第 63 卷　第 2 期　　吉 林 大 学 学 报（理 学 版）　　Vol. 63　No. 2
2025 年 3 月　　Journal of Jilin University (Science Edition)　　Mar　2025

doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024214

适型分数阶微分方程解的存在唯一性与稳定性

张鲁潮，刘锡平，贾　梅，宇振盛
（上海理工大学 理学院，上海 200093）

摘要：利用 Schauder 不动点定理和 Banach 压缩映射原理，研究一类具有时滞的适型分数阶脉冲微分方程边值问题，建立了其解的存在唯一性定理，并基于此得到了 Ulam-Hyers 稳定性和 Ulam-Hyers-Rassias 稳定性的结论，最后给出一个实例验证理论结果.

关键词：适型分数阶导数；脉冲；时滞；存在唯一性；Ulam-Hyers 稳定性；Ulam-Hyers-Rassias 稳定性

中图分类号：O175.8　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1671-5489(2025)02-0287-10

Existence, Uniqueness and Stability of Solutions of Conformable Fractional Differential Equation

ZHANG Luchao, LIU Xiping, JIA Mei, YU Zhensheng
(*College of Science*, *University of Shanghai for Science and Technology*, *Shanghai* 200093, *China*)

Abstract: By using Schauder fixed point theorem and Banach compression mapping principle, we studied a class of conformable fractional impulsive differential equation boundary value problems with delay, and established the existence and uniqueness theorems of the solutions. Based on this, we obtained the conclusions of Ulam-Hyers stability and Ulam-Hyers-Rassias stability. Finally, we provided an example to verify the theoretical results.

Keywords: conformable fractional derivative; impulsive; delay; existence and uniqueness; Ulam-Hyers stability; Ulam-Hyers-Rassias stability

0　引　言

分数阶微分方程应用广泛，目前，关于分数阶微分方程边值问题理论与应用的研究已取得了许多成果[1-8]. 例如：Khalil 等[7]提出了适型分数阶导数和分数阶积分的定义；Abdeljawad[8]拓展了适型分数阶微积分的定义，提出并讨论了其链式法则、指数函数、Gronwall 不等式、分部积分、Taylor 幂级数展开、Laplace 变换和线性微分系统等. 近年来，对适型分数阶导数和积分的研究也取得了丰富成果[9-12]. 例如：Li 等[9]研究了适型分数阶微分方程初值问题解的存在性和稳定性；Thaiprayoon 等[10]利用上下解方法和单调迭代技术研究了非线性时滞脉冲适型分数阶微分方程解的存在性；Wan 等[11]研究了适型脉冲微分方程反周期边值问题解的存在性和稳定性；张敏等[12]利用 Leray-Schauder 度理论和 Banach 压缩映射原理研究了适型分数阶时滞微分方程边值问题解的存在性与唯一性.

收稿日期：2024-05-21.　**网络首发日期：**2024-10-21.

第一作者简介：张鲁潮(1981—)，男，汉族，博士，助理研究员，从事微分方程理论与应用的研究，E-mail：zhlch.2009@usst.edu.cn.

基金项目：国家自然科学基金(批准号：12371308；12271362)和上海理工大学教师发展研究项目(批准号：CFTD2024ZD12).

网络首发地址：https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20241018.0949.001.

Ulam 稳定性理论由于广泛应用于最优化、生物学、经济学等领域，因此得到广泛关注[9,11,13-17]. Wang 等[13]研究了一阶脉冲常微分方程的 Ulam 稳定性；Wang 等[14]研究了非线性脉冲切换耦合演化方程初值问题的 Ulam 稳定性；Muthaiah 等[15]研究了非线性耦合 Caputo-Hadamard 型分数阶微分系统解的存在性和 Ulam 稳定性；Agarwal 等[16]研究了 Caputo 分数阶微分方程边值问题的 Ulam 稳定性；白玉洁等[17]研究了一类含有 Riemann-Liouville 分数阶导数的时滞随机发展方程温和解的存在唯一性和 Ulam 稳定性.

但上述研究多数是关于初值问题的 Ulam 稳定性，而关于分数阶微分方程边值问题的 Ulam 稳定性研究目前报道较少. 基于此，本文考虑一类具有时滞的适型分数阶脉冲微分方程边值问题解的存在唯一性和 Ulam 稳定性：

$$\begin{cases} T_0^{\alpha}x(t)+f_1(t,x(t),x(t+\tau))=0, & t\in(0,t_0), \\ T_{t_0}^{\alpha}x(t)+f_2(t,x(t),x(t-\tau))=0, & t\in(t_0,1), \\ \Delta x(t)\big|_{t=t_0}=p(x(t_0)),\quad \Delta x'(t)\big|_{t=t_0}=q(x(t_0)), \\ x(0)=x'(1)=0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $1<\alpha<2$，T_{β}^{α} 是以 β 为起点的 α 阶适型分数阶微分算子，$0<t_0<1$，$J=[0,1]$，$p,q\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$，$0\leqslant\tau\leqslant\min\{t_0,1-t_0\}$，$f_1,f_2\in C(J\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$，$\Delta x(t)\big|_{t=t_0}=x(t_0^+)-x(t_0^-)$，$\Delta x(t)\big|_{t=t_0}=x(t_0^+)-x(t_0^-)$，$x(t_0^+),x(t_0^-),x'(t_0^+),x'(t_0^-)$分别是 $x(t)$和 $x'(t)$在 t_0 处的左右极限.

1 预备知识

令 $J_1=[0,t_0]$，$J_2=(t_0,1]$，$J'=J\setminus\{t_0\}$，$\lambda=\max\{t_0,1-t_0\}$. 设分段连续函数空间

$$\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})=\{x\colon J\to\mathbb{R}\,|\,x\in C(J',\mathbb{R}),\ \exists\, x(t_0^+)\text{ 和 }x(t_0^-),\text{使得 }x(t_0^-)=x(t_0)\},$$

并赋予范数 $\|x\|_{\mathrm{PC}}=\sup\limits_{t\in J}|x(t)|$，则 $\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})$是 Banach 空间.

