

基于热超构材料的设计与时域有限元模拟

鲍守珠, 和 斌

(兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070)

摘要: 利用分层近似思想和有效介质理论设计变换热力学装置的材料参数, 并给出时域有限元模拟. 首先, 利用变换热力学理论, 推导出热斗篷、热集中器和热旋转器 3 种装置的理想材料参数. 其次, 利用分层近似思想消除参数的非均匀性, 设计出分层结构, 为消除分层结构的各向异性, 利用有效介质理论设计各向同性的材料参数. 最后, 给出数值测试结果以验证装置的性能及设计的可行性. 结果表明, 当分层层数越多时, 该装置实现的热效应越好, 可达到与理想装置相同的效果.

关键词: 变换热力学; 超材料; 材料设计; 有限元模拟

中图分类号: TB34 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)05-1489-10

Design and Time-Domain Finite Element Simulation Based on Thermal Superstructure Materials

BAO Shouzhu, HE Bin

(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: We designed the material parameters of transformation thermodynamic devices and gave time-domain finite element simulations by using the layered approximation idea and effective medium theory. Firstly, we derived the ideal material parameters of the three devices: heat cloak, heat concentrator and heat rotator by using the theory of transformational thermodynamics. Secondly, we eliminated the non-uniformity of the parameters and designed the layered structure by using the idea of layered approximation, and in order to eliminate the anisotropy of the layered structure, we used the effective medium theory to design the isotropic material parameters. Finally, we gave numerical test results to verify the performance of the device and the feasibility of the design. The results show that when the number of layered layers is higher, the designed device realizes better thermal effects, which can achieve the same effect as the ideal device.

Keywords: transformation thermodynamics; metamaterials; material design; finite element simulation

近年来, 热学装置的应用范围逐渐扩大. 为提高热能的实际利用效率, 研究人员致力于装置热量控制技术的研究^[1-2]. 因超材料^[3]在热量控制方面的独特性能, 现已广泛应用于 3D 打印机和高效电冰箱等领域. Pendry 等^[4]和 Leonhardt^[5]利用超材料的特性, 通过变换光学原理成功设计出电磁隐身斗篷后, 变换光学技术被广泛应用于热学^[6-8]和电磁学^[9]等领域.

收稿日期: 2024-06-05.

第一作者简介: 鲍守珠(1999—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事偏微分方程数值解及应用的研究, E-mail: secretbsz@163.com.

通信作者简介: 和 斌(1992—), 男, 汉族, 博士, 副教授, 从事偏微分方程数值解及应用的研究, E-mail: hebinxtu@126.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12301511)和甘肃省教育科技创新基金(批准号: 2022A-040).

Fan 等^[10]将变换光学原理引入热学领域,并提出稳态的变换热力学概念,推动了热斗篷、热集中器、热旋转器和热二极管等多种功能性热学器件的发展^[11-17]; Guenneau 等^[18]证明了坐标变换下热传导方程的不变性,并设计出二维热斗篷和热集中装置; Han 等^[6]基于特征值关系提出实现非均质装置均匀化的方法,设计了一种仅由各向异性主导的新型热斗篷,该设计为后续研究均质、各向同性材料替代超材料奠定了基础; Guenneau 等^[7]提出了一种热旋转装置,并验证时域下的热流变化特性; Shen 等^[19]设计了一种双功能热超材料器件——热斗篷集中器,该装置实现了热斗篷与热聚集器之间的相互转换; Zhou 等^[20]结合旋转和隐身功能,设计了一种可在旋转过程中实现热隐身的装置,从而在旋转的同时控制热通量,并确保中心区域的不可见性; 刘洋等^[21]用自适应热源设计了一种可控式热隐身装置,并推导出二维任意对称截面上隐身区域的自适应热源分布通解; Feng 等^[22]设计出随温度变化可切换的瞬态热集中器,并验证了该装置对温度的依赖性; Lin 等^[23]建立了具有非完美界面的瞬态热隐身斗篷的解析模型; Xing 等^[24]基于共形离散化方法,设计了同时具备旋转和隐身功能的非保形热旋转斗篷,并验证了其热性能。

目前,关于热斗篷、热集中器和热旋转器 3 种装置的研究成果较多^[25-28],但针对均匀化材料的设计研究仍较少. 基于此,本文受文献[29]启发,基于变换热力学理论,采用分层近似思想消除材料非均匀性,利用均质材料设计以上 3 种热学装置的分层结构,并根据有效介质理论设计具有各向同性材料的层状系统.

1 模型方程和参数推导

1.1 模型方程

本文考虑无热源的二维热传导问题,模型方程为

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (-k_0 \nabla T) = 0, \quad (1)$$

其中 ρ 和 C 分别为密度和比热容, T 为温度, k_0 为热导率, t 为时间, ∇ 为散度算子.

根据变换热力学理论,方程(1)在坐标变换 $x = \phi(x')$ 下的表达式为

$$\rho' C' \frac{\partial T'}{\partial t} + \nabla \cdot (-\mathbf{k}' \nabla T') = 0, \quad (2)$$

坐标变换前后的参数有如下关系:

$$\mathbf{k}' = \begin{pmatrix} k'_{xx} & k'_{xy} \\ k'_{yx} & k'_{yy} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{J} k_0 \mathbf{J}^T}{\det(\mathbf{J})}, \quad \rho' C' = \frac{\rho C}{\det(\mathbf{J})}, \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (4)$$

