i\omega_3 \tau_{30}$ 是 $\mathbf{A}(0)$ 的特征根, 所对应的特征向量为 $\mathbf{q}(\theta)$, 故有 $\mathbf{A}(0)\mathbf{q}(\theta) = i\omega_3 \tau_{30} \mathbf{q}(\theta)$, 同理对于 $\mathbf{A}^*(0)$ 有 $\mathbf{A}^*(0)\mathbf{q}^*(s) = -i\omega_3 \tau_{30} \mathbf{q}^*(s)$. 计算可得

$$\mathbf{q}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} e^{i\omega_3 \tau_{30} \theta}, \quad \theta \in [-1, 0); \quad \mathbf{q}^*(s) = M \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_3 \tau_{30} s}, \quad s \in (0, 1],$$

其中

$$\gamma_2 = \frac{i\omega_3 - P_{11} - P'_{11} e^{-i\omega_3 \tau_{30}}}{P_{12}}, \quad \beta_1 = \frac{-i\omega_3 - P_{22}}{P_{12}}, \quad M = \frac{1}{(\beta_1 + \bar{\gamma}_2) + \tau_3 e^{-i\omega_3 \tau_{30}} (\beta_1 P'_{11} + P'_{21})},$$

则有 $\mathbf{q}(\theta)$ 和 $\mathbf{q}^*(s)$, 使得 $\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{q} \rangle = 1, \langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle = 0$.

令 \mathbf{X}_t 为方程(10)在 $\mu=0$ 时的解, 定义 $z(t) = \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{X}_t \rangle$,

$$\mathbf{W}(t, \theta) = \mathbf{X}_t(\theta) - 2\text{Re}\{z(t)\mathbf{q}(\theta)\} = \mathbf{X}_t(\theta) - z(t)\mathbf{q}(\theta) - \bar{z}(t)\bar{\mathbf{q}}(\theta).$$

在中心流形 C_0 上, 当 $\mu=0$ 时, 有

$$\mathbf{W}(t, \theta) = \mathbf{W}(z(t), \bar{z}(t), \theta) = \mathbf{W}_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + \mathbf{W}_{11}(\theta) z\bar{z} + \mathbf{W}_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots, \quad (16)$$

其中 z 和 \bar{z} 是中心流形 C_0 上 \mathbf{q}^* 和 $\bar{\mathbf{q}}^*$ 方向上的局部坐标. 又

$$\dot{z}(t) = i\omega_3 \tau_{30} z(t) + \bar{\mathbf{q}}^{*T}(0) \begin{pmatrix} F_1(\mu, \boldsymbol{\phi}) \\ F_2(\mu, \boldsymbol{\phi}) \end{pmatrix} = i\omega_3 \tau_{30} z(t) + \bar{g}(z, \bar{z}),$$

其中

$$g(z, \bar{z}) = g_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + g_{11}(\theta) z\bar{z} + g_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21}(\theta) \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots.$$

由式(15), (16)可得

$$\dot{\mathbf{W}} = \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{W} - 2\text{Re}\{\bar{\mathbf{q}}^{*T}(0)\mathbf{F}(\mu, \boldsymbol{\phi})\mathbf{q}(\theta)\}, & \theta \in [-1, 0), \\ \mathbf{A}\mathbf{W} - 2\text{Re}\{\bar{\mathbf{q}}^{*T}(0)\mathbf{F}(\mu, \boldsymbol{\phi})\mathbf{q}(\theta)\} + \mathbf{F}(\mu, \boldsymbol{\phi}), & \theta = 0, \end{cases}$$

即

$$\dot{\mathbf{W}} \triangleq \mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{H}(z, \bar{z}, \theta),$$

其中

$$\mathbf{H}(z, \bar{z}, \theta) = \mathbf{H}_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + \mathbf{H}_{11}(\theta) z\bar{z} + \mathbf{H}_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots.$$

