doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024267

三点边值问题有限差分格式数值正解的存在性

漆调艳，路艳琼
(西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070)

摘要：利用临界点理论证明三点边值问题

$$\begin{cases} -u''(x)=f(x,u(x)), & x\in[a,b], \\ u(a)=\alpha u(\eta), & u(b)=0 \end{cases}$$

的有限差分格式

$$\begin{cases} -\Delta^2 u(k-1)=f_k(u(k)), & k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0)=\alpha u(\eta), & u(n+1)=0 \end{cases}$$

非平凡解的存在性，并得到了上述连续问题数值相关解的存在性结果，其中：$n\geqslant 3$ 为正整数；α,η 是常数，且 $\alpha\left(1-\dfrac{\eta}{n+1}\right)\neq 1$；对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，f_k：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续.

关键词：临界点理论；先验界；Green 函数；收敛；数值解
中图分类号：O175.8　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5489(2025)03-0665-10

Existence of Numerical Positive Solutions of Finite Difference Scheme for Three-Point Boundary Value Problems

QI Tiaoyan, LU Yanqiong
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: By using the critical point theory, we prove the existence of the non-trivial solution of the finite difference scheme

$$\begin{cases} -\Delta^2 u(k-1)=f_k(u(k)), & k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0)=\alpha u(\eta), & u(n+1)=0 \end{cases}$$

for the three-point boundary value problem

$$\begin{cases} -u''(x)=f(x,u(x)), & x\in[a,b], \\ u(a)=\alpha u(\eta), & u(b)=0, \end{cases}$$

and get the existence result of the numerical correlation solution for the above continuous problem, where $n\geqslant 3$ is a positive integer, α,η are constants, and $\alpha\left(1-\dfrac{\eta}{n+1}\right)\neq 1$, f_k: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is continuous for any $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$.

Keywords: critical point theorem; a priori bounded; Green function; convergence; numerical solution

---

收稿日期：2024-06-28.　**网络首发日期**：2025-04-02.

第一作者简介：漆调艳(2001—)，女，汉族，硕士研究生，从事差分方程及其应用的研究，E-mail：2094324523@qq.com. **通信作者简介**：路艳琼(1986—)，女，汉族，博士，教授，从事差分方程及其应用的研究，E-mail：luyq8610@126.com.

基金项目：国家自然科学基金地区基金(批准号：12361040)和甘肃省青年科技基金计划项目(批准号：24JRRA536).
网络首发地址：https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20250402.1431.001.

0 引言

微分方程三点边值问题在研究横截面相同而密度分段不同的支索振动以及弹性稳定性理论等方面有重要应用[1]. 文献[2]最早研究了多点边值问题. Gupta 等[3-4]给出了关于二阶三点边值问题解的存在性结果. 文献[5-7]建立了研究该类问题正解存在性的关键条件, 并且对非线性常微分方程非局部问题进行了全面论述. 文献[8-18]在不同限制条件下获得了二阶非局部边值问题解的存在性结果.

Ma[5]利用锥上的不动点定理获得了如下非线性三点边值问题

$$\begin{cases} u''(x)+a(x)f(u)=0, & x\in(0,1), \\ u(0)=0, & u(1)=\alpha u(\eta) \end{cases}$$

的正解, 其中给定 $\alpha>0$, $\eta\in(0,1)$, $\alpha\eta<1$, 且 $a\in C([0,\infty],[0,\infty])$. 但关于这类问题数值解的研究成果目前报道较少. 为研究上述问题的数值解, 文献[19-20]考虑了二阶三点离散边值问题正解的存在性, 但未讨论离散问题的解是否收敛到连续问题的解. Ganies[21]证明了二阶常微分方程 Sturm-Liouville 边值问题存在相关数值解, 并且提出只要相应有限差分格式的所有可能解的先验界与步长无关, 则该问题的相关数值解即存在. 文献[22-24]得到了一些二阶常微分方程边值问题相关数值解的存在性结果. Amoroso 等[25]研究了 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -u''(x)=f(x,u(x)), & x\in[a,b], \\ u(a)=0, & u(b)=0 \end{cases}$$

有限差分格式非平凡解的存在性及先验界估计, 获得了其收敛于上述 Dirichlet 边值问题的结论, 为其数值解的研究提供了理论依据.