为原始空间到物理空间的 Jacobi 矩阵, k_0 和 \mathbf{k}' 分别为原始空间和物理空间的热导率, ρ' 和 C' 分别为物理空间的密度和比热容, \mathbf{J}^T 为 \mathbf{J} 的转置矩阵, $\det(\mathbf{J})$ 为 \mathbf{J} 的行列式. 在无热源稳态条件下,即 $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ 时,热传导方程可简化为

$$\nabla \cdot (-\mathbf{k}' \nabla T') = 0. \quad (5)$$

1.2 热隐身斗篷的参数推导

考虑二维圆形热斗篷,将原始空间内的圆形区域($0 < r \leq r_1$)压缩为物理空间中的环形区域($r_2 \leq r' \leq r_1$),极坐标下的变换为

$$\begin{cases} r' = r_2 + \frac{r_1 - r_2}{r_1} r, & 0 \leq r \leq r_1, \\ \theta' = \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (6)$$

考虑笛卡尔坐标系, 式(6)极坐标变换可写为

$$\begin{cases} x' = r' \cos(\theta') = r_2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{r_1 - r_2}{r_1} x, \\ y' = r' \sin(\theta') = r_2 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{r_1 - r_2}{r_1} y. \end{cases} \quad (7)$$

由式(3)和式(4)计算物理空间中的材料参数为

$$\mathbf{k}' = \begin{pmatrix} \frac{r' - r_2}{r'} + \left(\frac{2r_2}{r'} + \frac{r_2^2}{(r' - r_2)r'} \right) \sin^2(\theta) & - \left(\frac{2r_2}{r'} + \frac{r_2^2}{(r' - r_2)r'} \right) \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \text{sym} & \frac{r' - r_2}{r'} + \left(\frac{2r_2}{r'} + \frac{r_2^2}{(r' - r_2)r'} \right) \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \mathbf{k}_0, \quad (8)$$

$$\rho' C' = \frac{r_1^2 (r' - r_2)}{(r_1 - r_2)^2 r'} \rho C,$$

其中 sym 表示对称部分.

1.3 热集中装置的参数推导

考虑二维圆形热集中装置, 分别将原始空间中的圆形区域 ($0 < r \leq r_3$) 沿径向压缩为物理空间中的区域 ($0 < r' \leq r_2$) 及环形区域 ($r_3 < r \leq r_1$) 沿径向扩展为物理空间中的区域 ($r_2 < r' \leq r_1$), 这样压缩和扩展互相抵消, 使初始和变换的空间保持一致. 变换如下:

$$\begin{cases} r' = \frac{r_2}{r_3} r, & 0 \leq r \leq r_3, \\ r' = \frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_3} r + \frac{r_2 - r_3}{r_1 - r_3} r_1, & r_3 \leq r \leq r_1, \\ \theta' = \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\theta. \end{cases} \quad (9)$$

由式(3)和式(4)可先求出 $r' \leq r_2$ 内的热导率

$$\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{k}_0, \quad (10)$$

$$\rho' C' = \frac{r_3^2}{r_2^2} \rho C,$$

其中半径关系为 $r_2 < r_3 < r_1$. 再求出物理空间 $r_2 \leq r' \leq r_1$ 内的热导率

$$\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} \frac{r'(r_1 - r_3) - (r_2 - r_3)r_1}{r'(r_1 - r_3)} + L \sin^2(\theta) & -L \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \text{sym} & \frac{r'(r_1 - r_3) - (r_2 - r_3)r_1}{r'(r_1 - r_3)} + L \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \mathbf{k}_0, \quad (11)$$

$$\rho' C' = \frac{(r_1 - r_3)^2 r' - (r_1 - r_3)(r_2 - r_3)r_1}{(r_1 - r_2)^2 r'} \rho C,$$

其中

$$L = \frac{(r_2 - r_3)r_1(2r'(r_1 - r_3) - (r_2 - r_3)r_1)}{r'^2(r_1 - r_3)^2 - r'(r_2 - r_3)(r_1 - r_3)r_1}.$$

1.4 热旋转装置的参数推导

考虑二维热旋转装置, 若只改变该装置的角度而不改变半径, 则该装置的变换方程可表示为

$$\begin{cases} r' = r, \\ \theta' = \theta + \theta_0, & 0 \leq r \leq r_1, \\ \theta' = \theta + \theta_0 \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}, & r_1 \leq r \leq r_2. \end{cases} \quad (12)$$

由式(3)和式(4)先求出 $r \leq r_1$ 内的热导率

$$\mathbf{k}'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{k}_0, \quad (13)$$

$$\rho' C' = \rho C.$$

再求出 $r_1 \leq r \leq r_2$ 内的热导率

$$k'_2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\theta_0 r \sin 2(\theta + m)}{r_2 - r_1} + \frac{\theta_0^2 r^2}{(b-a)^2} \sin^2(\theta + m) & -\frac{\theta_0 r \cos 2(\theta + m)}{r_2 - r_1} - \frac{\theta_0^2 r^2}{2(b-a)^2} \sin 2(\theta + m) \\ \text{sym} & 1 - \frac{\theta_0 r \sin 2(\theta + m)}{r_2 - r_1} + \frac{\theta_0^2 r^2}{(b-a)^2} \cos^2(\theta + m) \end{pmatrix} k_0, \quad (14)$$

$$\rho' C' = \rho C,$$

其中 $m = \theta_0 \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}$.