比较系数可得 $(2i\omega_3 \tau_0 - \mathbf{A})\mathbf{W}_{20}(\theta) = \mathbf{H}_{20}(\theta), -\mathbf{A}\mathbf{W}_{11}(\theta) = \mathbf{H}_{11}(\theta)$. 基于文献[14]的方法, 可得如下系数:

$$\begin{aligned} g_{20} &= \tau_0 \bar{M} [\bar{\beta}_1 (a_{11} + 2a_{12}\alpha_2 + 2a_{13} e^{-i\omega_3 \tau_{30}}) + 2b\alpha_2 e^{-i\omega_3 \tau_{30}}], \\ g_{11} &= \tau_0 \bar{M} \{ \bar{\beta}_1 [a_{11} + a_{12}(\alpha_2 + \bar{\alpha}_2) + a_{13}(e^{i\omega_0 \tau_0} + e^{-i\omega_0 \tau_0})] + b(\alpha_2 e^{i\omega_3 \tau_{30}} + \bar{\alpha}_2 e^{-i\omega_3 \tau_{30}}) \}, \\ g_{02} &= \tau_0 \bar{M} [\bar{\beta}_1 (a_{11} + 2a_{12}\bar{\alpha}_2 + 2a_{13} e^{i\omega_3 \tau_{30}}) + 2b\bar{\alpha}_2 e^{i\omega_3 \tau_{30}}], \\ g_{21} &= 2\tau_0 \bar{M} \left\{ \bar{\beta}_1 \left[a_{11} \left(\mathbf{W}_{11}^1(0) + \frac{1}{2} \mathbf{W}_{20}^1(0) \right) + a_{12} \left(\mathbf{W}_{11}^1(0)\alpha_2 + \frac{1}{2} \mathbf{W}_{20}^1(0)\bar{\alpha}_2 + \mathbf{W}_{11}^2(0) + \frac{1}{2} \mathbf{W}_{20}^2(0) \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. a_{13} \left(\mathbf{W}_{11}^1(0)e^{-i\omega_3 \tau_{30}} + \frac{1}{2} \mathbf{W}_{20}^1(0)e^{i\omega_3 \tau_{30}} + \mathbf{W}_{11}^1(-1) + \frac{1}{2} \mathbf{W}_{20}^1(-1) \right) + \right. \\ &\quad \left. b \left(\mathbf{W}_{11}^1(-1)\alpha_2 + \frac{1}{2} \mathbf{W}_{20}^1(-1)\bar{\alpha}_2 + \mathbf{W}_{11}^2(0)e^{-i\omega_3 \tau_{30}} + \frac{1}{2} \mathbf{W}_{20}^2(0)e^{i\omega_3 \tau_{30}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{20}(\theta) &= -\frac{g_{20}}{i\omega_3 \tau_{30}} \mathbf{q}(\theta) - \frac{\bar{g}_{20}}{3i\omega_3 \tau_{30}} \bar{\mathbf{q}}(\theta) + E_1 e^{2i\omega_3 \tau_{30} \theta}, \\ \mathbf{W}_{11}(\theta) &= \frac{g_{11}}{i\omega_3 \tau_{30}} \mathbf{q}(\theta) - \frac{\bar{g}_{11}}{i\omega_3 \tau_{30}} \bar{\mathbf{q}}(\theta) + E_2, \end{aligned}$$

$E_1 = (E_1^{(1)}, E_1^{(2)})^T \in \mathbb{R}^2$ 和 $E_2 = (E_2^{(1)}, E_2^{(2)})^T \in \mathbb{R}^2$ 为常向量. 由 $A(\mu)\phi(\theta)$ 定义可得

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2i\omega_3 - P_{11} - P'_{11}e^{-2i\omega_3\tau_{30}} & -P_{12} \\ -P'_{21}e^{-2i\omega_3\tau_{30}} & 2i\omega_3 - P_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12}\alpha_2 + 2a_{13}e^{-i\omega_3\tau_{30}} \\ 2b\alpha_2 e^{-i\omega_3\tau_{30}} \end{pmatrix},$$

$$E_2 = - \begin{pmatrix} P_{11} + P'_{11} & P_{12} \\ P'_{21} & P_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12}(\alpha_2 + \bar{\alpha}_2) + a_{13}(e^{i\omega_3\tau_{30}} + e^{-i\omega_3\tau_{30}}) \\ b(\alpha_2 e^{i\omega_3\tau_{30}} + \bar{\alpha}_2 e^{-i\omega_3\tau_{30}}) \end{pmatrix}.$$