定义 1[8] 设 $\gamma\in(n,n+1]$，$x\colon[a,+\infty)\to\mathbb{R}$，对任意的 $t>a$，x 是 n 阶可微的，则函数 x 在 $t>a$ 处的 γ 阶适型分数阶导数定义为

$$T_a^{\gamma}x(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{(n)}(t+\varepsilon(t-a)^{n+1-\gamma})-x^{(n)}(t)}{\varepsilon}.$$

注 1 给定 $\gamma\in(0,1]$，如果 x 可微，则 $T_a^{\gamma}x(t)=(t-a)^{1-\gamma}x'(t)$. 给定 $\gamma\in(n,n+1]$，有 $T_a^{\gamma}(t-a)^k=0$，其中 $k=0,1,2,\cdots,n$.

定义 2[8] 设 $\gamma\in(n,n+1]$，$x\colon[a,+\infty)\to\mathbb{R}$，则函数 x 在 $t>a$ 处的 γ 阶适型分数阶积分定义为

$$I_a^{\gamma}x(t)=\frac{1}{n!}\int_a^t(t-s)^n s^{\gamma-n-1}x(s)\mathrm{d}s.$$

引理 1[8] 设 $\gamma\in(n,n+1]$，$x\colon[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 使得 $x^{(n)}(t)$连续，则对所有的 $t>a$，有

$$T_a^{\gamma}I_a^{\gamma}x(t)=x(t).$$

引理 2[8] 设 $\gamma\in(n,n+1]$，$x\colon[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 对 $t>a$ 是$(n+1)$阶可微的，则对所有的 $t>a$，有

$$I_a^{\gamma}T_a^{\gamma}x(t)=x(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}.$$

引理 3 设 $1<\alpha<2$，$y_1,y_2\in C(J,\mathbb{R})$，$p,q\in\mathbb{R}$，则线性适型分数阶脉冲微分方程边值问题

$$\begin{cases} T_{0^+}^{\alpha}x(t)+y_1(t)=0, & t\in(0,t_0), \\ T_{t_0^+}^{\alpha}x(t)+y_2(t)=0, & t\in(t_0,1), \\ \Delta x(t)\big|_{t=t_0}=p, & \Delta x'(t)\big|_{t=t_0}=q, \\ x(0)=x'(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

有唯一解

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)\mathscr{R}(s,y_1,y_2)\mathrm{d}s+\varphi(t),$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases} s, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ t, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\end{cases} \tag{3}$$

$$\mathscr{R}(s,y_1,y_2)=\mathscr{R}(s,y_1(s),y_2(s))=\begin{cases} s^{\alpha-2}y_1(s), & 0\leqslant s\leqslant t_0\leqslant 1,\\ (s-t_0)^{\alpha-2}y_2(s), & 0\leqslant t_0\leqslant s\leqslant 1,\end{cases} \tag{4}$$

$$\varphi(t,p,q)=\begin{cases} -qt, & t\in J_1,\\ p-qt_0, & t\in J_2.\end{cases} \tag{5}$$

证明：假设 $x=x(t)$是边值问题(2)的解，则对任意的 $t\in J_1$，存在常数 $c_{10},c_{11}\in\mathbb{R}$，使得

$$x(t)=-\int_0^t(t-s)s^{\alpha-2}y_1(s)\mathrm{d}s+c_{10}+c_{11}t,\qquad x'(t)=-\int_0^t s^{\alpha-2}y_1(s)\mathrm{d}s+c_{11}.$$

由 $x(0)=0$ 知 $c_{10}=0$，故

$$x(t_0^-)=-\int_0^{t_0}(t_0-s)s^{\alpha-2}y_1(s)\mathrm{d}s+c_{11}t_0,\qquad x'(t_0^-)=-\int_0^{t_0}s^{\alpha-2}y_1(s)\mathrm{d}s+c_{11}.$$

对任意的 $t\in J_2$，存在常数 $c_{20},c_{21}\in\mathbb{R}$，使得

$$\begin{aligned} &x(t)=-\int_{t_0}^t(t-s)(s-t_0)^{\alpha-2}y_2(s)\mathrm{d}s+c_{20}+c_{21}(t-t_0),\\ &x'(t)=-\int_{t_0}^t(s-t_0)^{\alpha-2}y_2(s)\mathrm{d}s+c_{21},\\ &x(t_0^+)=c_{20},\quad x'(t_0^+)=c_{21},\\ &x'(1)=-\int_{t_0}^1(s-t_0)^{\alpha-2}y_2(s)\mathrm{d}s+c_{21}.\end{aligned} \tag{6}$$

再由 $x'(1)=0$ 知 $c_{21}=\int_{t_0}^1(s-t_0)^{\alpha-2}y_2(s)\mathrm{d}s$.

考虑脉冲条件

$$\Delta x(t)\big|_{t=t_0}=x(t_0^+)-x(t_0^-)=c_{20}+\int_0^{t_0}(t_0-s)s^{\alpha-2}y_1(s)\mathrm{d}s-c_{11}t_0,$$

$$\Delta x'(t)\big|_{t=t_0}=x'(t_0^+)-x'(t_0^-)=c_{21}+\int_0^{t_0}s^{\alpha-2}y_1(s)\mathrm{d}s-c_{11}.$$

由脉冲条件 $\Delta x(t)\big|_{t=t_0}=p$，$\Delta x'(t)\big|_{t=t_0}=q$，再结合式(6)可得

$$c_{11}=\int_0^{t_0}s^{\alpha-2}y_1(s)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^1(s-t_0)^{\alpha-2}y_2(s)\mathrm{d}s-q,$$

$$c_{20}=\int_0^{t_0}s^{\alpha-1}y_1(s)\mathrm{d}s+t_0\int_{t_0}^1(s-t_0)^{\alpha-2}y_2(s)\mathrm{d}s+p-qt_0,$$

故对任意的 $t\in J_1$，有

$$x(t)=\int_0^t s^{\alpha-1}y_1(s)\mathrm{d}s+\int_t^{t_0}ts^{\alpha-2}y_1(s)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^1 t(s-t_0)^{\alpha-2}y_2(s)\mathrm{d}s-qt,$$

对任意的 $t\in J_2$，有

$$x(t)=\int_t^1 t(s-t_0)^{\alpha-2}y_2(s)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^t s(s-t_0)^{\alpha-2}y_2(s)\mathrm{d}s+\int_0^{t_0}s^{\alpha-1}y_1(s)\mathrm{d}s+p-qt_0.$$

因此，$x(t)=\int_0^1 G(t,s)\mathscr{R}(s,y_1,y_2)\mathrm{d}s+\varphi(t,p,q)$. 证毕.