1.5 任意隐身装置的参数推导

考虑二维任意热斗篷, 将原始空间的区域 ($0 < r \leq R_2(\theta)$) 压缩为物理空间中的区域 ($R_1(\theta') \leq r' \leq R_2(\theta')$), 坐标变换方程^[30]为

$$\begin{cases} r' = R_1(\theta') + \frac{R_2(\theta') - R_1(\theta')}{R_2(\theta')} r, \\ \theta' = \theta. \end{cases} \quad (15)$$

利用式(3)和式(4)计算物理空间中的材料参数为

$$k' = \begin{pmatrix} A \cos^2(\theta) - 2B \sin(\theta) \cos(\theta) + \frac{\sin^2(\theta)}{a} & \left(A - \frac{1}{a}\right) \sin(\theta) \cos(\theta) + B \cos(2\theta) \\ \text{sym} & A \sin^2(\theta) + 2B \sin(\theta) \cos(\theta) + \frac{\cos^2(\theta)}{a} \end{pmatrix} k_0, \quad (16)$$

$$\rho' C' = \frac{R_2(\theta)^2 (r' - R_1(\theta))}{(R_2(\theta) - R_1(\theta))^2 r} \rho C,$$

其中

$$A = a + cd + 2bc + ab^2, \quad B = d + b, \quad a = \frac{r' - R_1(\theta)}{r'},$$

$$b = \frac{R_1(\theta)R'_2(\theta) - R'_1(\theta)R_2(\theta)}{R_2(\theta)(R_2(\theta) - R_1(\theta))}, \quad c = \frac{R'_1(\theta)}{r'}, \quad d = \frac{R'_1(\theta)}{r' - R_1(\theta)}.$$

2 材料设计

若几何参数固定, 则上述 3 种装置的材料参数在环形区域内是非均匀、各向异性的, 在其他区域均为均匀、各向同性. 为消除物理空间中参数的非均匀性和各向异性, 本文利用均匀、各向同性材料构建热隐身和热集中装置, 并消除标准圆形热隐身、热集中及热旋转装置中材料参数的不均匀性.

第一步, 用分层近似思想固定装置半径消除材料的非均匀性. 首先, 对具有非均匀参数的物理空间以圆环形状进行均匀分层; 其次, 将每个圆环分层对应的半径 $r'_i (i=1, 2, \dots, n)$ 取固定值, 即取相邻两圆半径的平均值 $(r_{i-1} + r_i)/2$; 最后, 将计算出的半径 $r'_i (i=1, 2, \dots, n)$ 分别代入式(8), (11), (14), 即可得每种装置在分层结构中的每层非奇异均匀热导率 $k'_i (i=1, 2, \dots, n)$, 可知若半径 r'_i 值不同则所得的热导率也不同. 本文在此基础上研究圆形热装置, 通过上述步骤可得圆形装置的分层结构如图 1(A)所示. 由图 1(A)可见, 其由 n 层层厚相等的均匀环状组成.

第二步, 利用有效介质理论消除材料的各向异性. 将图 1(A)中的每个各向异性圆环层 $i (i=1, 2, \dots, n)$ 均匀分为 2 个各向同性的同心子层; 用扇形结构设计热集中装置, 将图 1(A)中每个各向异性圆环层按设定的角向进行均匀划分, 划分成由 2 种各向同性的扇形交替构建的层状系统. 其中设第 i 层交替子层的热导率分别为 k'_{A_i} 和 $k'_{B_i} (i=1, 2, \dots, n)$, 热隐身层状结构如图 1(B)所示, 热集中层状结构如图 1(C)所示. 下面推导热隐身和热集中装置二维层状系统中各向同性的材料参数 k'_{A_i} 和 k'_{B_i} .

对称张量热导率 $k'_i (i=1, 2, \dots, n)$ 可映射为对角张量

$$k_i = \begin{pmatrix} k_{r_i} & 0 \\ 0 & k_{\theta_i} \end{pmatrix},$$

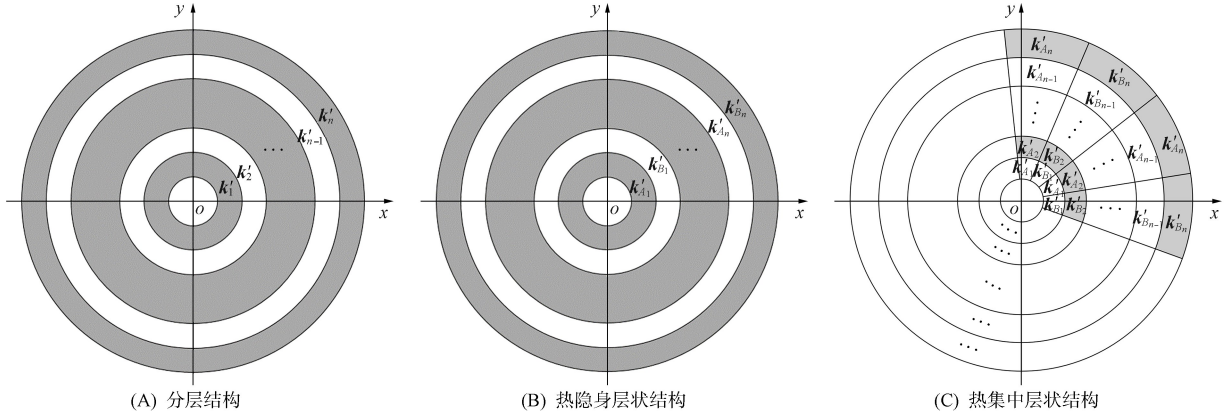


图 1 二维圆形装置结构设计示意图

Fig. 1 Schematic diagram of structural design of two-dimensional circular device

矩阵 $k_i (i=1, 2, \dots, n)$ 中对角线分量可由

$$\begin{cases} k_{r_i} = \frac{k'_{ixx} + k'_{iyy} + \sqrt{(k'_{ixx} - k'_{iyy})^2 + (2k'_{ixy})^2}}{2}, \\ k_{\theta_i} = \frac{k'_{ixx} + k'_{iyy} - \sqrt{(k'_{ixx} - k'_{iyy})^2 + (2k'_{ixy})^2}}{2} \end{cases}$$

计算求得.