因此有

$$C_1(0) = \frac{i}{2\omega_3\tau_{30}} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{1}{2}g_{21}, \tag{17}$$

$$\mu_2 = \frac{\text{Re}\{C_1(0)\}}{\text{Re}\{\lambda'(\tau_0)\}}, \quad \beta_2 = 2\text{Re}\{C_1(0)\}, \quad T_2 = \frac{\text{Im}\{C_1(0)\} + \mu_2 \text{Im}\{\lambda'(\tau_0)\}}{\omega_3\tau_{30}}. \tag{18}$$

由式(17),(18)易知 $C_1(0), \mu_2, \beta_2, T_2$ 的值, 从而决定了在临界值 $\tau = \tau_{30}$ 处 Hopf 分支的性质, 因此有如下结论.

定理 5 当 $\tau = \tau_{30}$ 时, 式(18)中各变量确定了系统(2)周期解的 Hopf 分支性质:

- 1) Hopf 分支的临界性质由 μ_2 决定, 当 $\mu_2 > 0$ ($\mu_2 < 0$) 时, Hopf 分支是超临界的(次临界的);
- 2) 分支周期解的稳定性由 β_2 决定, 当 $\beta_2 < 0$ ($\beta_2 > 0$) 时, 分支周期解在中心流形上是稳定的(不稳定的);
- 3) 分支周期解的周期由 T_2 决定, 当 $T_2 > 0$ ($T_2 < 0$) 时, 分支周期解的周期增大(减小).

4 数值模拟

为验证上述理论分析的正确性, 下面选取合适的参数, 并设置初始值为(1,1), 对系统(2)进行分析. 此时, 有

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1.7x[1 - x(t - \tau_1)] - 0.7xy \left(\frac{x}{0.5 + x} \right) - 0.8 \times 0.2x, \\ \frac{dy}{dt} = 0.8x(t - \tau_2)y - 0.3y - 0.6 \times 0.1y, \end{cases} \tag{19}$$

系统(19)满足定理 1, 且存在唯一平衡点 $E^* = (0.450\ 0, 2.337\ 3)$.

当 $\tau_1 > 0, \tau_2 = 0$ 时, 计算得 $\omega_{20} \approx 0.943\ 0, \tau_{20} \approx 2.262\ 0$. 当 $\tau_1 = 2.1 < \tau_{20} \approx 2.262\ 0$ 时, 系统(19)的平衡点 E^* 是渐近稳定的, 如图 1 所示; 当 $\tau_1 = 2.3 > \tau_{20} \approx 2.262\ 0$ 时, 系统(19)的平衡点 E^* 失去稳定性, 如图 2 所示.

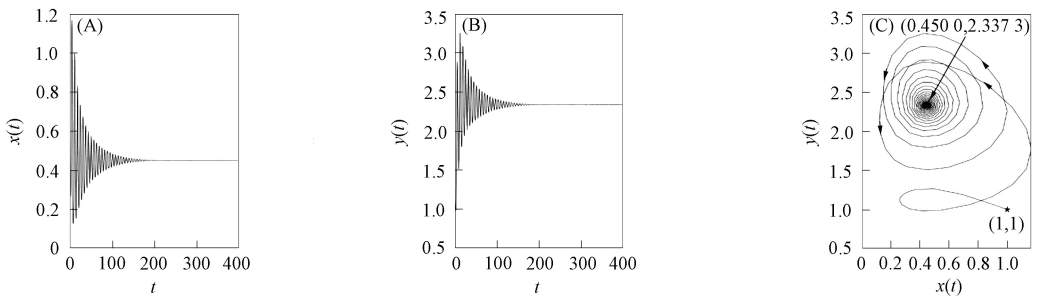


图 1 当 $\tau_1 = 2.1 < \tau_{20} \approx 2.262\ 0, \tau_2 = 0$ 时, 系统(19)的波图(A),(B)和相图(C)

Fig. 1 Waveform diagrams (A), (B) and phase diagram (C) of system (19) when $\tau_1 = 2.1 < \tau_{20} \approx 2.262\ 0, \tau_2 = 0$

当 $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$ 时, 固定 $\tau_1 = 2.1$, 计算可得 $\omega^* \approx 0.966\ 2, \tau^* \approx 0.251\ 0$. 当 $\tau_2 = 0.1 < \tau^* \approx 0.251\ 0$ 时, 系统(19)的平衡点 E^* 是渐近稳定的, 如图 3 所示; 当 $\tau_2 = 0.3 > \tau^* \approx 0.251\ 0$ 时, 系统(19)的平衡点 E^* 是不稳定的, 如图 4 所示.