由函数 $G(t,s)$的定义，易知对任意的 $t,s\in[0,1]$，有

$$|G(t,s)|\leqslant 1. \tag{7}$$

记

$$\varphi(t,p,q)=\varphi(t,p(x(t_0)),q(x(t_0)))=\begin{cases} -tq(x(t_0)), & t\in J_1,\\ p(x(t_0))-t_0q(x(t_0)), & t\in J_2,\end{cases} \tag{8}$$

对任意的 $x\in \mathrm{PC}(J,\mathbb{R})$，设

$$\Lambda x(t)=\int_0^1 G(t,s)\mathscr{R}(s,f_1,f_2)\mathrm{d}s+\varphi(t,p,q), \tag{9}$$

则易知 Λ: $\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})\to\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})$，并且边值问题(1)与积分方程(9)等价. 即 $x=x(t)$是边值问题(1)的解当且仅当 $x=x(t)$是算子 Λ 的不动点.

2 存在唯一性

为方便叙述，下面给出假设条件.

(H_1) 存在函数 $\omega_i,\mu_i,\upsilon_i\in C(J_i,[0,+\infty))(i=1,2)$，使得对任意的 $u,v\in\mathbb{R}$，$t\in J_i$，有

$$|f_i(t,u,v)|\leqslant\omega_i(t)+\mu_i(t)|u|+\upsilon_i(t)|v|,$$

且记

$$\omega^*=\max\{\sup_{t\in J_1}\omega_1(t),\sup_{t\in J_2}\omega_2(t)\},\qquad \mu^*=\max\{\sup_{t\in J_1}\mu_1(t),\sup_{t\in J_2}\mu_2(t)\},$$
$$\upsilon^*=\max\{\sup_{t\in J_1}\upsilon_1(t),\sup_{t\in J_2}\upsilon_2(t)\};$$

(H_2) 存在常数 $M_p,N_p,M_q,N_q>0$，使得对任意的 $u\in\mathbb{R}$，有

$$|p(u)|\leqslant M_p|u|+N_p,\qquad |q(u)|\leqslant M_q|u|+N_q;$$

(H_3) 存在常数 M_{f_i},N_{f_i}，使得对任意的 $u,v,\bar{u},\bar{v}\in\mathbb{R}$，$t\in J_i(i=1,2)$，有

$$|f_i(t,u,v)-f_i(t,\bar{u},\bar{v})|\leqslant M_{f_i}|u-\bar{u}|+N_{f_i}|v-\bar{v}|;$$

(H_4) 存在常数 $l,l^*>0$，使得对任意的 $u,v,\bar{u},\bar{v}\in\mathbb{R}$，有

$$|p(u)-p(\bar{u})|\leqslant l|u-\bar{u}|,\qquad |q(u)-q(\bar{u})|\leqslant l^*|u-\bar{u}|.$$

定理 1 假设(H_1)和(H_2)成立，若 $2\lambda^{\alpha-1}(\mu^*+\upsilon^*)<(\alpha-1)(1-M_p-M_q)$成立，则适型分数阶时滞脉冲微分方程边值问题(1)至少有一个解.

证明：令

$$r\geqslant\frac{2\lambda^{\alpha-1}\omega^*+(\alpha-1)(N_p-N_q)}{(\alpha-1)(1-M_p-M_q)-2\lambda^{\alpha-1}(\mu^*+\upsilon^*)},$$

并设

$$B_r=\{x\,|\,x\in\mathrm{PC}(J,\mathbb{R}),\|x\|_{\mathrm{PC}}\leqslant r\}.$$

1) 证明 Λ: $B_r\to B_r$.

对任意的 $x\in B_r$ 和任意的 $t\in J_k(k=1,2)$，由条件(H_1)可得

$$|f_1(t,x(t),x(t+\tau))|\leqslant\omega_1(t)+\mu_1(t)|x(t)|+\upsilon_1(t)|x(t+\tau)|\leqslant\omega^*+(\mu^*+\upsilon^*)r,$$
$$|f_2(t,x(t),x(t-\tau))|\leqslant\omega_2(t)+\mu_2(t)|x(t)|+\upsilon_2(t)|x(t-\tau)|\leqslant\omega^*+(\mu^*+\upsilon^*)r.$$

从而由式(7)和式(9)，可得

$$\begin{aligned}|\Lambda x(t)|\leqslant&\int_0^1|G(t,s)||\mathscr{R}(s,f_1,f_2)|\mathrm{d}s+|\varphi(t,p,q)|\leqslant\\&\int_0^1|\mathscr{R}(s,f_1,f_2)|\mathrm{d}s+\max\{|tq(x(t_0))|,|p(x(t_0))-t_0q(x(t_0))|\}\leqslant\\&\int_0^{t_0}s^{\alpha-2}|f_1(s,x(s),x(s+\tau))|\mathrm{d}s+\int_{t_0}^1(s-t_0)^{\alpha-2}|f_2(s,x(s),x(s-\tau))|\mathrm{d}s+\\&|p(x(t_0))|+|q(x(t_0))|\leqslant\\&\frac{1}{\alpha-1}t_0^{\alpha-1}(\omega^*+(\mu^*+\upsilon^*)r)+\\&\frac{1}{\alpha-1}(1-t_0)^{\alpha-1}(\omega^*+(\mu^*+\upsilon^*)r)+(M_p+M_q)r+N_p+N_q<\\&\frac{(\alpha-1)r-(2\lambda^{\alpha-1}(\mu^*+\upsilon^*))r}{\alpha-1}+\frac{2\lambda^{\alpha-1}(\mu^*+\upsilon^*)}{\alpha-1}r=r.\end{aligned}$$

故 $\|\Lambda x\|_{\mathrm{PC}}\leqslant r$.