若每层交替子层的密度为 ρ_{A_i} 和 ρ_{B_i} , 比热容为 C_{A_i} 和 C_{B_i} , 层厚为 d_{A_i} 和 d_{B_i} , 则热隐身装置交替子层的热导率 k'_{A_i} 和 k'_{B_i} 可由

$$\begin{cases} k_{r_i} = \frac{k'_{A_i} k'_{B_i} (d_{A_i} + d_{B_i})}{d_{A_i} k'_{B_i} + d_{B_i} k'_{A_i}}, \\ k_{\theta_i} = \frac{d_{A_i} k'_{A_i} + d_{B_i} k'_{B_i}}{d_{A_i} + d_{B_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (17)$$

计算求得.

由于热集中装置是沿角向分层的, 因此其交替子层的热导率 k'_{A_i} 和 k'_{B_i} 可由

$$\begin{cases} k_{\theta_i} = \frac{k'_{A_i} k'_{B_i} (d_{A_i} + d_{B_i})}{d_{A_i} k'_{B_i} + d_{B_i} k'_{A_i}}, \\ k_{r_i} = \frac{d_{A_i} k'_{A_i} + d_{B_i} k'_{B_i}}{d_{A_i} + d_{B_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (18)$$

计算求得.

本文考虑层状系统中交替子层层厚相同的情况, 即 $d_{A_i} = d_{B_i} (i=1, 2, \dots, n)$, 根据式 (17), (18) 及给定的几何参数, 可计算出热斗篷和热集中装置每个交替子层的热导率.

3 数值结果

本文将热导率不均匀且各向异性未进行材料设计的热学装置称为理想装置, 下面用有限元方法对装置进行数值模拟, 并验证设计的合理性. 仿真条件为: 矩形计算域的左右边界温度分别为 400, 300 K, 顶部和底部设为热绝缘条件, 即 $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$, 背景空间材料为尼龙, $\rho = 1\ 150\ \text{kg/m}^3$,

$C = 1\ 700\ \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, 热导率 $k_0 = 0.25\ \text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$.

3.1 二维热隐身装置

设置二维热隐身装置进行数值模拟的几何参数如下: 内外半径分别为 $r_2 = 0.015\ \text{m}$ 和 $r_1 = 0.03\ \text{m}$, 外部矩形计算域的边长为 $0.1\ \text{m} \times 0.1\ \text{m}$.

3.1.1 热隐身分层结构的热效应

通过有限元方法对分层结构在稳态式(5)下的温度进行求解, 计算结果如图 2 所示, 其中图 2(A)~(D)分别为理想隐身装置和 $n=1, 2, 4$ 层时分层结构的温度分布图, 图中线为等温线. 由图 2(A)可见, 当热流经过隐身区域时, 其等温线位于 $r_2 < r' < r_1$ 环内, 绕过中心区域($r' < r_2$), 其温度梯度为零, 而在隐身区域外热流是均匀分布的. 由图 2(B)可观察到一层结构的热流经过中心区域, 无法实现隐身; 由图 2(C), (D)可见, 将物理空间分为二层和四层后, 热流运动轨迹与理想状态基本一致, 此时外界观测者对中心区域的状态不可见, 可实现隐身. 图 3 为各分层结构与理想装置在 $y=0$ 上的温度变化. 由图 3 可见, 当装置分层层数越多时, 分层结构在中心区域的温度梯度越趋近于零, 越接近理想装置, 隐身特性越好, 这与本文的理论设计结果吻合.

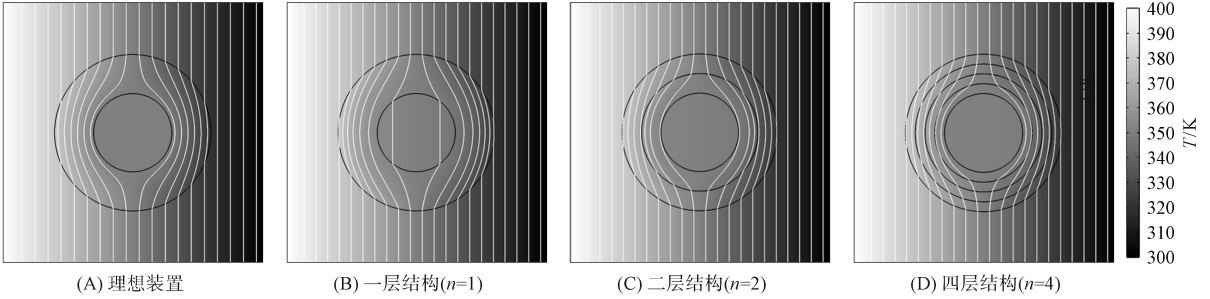


图 2 热斗篷装置温度示意图

Fig. 2 Schematic diagram of temperature of heat cloak device

3.1.2 热隐身层状结构的热效应

通过有限元方法对根据有效介质理论设计出的层状结构进行数值模拟, 令上述材料设计步骤中的 $n=5$, 此时的层状结构具有 5×2 种均匀、各向同性的材料. 由式(17)可得:

$$\begin{aligned}
 k'_{A_1} &= 0.04k_0, & k'_{B_1} &= 21.96k_0, & k'_{A_2} &= 0.12k_0, \\
 k'_{B_2} &= 8.56k_0, & k'_{A_3} &= 0.16k_0, & k'_{B_3} &= 5.84k_0, \\
 k'_{A_4} &= 0.2k_0, & k'_{B_4} &= 4.64k_0, \\
 k'_{A_5} &= 0.24k_0, & k'_{B_5} &= 3.96k_0.
 \end{aligned}$$

层状结构在稳态和瞬态下的数值结果如图 4 所示.