受上述研究工作的启发, 本文用临界点理论、变分方法、截断技术和先验界理论研究三点边值问题

$$\begin{cases} -u''(x)=f(x,u(x)), & x\in[a,b], \\ u(a)=\alpha u(\eta), & u(b)=0 \end{cases} \tag{1}$$

的有限差分格式

$$\begin{cases} -\Delta^2 u(k-1)=f_k(u(k)), & k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}, \\ u(0)=\alpha u(\eta), & u(n+1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

正解的存在性及一些定性信息, 并由式(2)的解近似收敛到问题(1)的解, 进而获得问题(1)数值相关解的存在性结果. 特别地, 本文获得了问题(1)的解及其导数的先验界, 这里 $n\geq 3$ 为正整数, α,η 是常数, 且 $\alpha\left(1-\dfrac{\eta}{n+1}\right)\neq 1$, 对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$, f_k: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续.

1 预备知识

设 $\mathbb{Z}$ 表示整数集, $a,b\in\mathbb{Z}$, 对任意的 $k\in[1,n+1]_{\mathbb{Z}}$, 用 $\Delta u(k-1):=u(k)-u(k-1)$ 和 $\Delta^2 u(k-1):=u(k+1)-2u(k)+u(k-1)$ 分别表示前向差分算子和二阶差分算子.

定义 n 维空间 $X=\{u\in\mathbb{R}^{n+2}\mid u(0)=\alpha u(\eta),\ u(n+1)=0\}$. 不难验证 X 按范数 $\|u\|_X:=\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1}|\Delta u(k-1)|^2\right)^{1/2}$ 构成 Banach 空间. 定义范数

$$\|u\|_2:=\left(\sum_{k=1}^{n}|u(k)|^2\right)^{1/2}, \qquad \forall u\in X,$$

$$\|u\|_\infty=\max_{k\in[1,n+1]_{\mathbb{Z}}}|u(k)|, \quad \|u\|_1=\sum_{k=1}^{n}|u(k)|, \quad \forall k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}.$$

易证 $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ 和 $\|\cdot\|_X$ 等价.

设对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$, f_k: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续, 令 $F_k(t):=\int_0^t f_k(s)\mathrm{d}s$, 考虑算子 Φ,Ψ,I: $X\to\mathbb{R}$, 对任意的 $u\in X$, 定义

$$\Phi(u):=\sum_{k=1}^{n+1}|\Delta u(k-1)|^2,\quad \Psi(u)=\sum_{k=1}^{n}F_k(u(k)),\quad I(u):=\Phi(u)-\Psi(u).\tag{3}$$

由于 Φ 和 Ψ 都是 Gateâux 可微的，因此对任意的 $u,v\in X$，有

$$\Phi'(u)(v)=\sum_{k=1}^{n+1}\Delta u(k-1)\Delta v(k-1),\qquad \Psi'(u)(v):=\sum_{k=1}^{n}f_k(u(k))v(k).$$

特别地，它们都是 C^1 泛函．显然，I 也是 C^1 泛函，并且有

$$I'(u)(v)=\sum_{k=1}^{n+1}\Delta u(k-1)\Delta v(k-1)-\sum_{k=1}^{n}f_k(u(k))v(k).$$

对问题(2)中的差分方程 $-\Delta^2u(k-1)=f_k(u(k))$ 两边同乘 $v\in X$，并从 1 到 n 求和得

$$-\sum_{k=1}^{n}\Delta^2u(k-1)v(k)=\sum_{k=1}^{n}f_k(u(k))v(k),$$

因此，$u\in X$ 是问题(2)的一个解当且仅当 u 是 I 的一个临界点．

定理 1　设 $v\in\mathbb{R}$，且 $v(k)\geqslant0$，则线性差分问题

$$\begin{cases}-\Delta^2u(k-1)=v(k), & k\in[1,n]_{\mathbb{Z}},\\ u(0)=\alpha u(\eta), & u(n+1)=0\end{cases}\tag{4}$$

存在唯一解 $u_n\in X$，满足

$$u_n(k)=\sum_{j=1}^{n}G(k,j)v(j),\qquad \forall k\in[1,n]_{\mathbb{Z}},\tag{5}$$

其中 $G(k,j)$：$[1,n]\times[1,n]\to\mathbb{R}$ 为问题(4)的 Green 函数：

$$G(k,j)=G_0(k,j)+\frac{\alpha(n+1-k)}{n+1-\alpha(n+1-\eta)}G_0(\eta,j),\tag{6}$$

$$G_0(k,j)=\begin{cases}\dfrac{j(n+1-k)}{n+1}, & j\leqslant k,\\[2mm] \dfrac{k(n+1-j)}{n+1}, & j\geqslant k.\end{cases}\tag{7}$$