2) 证明 Λ: $B_r\to B_r$ 是全连续算子.

设 $x_n, x \in B_r (n=1,2,\cdots)$，且 $\| x_n - x \|_{\mathrm{PC}} \to 0,\ n \to \infty$. 由于 f_1, f_2, p, q 是连续函数，因此对任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得对任意的 $t \in J_i$，当 $n \geqslant N$ 时，有

$$|f_1(t, x_n(t), x_n(t+\tau)) - f_1(t, x(t), x(t+\tau))| < \varepsilon,$$
$$|f_2(t, x_n(t), x_n(t-\tau)) - f_2(t, x(t), x(t-\tau))| < \varepsilon,$$
$$|p(x_n(t)) - p(x(t))| < \varepsilon, \qquad |q(x_n(t)) - q(x(t))| < \varepsilon.$$

因此，对任意的 $t \in J_k (k=1,2)$，有

$$\begin{aligned}
|\Lambda x_n(t) - \Lambda x(t)| \leqslant{}& \int_0^1 |G(t,s)| \, |\mathscr{R}(s, f_1(s, x_n(s), x_n(s+\tau)), f_2(s, x_n(s), x_n(s-\tau))) - \\
& \mathscr{R}(s, f_1(s, x(s), x(s+\tau)), f_2(s, x(s), x(s-\tau)))| \, \mathrm{d}s + \\
& \max\{t|q(x_n(t_0)) - q(x(t_0))|, |p(x_n(t_0)) - p(x(t_0))| + t_0|q(x_n(t_0)) - q(x(t_0))|\} \leqslant \\
& \int_0^1 |\mathscr{R}(s, f_1(s, x_n(s), x_n(s+\tau)), f_2(s, x_n(s), x_n(s-\tau))) - \\
& \mathscr{R}(s, f_1(s, x(s), x(s+\tau)), f_2(s, x(s), x(s-\tau)))| \, \mathrm{d}s + 2\varepsilon \leqslant \\
& \int_0^{t_0} s^{\alpha-2} |f_1(s, x_n(s), x_n(s+\tau)) - f_1(s, x(s), x(s+\tau))| \, \mathrm{d}s + \\
& \int_{t_0}^1 (s-t_0)^{\alpha-2} |f_2(s, x_n(s), x_n(s-\tau)) - f_2(s, x(s), x(s-\tau))| \, \mathrm{d}s + 2\varepsilon \leqslant \\
& \frac{2(\lambda^{\alpha-1} + \alpha - 1)}{\alpha - 1} \varepsilon.
\end{aligned}$$

故 $\Lambda: B_r \to B_r$ 是连续的.

对任意的 $x \in B_r$，$t_1, t_2 \in J_k (k=1,2)$，且 $t_1 < t_2$，有

$$\begin{aligned}
|\Lambda x(t_2) - \Lambda x(t_1)| \leqslant{}& \int_0^1 |G(t_2, s) - G(t_1, s)| \, |\mathscr{R}(s, f_1, f_2)| \, \mathrm{d}s + |\varphi(t_2, p, q) - \varphi(t_1, p, q)| \leqslant \\
& (t_2 - t_1) \int_0^1 |\mathscr{R}(s, f_1, f_2)| \, \mathrm{d}s + (t_2 - t_1) |q(x(t_0))| \leqslant \\
& (t_2 - t_1) \Big(\int_0^{t_0} s^{\alpha-2} |f_1(s, x(s), x(s+\tau))| \, \mathrm{d}s + \\
& \int_{t_0}^1 (s-t_0)^{\alpha-2} |f_2(s, x(s), x(s-\tau))| \, \mathrm{d}s \Big) + (t_2 - t_1)(M_q r + N_q) \leqslant \\
& (t_2 - t_1) \left[\frac{2\lambda^{\alpha-1}}{\alpha - 1} (\omega^* + (\mu^* + \upsilon^*) r) + (M_q r + N_q) \right],
\end{aligned}$$

因此，

$$|\Lambda x(\tau_2) - \Lambda x(\tau_1)| \to 0, \quad t_1 \to t_2, \quad t_1, t_2 \in J_k, \quad k = 1, 2.$$

由上述证明可知，算子 Λ 等度连续. 由 Arzela-Ascoli 定理[18]知算子 Λ 是紧的，故算子 Λ 是全连续的. 由 Schauder 不动点定理[1]可知算子 Λ 在 B_r 上有不动点，即适型分数阶时滞脉冲微分方程边值问题(1)至少有一个解. 证毕.

定理 2　假设(H_3)和(H_4)成立，若不等式

$$\lambda^{\alpha-1}(M_{f_1} + N_{f_1} + M_{f_2} + N_{f_2}) + (\alpha - 1)(l + l^*) < \alpha - 1 \tag{10}$$

成立，则适型分数阶时滞脉冲微分方程边值问题(1)有唯一解.

证明：对任意的 $x_1, x_2 \in \mathrm{PC}(J, \mathbb{R})$ 和任意的 $t \in J_k (k=1,2)$，由条件(H_3)可知

$$|f_1(s, x_2(s), x_2(s+\tau)) - f_1(s, x_1(s), x_1(s+\tau))| \leqslant (M_{f_1} + N_{f_1}) \| x_2 - x_1 \|_{\mathrm{PC}},$$
$$|f_2(s, x_2(s), x_2(s-\tau)) - f_2(s, x_1(s), x_1(s-\tau))| \leqslant (M_{f_2} + N_{f_2}) \| x_2 - x_1 \|_{\mathrm{PC}},$$