为验证情形 4) 的结论, 另取一组参数: $r = 1.6, a = 1.2, b = 2, m = 0.5, d = 0.6, q_1 = 0.2, q_2 = 0.6, E_1 = 0.3, E_2 = 0.6$, 设置初始值为(0.5, 0.5), 此时仍满足 $r(b - d - q_2 E_2) > bq_1 E_1$, 系统(19)的正平衡点 $E^* = (0.480\ 0, 1.313\ 5)$ 存在.

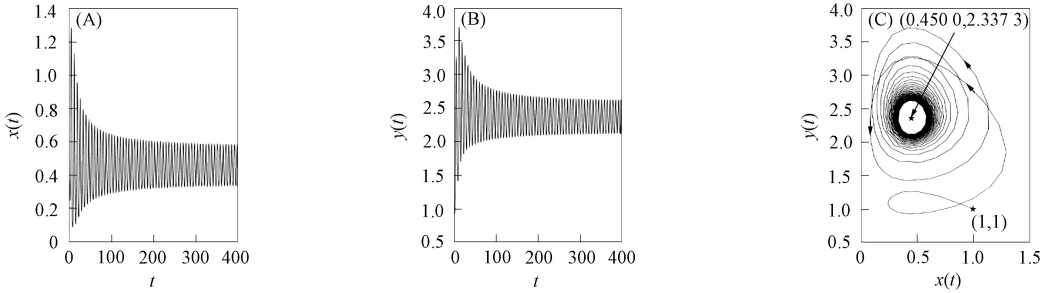


图 2 当 $\tau_1 = 2.3 > \tau_{20} \approx 2.2620, \tau_2 = 0$ 时, 系统 (19) 的波图 (A), (B) 和相图 (C)

Fig. 2 Waveform diagrams (A), (B) and phase diagram (C) of system (19) when $\tau_1 = 2.3 > \tau_{20} \approx 2.2620, \tau_2 = 0$

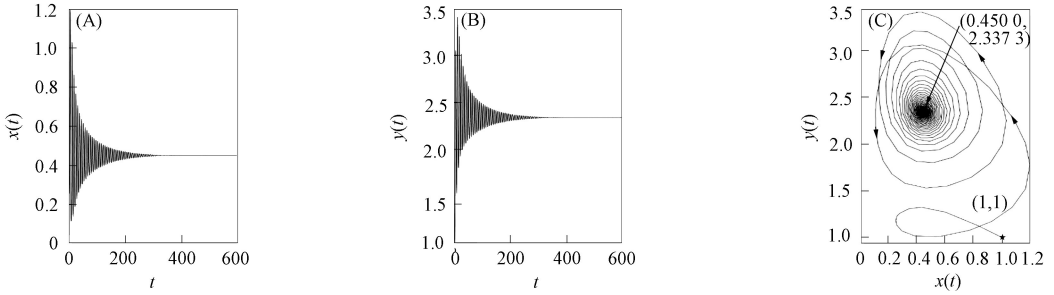


图 3 当 $\tau_1 = 2.1, \tau_2 = 0.1 < \tau^* \approx 0.2510$ 时, 系统 (19) 的波图 (A), (B) 和相图 (C)

Fig. 3 Waveform diagrams (A), (B) and phase diagram (C) of system (19) when $\tau_1 = 2.1, \tau_2 = 0.1 < \tau^* \approx 0.2510$

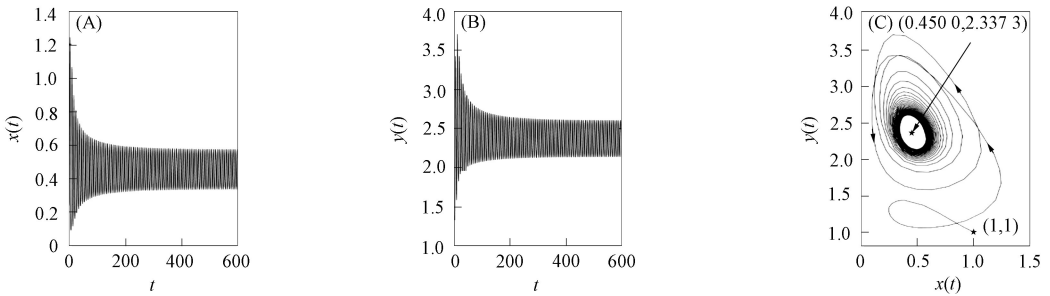


图 4 当 $\tau_1 = 2.1, \tau_2 = 0.3 > \tau^* \approx 0.2510$ 时, 系统 (19) 的波图 (A), (B) 和相图 (C)