此外，u_n 满足

$$\|u_n\|_\infty\leqslant B_n\|v\|_\infty,\tag{8}$$

其中

$$B_n=\max_{k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}}\left\{\frac{k(n+1-k)}{2}+\frac{\alpha\eta(n+1-k)^2(n+2-k)}{2(n+1)[n+1-\alpha(n+1-\eta)]}\right\}.$$

证明：由文献[26]知式(7)中的 $G_0(k,j)$ 为

$$\begin{cases}-\Delta^2u(k-1)=v(k), & k\in[1,n]_{\mathbb{Z}},\\ u(0)=0, & u(n+1)=0\end{cases}\tag{9}$$

的 Green 函数，式(9)的解表示为 $w(k)=\sum_{j=1}^{n}G_0(k,j)v(j)(\forall k\in[1,n]_{\mathbb{Z}})$，且

$$w(0)=0,\quad w(n+1)=0,\quad w(\eta)=\sum_{j=1}^{n}G_0(\eta,j)v(j).\tag{10}$$

下面用待定系数法求问题(4)的解：

$$u(k)=w(k)+(c+dk)w(\eta),\tag{11}$$

其中 c,d 为待定系数．由式(10)和式(11)得

$$u(0)=cw(\eta),\quad u(n+1)=(c+dn+d)w(\eta),\quad u(\eta)=(c+d\eta+1)w(\eta),\tag{12}$$

将式(12)代入问题(4)的边界条件得 $c=\alpha(c+d\eta+1)$，$c+dn+d=0$，解得 $c+dk=\dfrac{\alpha(n+1-k)}{n+1-a(n+1-\eta)}$，

故问题(4)的解为

$$u(k)=\sum_{j=1}^{n}G_0(k,j)v(j)+\frac{\alpha(n+1-k)}{n+1-a(n+1-\eta)}\sum_{j=1}^{n}G_0(\eta,j)v(j),\qquad \forall k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}.\tag{13}$$

因此，式(5)成立且问题(4)的Green函数如式(6)所示. 易验证式(12)满足线性差分问题(4)，结论得证.

下面证明式(8)成立，由式(6)和式(7)直接计算得

$$\sum_{j=1}^{n} G(k,j)=\frac{k(n+1-k)}{2}+\frac{\alpha\eta(n+1-k)^2(n+2-k)}{2(n+1)[n+1-\alpha(n+1-\eta)]},$$

对任意的 $v\in X$，由式(5)得 $\|u_n\|_\infty\leqslant\max\limits_{k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}}\left\{\sum\limits_{j=1}^{n}G(k,j)\right\}\|v\|_\infty$. 定义

$$\max_{k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}}\left\{\frac{k(n+1-k)}{2}+\frac{\alpha\eta(n+1-k)^2(n+2-k)}{2(n+1)[n+1-\alpha(n+1-\eta)]}\right\}:=B_n,$$

从而 $\|u_n\|_\infty\leqslant B_n\|v\|_\infty$.

2 有界差分格式解的存在性和先验界

定理2 令 $n\geqslant 1$，对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，设 f_k：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续. 假设存在两个常数 $r:=r(n)$ 和 $d:=d(n)$，满足 $r>0$，$|d|\leqslant B_n r$，并使得：

1) 对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，$\max\limits_{|t|\leqslant B_n r}|f_k(t)|\leqslant r$；

2) $d^2<\int_0^d f_{\bar{k}}(t)\mathrm{d}t$，$\bar{k}\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$.

则问题(2)至少有一个解 $u_n\in X$，且 $0<\|u_n\|_\infty\leqslant B_n r$.