于是，有

$$\begin{aligned}
|\Lambda x_2(t) - \Lambda x_1(t)| \leqslant{}& \int_0^1 |G(t,s)| \, |\mathscr{R}(s, f_1(s, x_2(s), x_2(s+\tau)), f_2(s, x_2(s), x_2(s-\tau))) - \\
& \mathscr{R}(s, f_1(s, x_1(s), x_1(s+\tau)), f_2(s, x_1(s), x_1(s-\tau)))| \, \mathrm{d}s +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\max\{t|q(x_2(t_0))-q(x_2(t_0))|,|p(x_2(t_0))-p(x_1(t_0))|+t_0|q(x_2(t_0))-q(x_1(t_0))|\}\leqslant\\&\int_0^{t_0}s^{\alpha-2}|f_1(s,x_2(s),x_2(s+\tau))-f_1(s,x_1(s),x_1(s+\tau))|\mathrm{d}s+\\&\int_{t_0}^1(s-t_0)^{\alpha-2}|f_2(s,x_2(s),x_2(s-\tau))-f_2(s,x_1(s),x_1(s-\tau))|\mathrm{d}s+\\&l|x_2(t_0)-x_1(t_0)|+l^*|x_2(t_0)-x_1(t_0)|\leqslant\\&\frac{\lambda^{\alpha-1}(M_{f_1}+N_{f_1}+M_{f_2}+N_{f_2})+(\alpha-1)(l+l^*)}{\alpha-1}\|x_2-x_1\|_{\mathrm{PC}},\end{aligned}$$

因此,

$$\|\Lambda x_2-\Lambda x_1\|_{\mathrm{PC}}\leqslant\frac{\lambda^{\alpha-1}(M_{f_1}+N_{f_1}+M_{f_2}+N_{f_2})+(\alpha-1)(l+l^*)}{\alpha-1}\|x_2-x_1\|_{\mathrm{PC}}.$$

由式(10)可知 Λ 是压缩的, 因此由 Banach 压缩映射原理[1]知, Λ 在 $\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})$上有唯一的不动点, 即边值问题(1)有唯一解. 证毕.

3　Ulam 稳定性

定义 3[9]　设 $x\in\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})$是边值问题(1)的解, $z\in\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})$是不等式

$$\begin{cases}|T_0^\alpha z(t)-f_1(t,z(t),z(t+\tau))|\leqslant\varepsilon,\quad t\in[0,t_0],\\|T_{t_0}^\alpha z(t)-f_2(t,z(t),z(t-\tau))|\leqslant\varepsilon,\quad t\in(t_0,1],\\|\Delta z(t)|_{t=t_0}-p(z(t_0))|\leqslant\varepsilon,\\|\Delta z'(t)|_{t=t_0}-q(z(t_0))|\leqslant\varepsilon,\\z(0)=z'(1)=0\end{cases}\tag{11}$$

的解, 如果存在常数 $c_{f_1,f_2}>0$, 使得对任意的 $\varepsilon>0$, 有

$$\|z-x\|_{\mathrm{PC}}\leqslant c_{f_1,f_2}\varepsilon$$

成立, 则称边值问题(1)具有 Ulam-Hyers 稳定性.

定义 4[9]　设 $x\in\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})$是边值问题(1)的解, $z\in\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})$是不等式

$$\begin{cases}|T_0^\alpha z(t)-f_1(t,z(t),z(t+\tau))|\leqslant\varepsilon g(t),\quad t\in[0,t_0],\\|T_{t_0}^\alpha z(t)-f_2(t,z(t),z(t-\tau))|\leqslant\varepsilon g(t),\quad t\in(t_0,1],\\|\Delta z(t)|_{t=t_0}-p(z(t_0))|\leqslant\varepsilon\delta,\\|\Delta z'(t)|_{t=t_0}-q(z(t_0))|\leqslant\varepsilon\delta,\\z(0)=z'(1)=0\end{cases}\tag{12}$$

的解, 如果存在连续函数 $g: J\to(0,+\infty)$和常数 δ, $c_{f_1,f_2,g}>0$, 使得对任意的 $\varepsilon>0$, 有

$$\|z-x\|_{\mathrm{PC}}\leqslant c_{f_1,f_2,g}\varepsilon(g(t)+\delta)$$

成立, 则称边值问题(1)具有 Ulam-Hyers-Rassias 稳定性.

注 2　函数 $z\in\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})$是不等式(11)的解, 当且仅当存在函数 $\phi_1,\phi_2\in\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})$和常数 $\gamma,\gamma'\in\mathbb{R}$, 使得下列结论成立:

1) $|\phi_1(t)|\leqslant\varepsilon$, $|\phi_2(t)|\leqslant\varepsilon$, $|\gamma|\leqslant\varepsilon$, $|\gamma'|\leqslant\varepsilon$, $t\in J$;

2) $T_0^\alpha z(t)=f_1(t,z(t),z(t+\tau))+\phi_1(t)$, $t\in(0,t_0)$;

3) $T_{t_0}^\alpha z(t)=f_2(t,z(t),z(t-\tau))+\phi_2(t)$, $t\in(t_0,1]$;

4) $\Delta z(t)|_{t=t_0}=p(z(t_0))+\gamma$;

5) $\Delta z'(t)|_{t=t_0}=q(z(t_0))+\gamma'$;

6) $z(0)=z(1)=0$.

注 3　函数 $z\in\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})$是不等式(12)的解, 当且仅当存在函数 $\phi_1,\phi_2\in\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})$和常数 $\gamma,\gamma'\in\mathbb{R}$, 使得下列结论成立:

1）$|\phi_1(t)|\leqslant\varepsilon g(t)$，$|\phi_2(t)|\leqslant\varepsilon g(t)$，$|\gamma|\leqslant\varepsilon\delta$，$|\gamma'|\leqslant\varepsilon\delta$，$t\in J$；

2）$T_0^\alpha z(t)=f_1(t,z(t),z(t+\tau))+\phi_1(t)$，$t\in(0,t_0)$；

3）$T_{t_0}^\alpha z(t)=f_2(t,z(t),z(t-\tau))+\phi_2(t)$，$t\in(t_0,1)$；

4）$\Delta z(t)|_{t=t_0}=p(z(t_0))+\gamma$；

5）$\Delta z'(t)|_{t=t_0}=q(z(t_0))+\gamma'$；

6）$z(0)=z(1)=0$.

由引理 3 可得以下引理.