由于矩形内部左右温差, 因此区域的热流将由左流向右边, 由层状结构图 4(A)与图 2(A)理想装置温度图可见, 层状结构在背景区域内热流几乎也是均匀分布的, 并且热流运动轨迹与理想装置基本相同. 由图 4(B)~(D)可见, 在一定时间内热流从高温流向低温, 最终温度均匀分布, 实现了热隐身效果, 从而验证了层状结构设计的合理性与有效性.

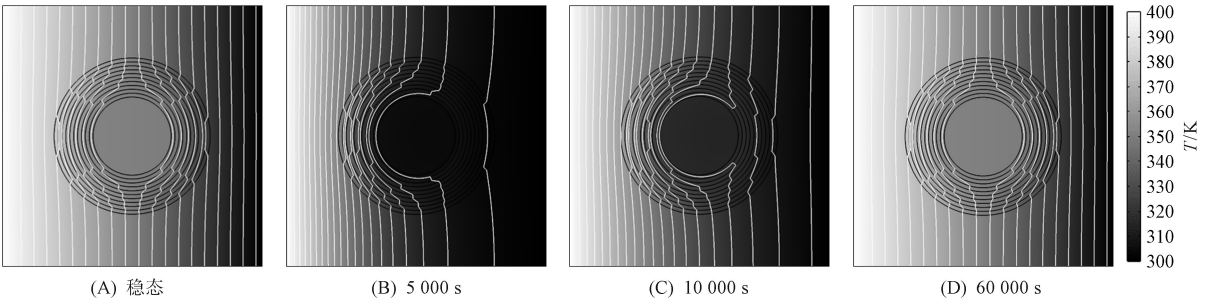


图 4 热斗篷装置层状结构的温度示意图

Fig. 4 Schematic diagram of temperature of layered structure of heat cloak device

3.2 二维热集中装置

设置二维圆形热集中装置的几何参数如下: 内外半径分别为 $r_2=0.005$ m 和 $r_1=0.02$ m, 外部

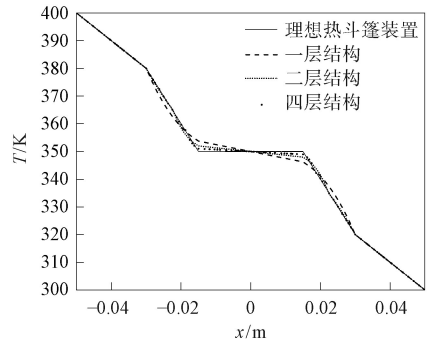


图 3 $y=0$ 上的温度变化

Fig. 3 Temperature variation on $y=0$

矩形计算域的边长为 $0.06\text{ m} \times 0.06\text{ m}$.

3.2.1 热集中分层结构的热效应

图 5 为热集中装置在稳态下的温度示意图, 其中图 5(A) 为理想热集中装置, 图 5(B)~(D) 分别为 $n=1, 2, 4$ 时分层结构的温度变化, 图中线为等温线. 由图 5(A) 可见, 当热流经过环形区域 ($r_2 < r' < r_1$) 时, 等温线向中心区域 ($r' < r_2$) 靠拢, 使其温度梯度升高, 在环形区域外, 热流均匀分布. 由图 5(B)~(D) 可见, 当 $n=1$ 时, 物理空间中的等温线已发生明显偏移, 使热流向中心区域挤压, 导致其温度梯度升高, 表现出较好的集热效应, 当 $n=2, 4$ 时, 分层结构的温度分布与 $n=1$ 时相同. 表明分层近似思想将热导率的性质变为均匀、各向异性后, 热集中装置在一层结构时即可实现较好的集热效果.

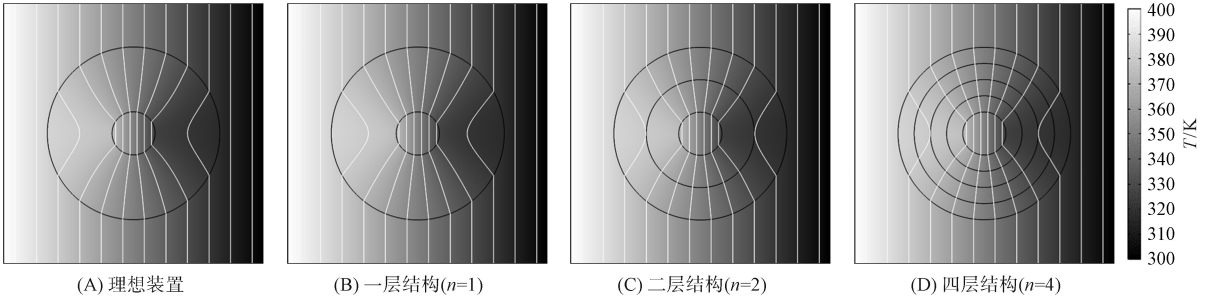


图 5 热集中装置温度示意图

Fig. 5 Schematic diagram of temperature of heat centralization device

为更精确观察 $n=1, 2, 4$ 时分层结构的数值结果, 计算理想装置与分层结构温度的相对误差

$$RE = \frac{|T_i - T|}{T}$$

其中 T 为理想装置的温度, $T_i (i=1, 2, 4)$ 为 $n=1, 2, 4$ 对应的分层结构温度, 温度在 $y=0$ 上的相对误差如图 6 所示. 由图 6 可见, 当 $n=1$ 时, 相对误差 RE 最大, 随着层数的增加, RE 逐渐减小, 因此分层近似存在误差, 分层越多, 误差越小, 实现效果越好.