Fig. 4 Waveform diagrams (A), (B) and phase diagram (C) of system (19) when $\tau_1 = 2.1, \tau_2 = 0.3 > \tau^* \approx 0.2510$

当 $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ 时, 计算可得 $\omega_3 \approx 0.9948, \tau_{30} \approx 1.2434, C_1(0) \approx -1.4426 + 0.3513i, \mu_2 \approx -1.0700 < 0, \beta_2 \approx -2.8852 < 0, T_2 \approx -0.7624 < 0$. 由定理 5 可知, 系统 (19) 在此处发生的 Hopf 分支是次临界的, 周期解的振幅和频率会出现突然的跳跃或震荡, 分支周期解稳定并呈现递减趋势. 所以当 $\tau = 1.1 < \tau_{30} \approx 1.2434$ 时, 系统 (19) 的平衡点 E^* 是渐近稳定的, 如图 5 所示; 当 $\tau = 1.3 > \tau_{30} \approx 1.2434$ 时, 系统 (19) 的平衡点 E^* 失去稳定性, 如图 6 所示.

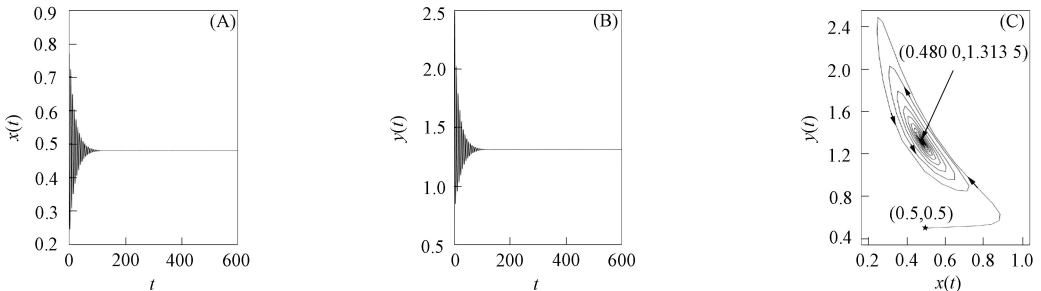


图 5 当 $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 1.1 < \tau_{30} \approx 1.2434$ 时, 系统 (19) 的波图 (A), (B) 和相图 (C)

Fig. 5 Waveform diagrams (A), (B) and phase diagram (C) of system (19) when $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 1.1 < \tau_{30} \approx 1.2434$

综上所述, 本文以两个时滞 τ_1, τ_2 为分支参数, 对一类具有收获项和 Allee 效应影响的 Lotka-Volterra 捕食-食饵系统进行了分析, 数值模拟结果表明: 当时滞发生数值改变时, 若时滞较小 (小于

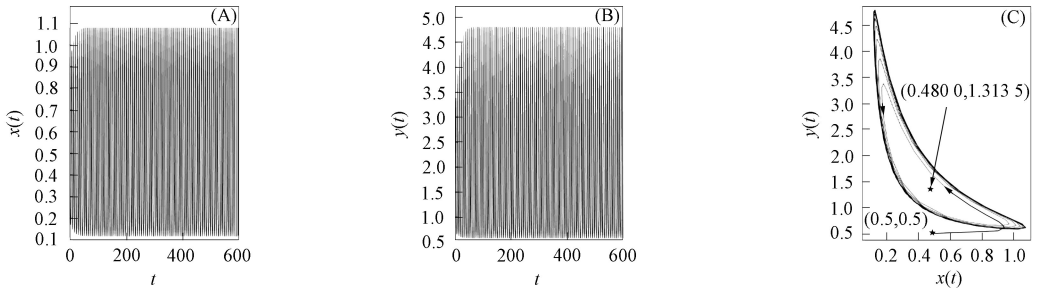


图 6 当 $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 1.3 > \tau_{30} \approx 1.2434$ 时, 系统(19)的波图(A),(B)和相图(C)