引理 4　假设 $\phi_1,\phi_2\in\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})$，$\gamma,\gamma'\in\mathbb{R}$，则适型分数阶时滞脉冲微分方程边值问题

$$\begin{cases} T_0^\alpha z(t)=f_1(t,z(t),z(t+\tau))+\phi_1(t), & t\in(0,t_0),\\ T_{t_0}^\alpha z(t)=f_2(t,z(t),z(t-\tau))+\phi_2(t), & t\in(t_0,1),\\ \Delta z(t)|_{t=t_0}=p(z(t_0))+\gamma,\\ \Delta z'(t)|_{t=t_0}=q(z(t_0))+\gamma',\\ z(0)=z(1)=0 \end{cases}$$

的等价积分方程为

$$z(t)=\int_0^1 G(t,s)\mathscr{R}(s,f_1+\phi_1,f_2+\phi_2)\mathrm{d}s+\varphi(t,p+\gamma,q+\gamma').$$

定理 3　设定理 2 的所有条件都满足，则适型分数阶时滞脉冲微分方程边值问题(1)具有 Ulam-Hyers 稳定性.

证明：因为定理 2 的所有条件都满足，所以边值问题(1)存在唯一解 $x\in\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})$. 设 $z\in\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})$是不等式(11)的解，则由注 2 和引理 4 知，对任意的 $t\in J_k(k=1,2)$，有

$$\begin{aligned}|z(t)-x(t)|=&\Big|\int_0^1 G(t,s)\mathscr{R}(s,f_1+\phi_1,f_2+\phi_2)\mathrm{d}s+\varphi(t,p+\gamma,q+\gamma')-\\&\int_0^1 G(t,s)\mathscr{R}(s,f_1,f_2)\mathrm{d}s-\varphi(t,p,q)\Big|\leqslant\\&\int_0^1|G(t,s)|\,|\mathscr{R}(s,f_1+\phi_1,f_2+\phi_2)-\mathscr{R}(s,f_1,f_2)|\mathrm{d}s+\\&|(p(z(t_0))+\gamma)-t_0(q(z(t_0))+\gamma')-(p(x(t_0))-t_0q(x(t_0)))|\leqslant\\&\int_0^{t_0}s^{\alpha-2}|f_1(s,z(s),z(s+\tau))+\phi_1-f_1(s,x(s),x(s+\tau))|\mathrm{d}s+\\&\int_{t_0}^1(s-t_0)^{\alpha-2}|f_2(s,z(s),z(s-\tau))+\phi_2-f_2(s,x(s),x(s-\tau))|\mathrm{d}s+\\&|\gamma|+|\gamma'|+|p(z(t_0))-p(x(t_0))|+|q(z(t_0))-q(x(t_0))|\leqslant\\&\int_0^{t_0}s^{\alpha-2}\mathrm{d}s(M_{f_1}+N_{f_1})\|z-x\|_{\mathrm{PC}}+\int_{t_0}^1(s-t_0)^{\alpha-2}\mathrm{d}s(M_{f_2}+N_{f_2})\|z-x\|_{\mathrm{PC}}+\\&\int_0^t s^{\alpha-2}\mathrm{d}s|\phi_1|+\int_{t_0}^1(s-t_0)^{\alpha-2}\mathrm{d}s|\phi_2|+|\gamma|+|\gamma'|+(l+l^*)\|z-x\|_{\mathrm{PC}}\leqslant\\&\frac{\lambda^{\alpha-1}(M_{f_1}+N_{f_1}+M_{f_2}+N_{f_2})+(\alpha-1)(l+l^*)}{\alpha-1}\|z-x\|_{\mathrm{PC}}+2\frac{\lambda^{\alpha-1}+\alpha-1}{\alpha-1}\varepsilon,\end{aligned}$$

故

$$\|z-x\|_{\mathrm{PC}}\leqslant\frac{\lambda^{\alpha-1}(M_{f_1}+N_{f_1}+M_{f_2}+N_{f_2})+(\alpha-1)(l+l^*)}{\alpha-1}\|z-x\|_{\mathrm{PC}}+2\frac{\lambda^{\alpha-1}+\alpha-1}{\alpha-1}\varepsilon.$$

由式(10)可得

$$\|z-x\|_{\mathrm{PC}}\leqslant\frac{2(\lambda^{\alpha-1}+\alpha-1)}{(\alpha-1)(1-l-l^*)-\lambda^{\alpha-1}(M_{f_1}+N_{f_1}+M_{f_2}+N_{f_2})}\varepsilon.$$

记

$$c_{f_1,f_2} := \frac{2(\lambda^{\alpha-1}+\alpha-1)}{(\alpha-1)(1-l-l^*)-\lambda^{\alpha-1}(M_{f_1}+N_{f_1}+M_{f_2}+N_{f_2})},$$

则

$$\| z-x \|_{\mathrm{PC}} \leqslant c_{f_1,f_2}\varepsilon.$$

根据定义3，适型分数阶时滞脉冲微分方程边值问题(1)具有Ulam-Hyers稳定性. 证毕.

定理4 设定理2的所有条件都满足，如果存在连续函数 $g: J\to(0,+\infty)$ 和常数 $c_g>0$，使得对任意的 $t\in J$，有

$$\int_0^{t_0} s^{\alpha-2}g(s)\mathrm{d}s \leqslant c_g g(t),\qquad \int_{t_0}^1 (s-t_0)^{\alpha-2}g(s)\mathrm{d}s \leqslant c_g g(t)$$

成立，则适型分数阶时滞脉冲微分方程边值问题(1)具有Ulam-Hyers-Rassias稳定性.