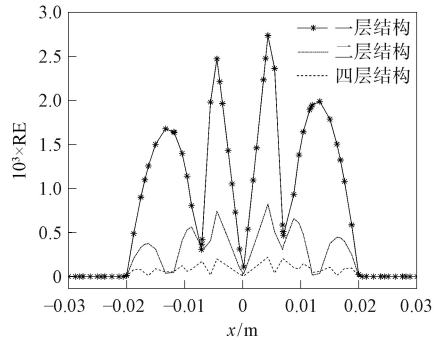


图 6 $y=0$ 上的相对误差

Fig. 6 Relative errors on $y=0$

3.2.2 热集中层状结构的热效应

对热集中装置的层状结构进行稳态和瞬态数值模拟, 考虑 $n=1, 2$ 时的层状结构, 按角向将每层圆环均匀划分为由两种均匀且各向同性材料交替组成的 36 个扇形, 此时层状结构共有 12×2 种均匀、各向同性的材料, 热导率可由式(18)计算. 该数值模拟结果如图 7 所示.

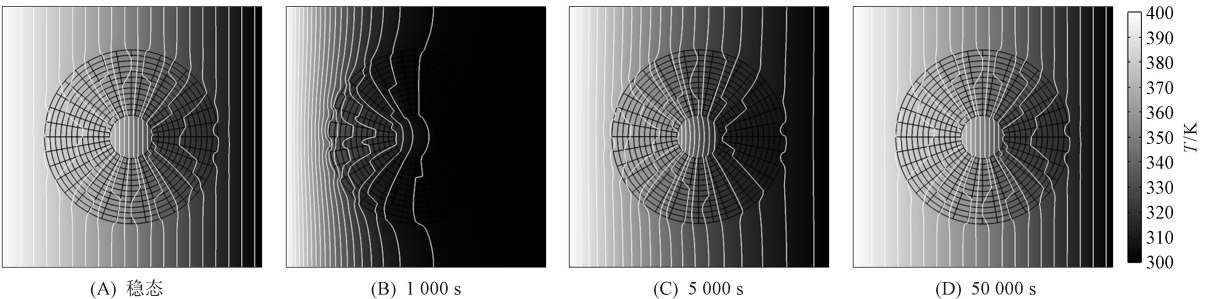


图 7 热集中装置层状结构温度示意图

Fig. 7 Schematic diagram of temperature of layered structure of heat centralization device

由图 7 可见, 稳态下的层状结构与理想装置对应的温度场具有一致性, 并且随着时间的增加, 热

流不断由高温流向低温且向中心区域集中,最后趋于稳定,具有较好的热集中效应.

3.3 二维热旋转装置

为更好验证分层结构设计的合理性,考虑对二维圆形热旋转装置的分层结构进行数值模拟.装置的旋转角度为 $\pi/2$,矩形计算域的几何参数设置为:内外半径分别为 $r_2=0.015\text{ m}$ 和 $r_1=0.03\text{ m}$,外部矩形计算域的边长为 $0.1\text{ m}\times 0.1\text{ m}$.

通过求解方程(5)得到的稳态数值结果如图 8 所示,其中图 8(A)为理想状态下热旋转装置的温度,图 8(B)~(D)分别为 $n=1,2,4$ 层时的分层结构温度,图中线为等温线.由图 8(A)可见,当热流经过环形区域($r_2 < r' < r_1$)时,等温线从 0° 开始旋转,热流到达中心区域($r' < r_2$)后旋转到 90° ,同时环形区域外的热流均匀分布.由图 8(B)~(D)可见,分层结构在 $n=1$ 时内部等温线偏移明显超过预设角 $\pi/2$, $n=2$ 时热流在中心区域的旋转角比 $n=1$ 时更接近 90° , $n=4$ 时热流由环形区域开始旋转,到达中心区域后旋转 $\pi/2$ 个角度,此时等温线与背景区域的等温线垂直,由于背景区域的热流均匀分布不受任何影响,同理想装置的热流分布相同,因此在分层层数到达一定数量时,装置的热流存在一种负热导率现象,即由低温向高温流动,从而实现了对外界隐藏装置内部真实情况的效果.

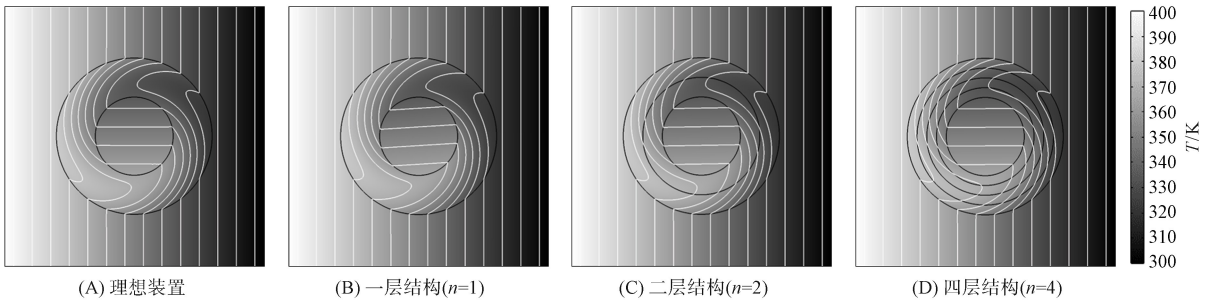


图 8 热旋转装置温度示意图

Fig. 8 Schematic diagram of temperature of heat rotating device

$n=4$ 时的热旋转装置时域计算结果如图 9 所示.由图 9 可见,该装置的热流整体上由高温向低温流动,在一定时间内可获得较好的热旋转效果.