Fig. 6 Waveform diagrams (A), (B) and phase diagram (C) of system (19) when $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 1.3 > \tau_{30} \approx 1.2434$

临界值), 则系统会维持稳定状态; 若时滞达到甚至超出临界值, 则可能导致捕食者和食饵之间的相互作用出现失调, 使二者的数量难以保持平衡, 甚至导致捕食者或食饵的灭绝. 从生物学意义讲, 在捕食-食饵系统中考虑时滞有助于揭示生态系统中复杂动态行为的产生机制.

参 考 文 献

- [1] TAKYI E M, OHANIAN C, CATHCART M, et al. Dynamical Analysis of a Predator-Prey System with Prey Vigilance and Hunting Cooperation in Predators [J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2024, 21(2): 2768-2786.
- [2] WU H Q X, LI Z, HE M X. Dynamic Analysis of a Leslie-Gower Predator-Prey Model with the Fear Effect and Nonlinear Harvesting [J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2023, 20(10): 18592-18629.
- [3] YANG W B, LI D Q. Dynamics Analysis and Numerical Implementations of a Diffusive Predator-Prey Model with Herd Behaviour and Allee Effect [J]. *Systems Science & Control Engineering*, 2022, 10(1): 572-582.
- [4] ALLEE W C. Animal Aggregations [J]. *The Quarterly Review of Biology*, 1927, 2(3): 367-398.
- [5] ODUM E. *Fundamentals of Ecology* [M]. London: The Book Club, 1938: 56-69.
- [6] XIA Y, CHEN L J, SRIVASTAVA V, et al. Stability and Bifurcation Analysis of a Two-Patch Model with Allee Effect and Dispersal [J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2023, 20(11): 19781-19807.
- [7] KANG Y, SASMAL S K, BHOWMICK A R, et al. Dynamics of a Predator-Prey System with Prey Subject to Allee Effects and Disease [J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2014, 11(4): 877-918.
- [8] NI W J, WANG M X. Dynamics and Patterns of a Diffusive Leslie-Gower Prey-Predator Model with Strong Allee Effect in Prey [J]. *Journal of Differential Equations*, 2016, 261(7): 4244-4274.
- [9] LIU Y Y, CAO Q, YANG W S. Influence of Allee Effect and Delay on Dynamical Behaviors of a Predator-Prey System [J]. *Computational and Applied Mathematics*, 2022, 41(8): 396-1-396-19.
- [10] 周起梅, 林思佳, 陈凤德, 等. Allee效应对 Lotka-Volterra 捕食-食饵模型的动力学行为影响 [J]. *福州大学学报(自然科学版)*, 2022, 50(6): 723-728. (ZHOU Q M, LIN S J, CHEN F D, et al. Influence of Allee Effect on the Dynamic Behaviors of Lotka-Volterra Prey-Predator Model [J]. *Journal of Fuzhou University (Natural Science Edition)*, 2022, 50(6): 723-728.)
- [11] 高鹤, 李秀玲. 具时滞的捕食-食饵共生模型的 Hopf 分支 [J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2023, 61(6): 1339-1350. (GAO H, LI X L. Hopf Bifurcation of Predator-Prey Symbiotic Model with Time Delay [J]. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, 2023, 61(6): 1339-1350.)
- [12] YANG W S, CAO Q. Dynamics of a Delayed Stage Structure Predator-Prey Model with Predator-Dependent Prey Refuge [J]. *International Journal of Computing Science and Mathematics*, 2024, 19(2): 107-122.
- [13] 林文贤. 带脉冲的多时滞分数阶阻尼偏微分方程解的强迫振动性 [J]. *华东师范大学学报(自然科学版)*, 2024(2): 33-41. (LIN W X. Forced Oscillation of Fractional Damped Partial Differential Equation Solutions with Impulsive Delays [J]. *Journal of East China Normal University (Natural Science)*, 2024(2): 33-41.)
- [14] HASSARD B D, KAZARINOFF N D, WAN Y H. *Theory and Applications of Hopf Bifurcation* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981: 13-25.