证明：因为定理2的所有条件都满足，所以边值问题(1)存在唯一解 $x\in\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})$. 设 $z\in\mathrm{PC}(J,\mathbb{R})$ 是不等式(12)的解，则由注3和引理4知，类似定理3，对任意的 $t\in J_k(k=1,2)$，有

$$\begin{aligned}
|z(t)-x(t)| = & \left| \int_0^1 G(t,s)\mathscr{R}(s,f_1+\phi_1,f_2+\phi_2)\mathrm{d}s + \varphi(t,p+\gamma,q+\gamma') - \right. \\
& \left. \int_0^1 G(t,s)\mathscr{R}(s,f_1,f_2)\mathrm{d}s - \varphi(t,p,q) \right| \leqslant \\
& \int_0^1 |\mathscr{R}(s,f_1+\phi_1,f_2+\phi_2)-\mathscr{R}(s,f_1,f_2)|\mathrm{d}s + |\gamma| + |\gamma'| + \\
& |p(z(t_0))-p(x(t_0))| + |q(z(t_0))-q(x(t_0))| \leqslant \\
& \int_0^{t_0} s^{\alpha-2}\mathrm{d}s(M_{f_1}+N_{f_1})\|z-x\|_{\mathrm{PC}} + \int_{t_0}^1 (s-t_0)^{\alpha-2}\mathrm{d}s(M_{f_2}+N_{f_2})\|z-x\|_{\mathrm{PC}} + \\
& (l+l^*)\|z-x\|_{\mathrm{PC}} + \int_0^{t_0} s^{\alpha-2}|\phi_1(s)|\mathrm{d}s + \\
& \int_{t_0}^1 (s-t_0)^{\alpha-2}|\phi_2(s)|\mathrm{d}s + |\gamma| + |\gamma'| \leqslant \\
& \frac{\lambda^{\alpha-1}(M_{f_1}+N_{f_1}+M_{f_2}+N_{f_2})+(\alpha-1)(l+l^*)}{\alpha-1}\|z-x\|_{\mathrm{PC}} + 2(c_g g(t)+\delta)\varepsilon.
\end{aligned}$$

由式(10)可得

$$\|z-x\|_{\mathrm{PC}} \leqslant c_{f_1,f_2,g}(2c_g g(t)+2\delta)\varepsilon,$$

其中

$$c_{f_1,f_2,g} := \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)(1-l-l^*)-\lambda^{\alpha-1}(M_{f_1}+N_{f_1}+M_{f_2}+N_{f_2})}.$$

根据定义4，适型分数阶时滞脉冲微分方程边值问题(1)具有Ulam-Hyers-Rassias稳定性. 证毕.

4 应用实例

考虑边值问题

$$\begin{cases}
T_0^{3/2}x(t) = \dfrac{1}{15}\left(\mathrm{e}^{2t}+\dfrac{x(t)}{1+t}+x\left(t+\dfrac{1}{3}\right)\right), & t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right), \\
T_{1/2}^{3/2}x(t) = \dfrac{1}{10}\left(\sin t+\dfrac{x(t)}{1+t}+x\left(t-\dfrac{1}{3}\right)\right), & t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right), \\
\Delta x(t)|_{t=1/2} = \dfrac{|x(1/2)|}{10+|x(1/2)|}, \quad \Delta x'(t)|_{t=1/2} = \dfrac{|x(1/2)|}{20+|x(1/2)|}, & \\
x(0)=x(1)=0, &
\end{cases} \tag{13}$$

其中 $\alpha=\dfrac{3}{2}$，$t_0=\dfrac{1}{2}$，$\tau=\dfrac{1}{3}$，$\lambda=\dfrac{1}{2}$，

$$f_1(t,x(t),x(t+\tau)) = \frac{1}{15}\left(\mathrm{e}^{2t}+\frac{x(t)}{1+t}+x\left(t+\frac{1}{3}\right)\right),\quad t\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\quad p\left(x\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{|x(1/2)|}{10+|x(1/2)|},$$

$$f_2(t,x(t),x(t-\tau))=\frac{1}{10}\left(\sin t+\frac{x(t)}{1+t}+x\left(t-\frac{1}{3}\right)\right),\quad t\in\left(\frac{1}{2},1\right),\quad q\left(x\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{|x(1/2)|}{20+|x(1/2)|}.$$

设

$$\omega_1(t)=\frac{\mathrm{e}^{2t}}{15},\quad \mu_1(t)=\frac{1}{15(1+t)},\quad \upsilon_1(t)=\frac{1}{15},\quad \omega_2(t)=\frac{\sin t}{10},\quad \mu_2(t)=\frac{1}{10(1+t)},\quad \upsilon_2(t)=\frac{1}{10},$$

则

$$\omega^*=\frac{\mathrm{e}}{15},\quad \mu^*=\frac{1}{10},\quad \upsilon^*=\frac{1}{10}.$$

显然，

$$M_p=\frac{1}{10},\quad N_p=1,\quad M_q=\frac{1}{20},\quad N_q=1,\quad M_{f_1}=N_{f_1}=\frac{1}{15},\quad M_{f_2}=N_{f_2}=\frac{1}{10},\quad l=\frac{1}{10},\quad l^*=\frac{1}{20}.$$

对任意的 $u,v,\bar{u},\bar{v}\in\mathbb{R}$，$t\in[0,1]$，有

$$|f_1(t,u,v)|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{2t}}{15}+\frac{1}{15(1+t)}|u|+\frac{1}{15}|v|,$$

$$|f_2(t,u,v)|\leqslant\frac{\sin t}{10}+\frac{1}{10(1+t)}|u|+\frac{1}{10}|v|,$$

$$|p(u)|\leqslant\frac{1}{10}|u|+1,\quad |q(u)|\leqslant\frac{1}{20}|u|+1,$$

$$|f_1(t,u,v)-f_1(t,\bar{u},\bar{v})|\leqslant\frac{1}{15}(|u-\bar{u}|+|v-\bar{v}|),\quad |p(u)-p(\bar{u})|\leqslant\frac{1}{10}|u-\bar{u}|,$$

$$|f_2(t,u,v)-f_1(t,\bar{u},\bar{v})|\leqslant\frac{1}{10}(|u-\bar{u}|+|v-\bar{v}|),\quad |q(u)-q(\bar{u})|\leqslant\frac{1}{20}|u-\bar{u}|.$$

故条件(H_1)～(H_4)成立. 又因为

$$2\lambda^{\alpha-1}(\mu^*+\upsilon^*)\approx 0.282\,84<(\alpha-1)(1-M_p-M_q)=0.425\,00,$$

定理 1 的所有条件都满足，因此，适型分数阶时滞脉冲微分方程边值问题(13)至少有一个解. 由于

$$\lambda^{\alpha-1}(M_{f_1}+N_{f_1}+M_{f_2}+N_{f_2})+(\alpha-1)(l+l^*)\approx 0.310\,70<0.5=\alpha-1,$$

因此，由定理 2 可知适型分数阶时滞脉冲微分方程边值问题(13)有唯一解，由定理 3 可知适型分数阶时滞脉冲微分方程边值问题(13)具有 Ulam-Hyers 稳定性.