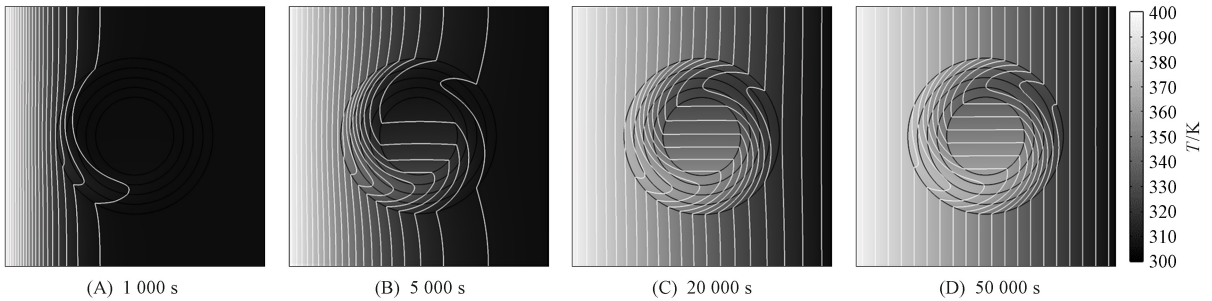


图 9 四层热旋转装置瞬态温度示意图

Fig. 9 Schematic diagram of transient temperature of four-layer heat rotating device

3.4 二维任意非共形隐身装置

对二维非共形热隐身装置进行数值模拟,外部矩形计算域的边长为 $0.2\text{ m}\times 0.2\text{ m}$,内外边界的参数方程分别为

$$R_1(\theta) = \frac{ab}{\sqrt{\sin^2(\theta)a^2 + \cos^2(\theta)b^2}}, \quad R_2(\theta) = \frac{0.2 + 0.02\cos(6\theta)}{3}.$$

数值计算结果如图 10 所示,其中图 10(A)为非共形隐身装置的稳态温度,图 10(B)~(D)为瞬态温度,图中线为等温线.由图 10(A)可见,当热流经过隐身区域时,其等温线绕过中心区域,使椭圆内部温度梯度为零,由于非隐身区域热流均匀分布,因此实现了热隐身效果.由图 10(B)~(D)可见,非共形热隐身斗篷在时域下的热流运动状态符合自然规律,且在一定时间内装置的温度可达到稳定状态,中心区域温度梯度为 0,实现了较好的隐身效果,从而验证了非共形热隐身装置数值计算的合

理性.

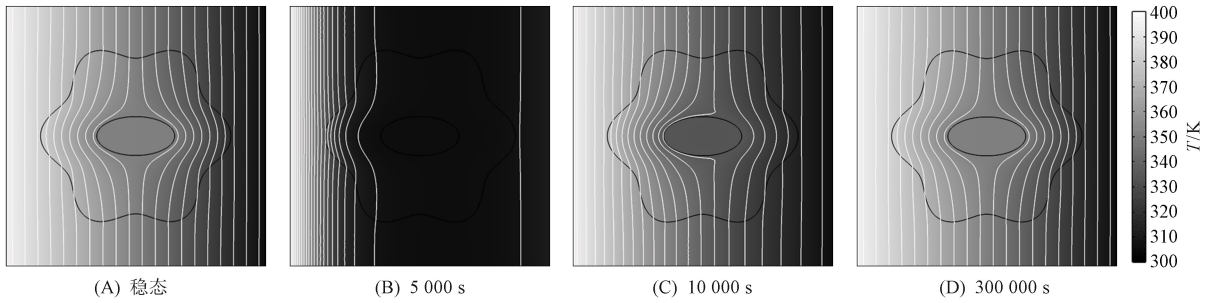


图 10 非共性隐身装置温度示意图

Fig. 10 Schematic diagram of temperature of non-common stealth devices

综上, 本文利用变换热力学理论推导出热斗篷、热集中器和热旋转器的理想材料参数. 由于材料的非均匀和各向异性, 因此先通过分层近似思想, 提出一种消除非均匀性的方法, 构建出二维热装置的分层结构, 再根据有效介质理论, 设计出各向同性的层状结构. 通过对分层结构和层状结构的有限元模拟, 得到热学装置的温度分布. 模拟结果表明, 当分层层数越多时, 设计的装置实现的热效应越好, 可达到与理想装置相同的效果. 在瞬态下热旋转装置分层结构的温度变化表明, 利用分层近似思想构建出的模型, 其热流随时间增加逐渐由左侧边界流向右侧边界, 符合实际要求, 通过对非共性热隐身装置的数值模拟, 验证了数值计算的合理性.