对任意的 $t\in[0,1]$，设 $g(t)=t+1$，有

$$\int_0^{1/2}s^{3/2-2}(s+1)\mathrm{d}s\approx 1.65\leqslant 2(t+1),$$

$$\int_{1/2}^{1}\left(s-\frac{1}{2}\right)^{3/2-2}(s+1)\mathrm{d}s\approx 2.36\leqslant 3(t+1),$$

再设 $c_g=3$，故定理 4 的所有条件都满足，因此适型分数阶时滞脉冲微分方程边值问题(13)具有 Ulam-Hyers-Rassias 稳定性.

参考文献

[1] 白占兵. 分数阶微分方程边值问题理论及应用[M]. 北京：中国科学技术出版社，2013：1-14.（BAI Z B. Theory and Application of Fractional Differential Equation Boundary Value Problems [M]. Beijing: China Science and Technology Press, 2013: 1-14.）

[2] WANG G T, BAI Z B, ZHANG L H. Successive Iterations for Unique Positive Solution of a Nonlinear Fractional *q*-Integral Boundary Value Problem [J]. Journal of Applied Analysis and Computation, 2019, 9(4): 1204-1215.

[3] ZHANG L C, ZHANG W G, LIU X P, et al. Positive Solutions of Fractional *p*-Laplacian Equations with Integral Boundary Value and Two Parameters [J/OL]. Journal of Inequalities and Applications, (2020-01-03)[2023-12-19]. https://doi.org/10.1186/s13660-019-2273-6.

[4] ZHANG L C, LIU X P, YU Z S, et al. The Existence of Positive Solutions for High Order Fractional Differential Equations with Sign Changing Nonlinearity and Parameters [J]. AIMS Mathematics, 2023, 8(11): 25990-26006.

[5] 李悦，刘锡平. 无穷区间上分数阶微分方程积分边值问题[J]. 吉林大学学报(理学版)，2023，62(4)：762-771. (LI Y，LIU X P. Integral Boundary Value Problems of Fractional Differential Equations on Infinite Interval [J]. Journal of Jilin University (Science Edition)，2023，62(4)：762-771.)

[6] 胡芳芳，胡卫敏，张永. 一类具有Hadamard导数的分数阶微分方程积分边值问题正解的存在唯一性[J]. 山东大学学报(理学版)，2024，59(4)：53-61. (HU F F，HU W M，ZHANG Y. Existence and Uniqueness of Positive Solutions of Integral Boundary Value Problems for a Class of Fractional Differential Equations with Hadamard Derivatives [J]. Journal of Shandong University (Natural Science)，2024，59(4)：53-61.)

[7] KHALIL R，AL HORANI M，YOUSEF A，et al. A New Definition of Fractional Derivative [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2014，264：65-70.

[8] ABDELJAWAD T. On Conformable Fractional Calculus [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2015，279：57-66.

[9] LI M M，WANG J R，O'Regan D. Existence and Ulam's Stability for Conformable Fractional Differential Equations with Constant Coefficients [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society，2019，42(4)：1791-1812.

[10] THAIPRAYOON C，NTOUYAS S K，TARIBOON J. Monotone Iterative Technique for Nonlinear Impulsive Conformable Fractional Differential Equations with Delay [J]. Communications in Mathematics and Applications，2021，12(1)：11-27.

[11] WAN F，LIU X P，JIA M. Ulam-Hyers Stability for Conformable Fractional Integro-Differential Impulsive Equations with the Antiperiodic Boundary Conditions [J]. AIMS Mathematics，2022，7(4)：6066-6083.

[12] 张敏，周文学，黎文博. 一致分数阶时滞微分方程边值问题解的存在性与唯一性[J]. 吉林大学学报(理学版)，2023，61(5)：1007-1013. (ZHANG M，ZHOU W X，LI W B. Existence and Uniqueness of Solutions for Boundary Value Problems of Conformable Fractional Delay Differential Equations [J]. Journal of Jilin University (Science Edition)，2023，61(5)：1007-1013.)

[13] WANG J R，FECKAN M，ZHOU Y. Ulam's Type Stability of Impulsive Ordinary Differential Equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2012，395(1)：258-264.

[14] WANG J R，SHAH K，ALI A. Existence and Hyers-Ulam Stability of Fractional Nonlinear Impulsive Switched Coupled Evolution Equations [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences，2018，41(6)：2392-2402.

[15] MUTHAIAH S，BALEANU D，THANGARAJ N G. Existence and Hyers-Ulam Type Stability Results for Nonlinear Coupled System of Caputo-Hadamard Type Fractional Differential Equations [J]. AIMS Mathematics，2021，6(1)：168-194.

[16] AGARWAL R P，HRISTOVA S，O'Regan D. Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations of Caputo Type and Ulam Type Stability：Basic Concepts and Study [J/OL]. Axioms，(2023-02-21)[2024-05-12]. https://doi.org/10.3390/axioms12030226.

[17] 白玉洁，杨和. 一类Riemann-Liouville分数阶时滞随机发展方程的Ulam-Hyers稳定性[J]. 吉林大学学报(理学版)，2023，61(3)：483-489. (BAI Y J，YANG H. Ulam-Hyers Stability for a Class of Riemann-Liouville Fractional Stochastic Evolution Equations with Delay [J]. Journal of Jilin University (Science Edition)，2023，61(3)：483-489.)

[18] 郭大钧，孙经先，刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法[M]. 济南：山东科技出版社，2005：11-12. (GUO D J，SUN J X，LIU Z L. Functional Methods for Nonlinear Ordinary Differential Equations [M]. Jinan：Shandong Science and Technology Press，2005：11-12.)

(责任编辑：赵立芹)