参 考 文 献

- [1] LIU T F, ZHANG M J, KANG Y W, et al. Material Extrusion 3D Printing of Polyether Ether Ketone in Vacuum Environment: Heat Dissipation Mechanism and Performance [J]. Additive Manufacturing, 2023, 62: 103390-1-103390-11.
- [2] SHA W, XIAO M, ZHANG J H, et al. Robustly Printable Freeform Thermal Metamaterials [J]. Nature Communications, 2021, 12(1): 7228-1-7228-8.
- [3] LIU Y M, ZHANG X. Metamaterials: A New Frontier of Science and Technology [J]. Chemical Society Reviews, 2011, 40(5): 2494-2507.
- [4] PENDRY J B, SCHURIG D, SMITH D R. Controlling Electromagnetic Fields [J]. Science, 2006, 312(5781): 1780-1782.
- [5] LEONHARDT U. Optical Conformal Mapping [J]. Science, 2006, 312(5781): 1777-1780.
- [6] HAN T C, YUAN T, LI B W, et al. Homogeneous Thermal Cloak with Constant Conductivity and Tunable Heat Localization [J]. Scientific Reports, 2013, 3: 1593-1-1593-5.
- [7] GUENNEAU S, AMRA C. Anisotropic Conductivity Rotates Heat Fluxes in Transient Regimes [J]. Optics Express, 2013, 21(5): 6578-6583.
- [8] HAN T C, QIU C W. Transformation Laplacian Metamaterials: Recent Advances in Manipulating Thermal and DC Fields [J]. Journal of Optics, 2016, 18(4): 044003-1-044003-13.
- [9] 任明丽, 杨涪铨, 刘晗, 等. 二维函数光子晶体中的类 Dirac 点及带隙结构 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2021, 59(5): 1260-1266. (REN M L, YANG P Q, LIU H, et al. Dirac-Like Point and Bandgap Structures in Two-Dimensional Functional Photonic Crystals [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2021, 59(5): 1260-1266.)
- [10] FAN C Z, GAO Y, HUANG J P. Shaped Graded Materials with an Apparent Negative Thermal Conductivity [J]. Applied Physics Letters, 2008, 92(25): 251907-1-251907-3.
- [11] GOOSEN M E, VENTER P J, FAURÉ N M, et al. Hot Carrier Degradation of Mixed-Mode Polysilicon Light Emitting Diodes [J]. Materials Science and Engineering: B, 2023, 292: 116391-1-116391-10.
- [12] PARKS S W, KIM D, RHEE Y M. Overcoming the Limitation of Spin Statistics in Organic Light Emitting Diodes (OLEDs): Hot Exciton Mechanism and Its Characterization [J]. International Journal of Molecular Sciences, 2023, 24(15): 12362-1-12362-21.

- [13] ZHOU S L, HU R, LUO X B. Thermal Illusion with Twinborn-Like Heat Signatures [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2018, 127: 607-613.
- [14] WANG H, YAO N Z, WANG B, et al. A Transient Transformation Theory for the Design of Convective Thermal Metamaterials: Cloaks, Concentrators, and Rotators [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2024, 221: 125088-1-125088-12.
- [15] LI J Y, GAO Y, HUANG J P. A Bifunctional Cloak Using Transformation Media [J]. *Journal of Applied Physics*, 2010, 108(7): 074504-1-074504-5.
- [16] CHEN T Y, WENG C N, CHEN J S. Cloak for Curvilinearly Anisotropic Media in Conduction [J]. *Applied Physics Letters*, 2008, 93(11): 114103-1-114103-3.
- [17] NARAYANA S, SATO Y. Heat Flux Manipulation with Engineered Thermal Materials [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 108(21): 214303-1-214303-5.
- [18] GUENNEAU S, AMRA C, VEYNANTE D. Transformation Thermodynamics: Cloaking and Concentrating Heat Flux [J]. *Optics Express*, 2012, 20(7): 8207-8218.
- [19] SHEN X Y, LI Y, JIANG C R, et al. Thermal Cloak-Concentrator [J]. *Applied Physics Letters*, 2016, 109(3): 031907-1-031907-5.
- [20] ZHOU L L, HUANG S Y, WANG M, et al. While Rotating while Cloaking [J]. *Physics Letters A*, 2019, 383(8): 759-763.
- [21] 刘洋, 段洋, 许国良, 等. 一种适用于对称截面的主动式热斗篷的研究 [J]. *计算物理*, 2020, 37(6): 718-724. (LIU Y, DUAN Y, XU G L, et al. An Active Thermal Cloak for Symmetric Cross Sections [J]. *Computational Physics*, 2020, 37(6): 718-724.)
- [22] FENG H L, ZHOU L M, NI Y S. Design of Switchable Transient Thermal Concentrators with Diamond Shapes [J]. *Europhysics Letters*, 2022, 138(1): 16001-1-16001-6.
- [23] LIN J H, CHEN T Y. Design of Two-Dimensional Transient Circular Thermal Cloaks with Imperfect Interfaces [J]. *Materials*, 2023, 16(6): 2297-1-2297-20.
- [24] XING X C, WU L L, DAI X, et al. Multifunctional Thermal Rotating Cloak with Nonconformal Geometry [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2023, 214: 124437-1-124437-11.
- [25] HU R, HU J Y, WU R K, et al. Examination of the Thermal Cloaking Effectiveness with Layered Engineering Materials [J]. *Chinese Physics Letters*, 2016, 33(4): 044401-1-044401-4.
- [26] HE B, YANG W, LIU F H. The Material Parameter Design and Finite Element Simulation of the Quadrilateral Thermal Cloak Device [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2019, 94: 99-104.
- [27] YU G X, LIN Y F, ZHANG G Q, et al. Design of Square-Shaped Heat Flux Cloaks and Concentrators Using Method of Coordinate Transformation [J]. *Frontiers of Physics in China*, 2011, 6: 70-73.
- [28] YANG F B, TIAN B Y, XU L J, et al. Experimental Demonstration of Thermal Chameleonlike Rotators with Transformation-Invariant Metamaterials [J]. *Physical Review Applied*, 2020, 14(5): 054024-1-054024-7.
- [29] 夏舸, 杨立, 寇蔚, 等. 采用瞬态球状热斗篷方法的浅层地下目标红外隐身技术 [J]. *国防科技大学学报*, 2018, 40(1): 126-131. (XIA G, YANG L, KOU W, et al. Infrared Stealth Technology for Shallow Subsurface Targets Using Transient Spherical Thermal Cloak Method [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2018, 40(1): 126-131.)
- [30] XING X C, WU L L, TIAN X Y, et al. Thermal Metamaterials with Nonconformal Geometry [J]. *Journal of Applied Physics*, 2023, 133(20): 204904-1-204904-8.

(责任编辑:王 健)