证明：固定 $n\geqslant 3$，r 满足条件1)，对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，令 f_k：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续，定义为

$$f_{k,r}(t)=\begin{cases} f_k(-B_n r), & t<-B_n r,\\ f_k(t), & |t|<B_n r,\\ f_k(B_n r), & t>B_n r.\end{cases}$$

显然，由条件1)得

$$|f_{k,r}(t)|\leqslant\max_{|t|\leqslant B_n r}|f_k(t)|\leqslant r,\quad \forall t\in\mathbb{R},\quad \forall k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}.\tag{14}$$

考虑问题

$$\begin{cases} -\Delta^2 u(k-1)=f_{k,r}(u(k)), & k\in[1,n]_{\mathbb{Z}},\\ u(0)=\alpha u(\eta), \quad u(n+1)=0.\end{cases}$$

对任意的 $u\in X$，令 $I_r(u)=\Phi(u)-\Psi_r(u)$，其中 Φ 如式(3)，$\Psi_r(u)=\sum\limits_{k=1}^{n}F_{k,r}(u(k))$，$F_{k,r}(t)=\int_0^t f_{k,r}(s)\mathrm{d}s$. 显然 I_r 是 X 中的 C^1 泛函，下面验证 I_r 在 X 中是强制的.

固定 $u\in X$，由式(14)得

$$|\Psi_r(u)|=\left|\sum_{k=1}^{n}F_{k,r}(u(k))\right|\leqslant r\sum_{k=1}^{n}\int_0^{|u(k)|}\mathrm{d}z=r\sum_{k=1}^{n}|u(k)|=r\|u\|_1.$$

进一步知，存在 $c_1>0$，使得 $\|u\|_1\leqslant c_1\|u\|_X$，则对任意的 $u\in X$，$|\Psi_r(u)|\leqslant rc_1\|u\|_X$. 因此

$$I_r(u)=\Phi(u)-\Psi_r(u)\geqslant\Phi(u)-|\Psi_r(u)|\geqslant\frac{\|u\|_X^2}{2}-rc_1\|u\|_X,$$

从而 I_r 满足强制性条件. 故由Tonelli-Weierstrass定理和费马定理知，存在 $u_n\in X$，使得对任意的 $u\in X$，有

$$I_r(u_n)\leqslant I_r(u)\ \text{且}\ I_r'(u_n)=0,\tag{15}$$

因此 u_n 是问题的一个解. 此外，由式(8)和式(14)得

$$\|u_n\|_\infty\leqslant B_n\sup_{t\in\mathbb{R}}|f_r(s)|\leqslant B_n r,\tag{16}$$

则对任意的 $k\in[1,n+1]_{\mathbb{Z}}$，有 $|u_n(k)|\leqslant B_n r$，表明 $f_{k,r}(u_n)=f_k(u_n)$，故 u_n 也是问题(2)的一个解.

取 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，d 如条件2)所定义，且 $|d|\leqslant B_n r$. 对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，定义 $u_d(k)=\delta_{k\bar{k}}d$，其中

$\delta_{k\bar{k}}$ 是 Kronecker's 符号，即 $\delta_{k\bar{k}}=\begin{cases}0, & k\neq\bar{k},\\ 1, & k=\bar{k},\end{cases}$ 从而 $u_d(k)=\begin{cases}0, & k\neq\bar{k},\\ d, & k=\bar{k}.\end{cases}$ 因为 $I_r(u_d)=I(u_d)$，而

$$I_r(u_d)=\frac{\|u_d\|_X^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}F_k(u_d(k))=\frac{|\Delta u_d(\bar{k}-1)|^2+|\Delta u_d(\bar{k})|^2}{2}-F_{\bar{k}}(d)=d^2-F_{\bar{k}}(d)\leqslant 0,$$

所以由式(15)得 $I_r(u_n)\leqslant I_r(u_d)<0$，使得 $u_n\neq 0$，故由式(16)知 $0<\|u_n\|_\infty\leqslant B_n r$ 成立．证毕．

如果只考虑问题(2)的非平凡解，则类似定理 2 的证明过程，可得如下结果．

定理 3　令 $n\geqslant 3$，对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，f_k：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续，且 $f_k(0)\neq 0$．假设存在 $r>0$，使得定理 2 中条件 1)成立，则问题(2)至少存在一个非平凡解 $u_n\in X$，使得 $\|u_n\|_\infty\leqslant B_n r$．

下面应用定理 2 建立问题(2)正解的一个存在性结果．

定理 4　令 $n\geqslant 3$，对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，f_k：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续，且 $f_k(0)\geqslant 0$．假设定理 2 中条件 2)成立，且对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，$\max\limits_{0\leqslant t\leqslant B_n r}|f_k(t)|\leqslant r$ 成立，则问题(2)至少存在一个正解 $u_n\in X$，使得 $\|u_n\|_\infty\leqslant B_n r$．

证明：固定 $r>0$ 满足对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，$\max\limits_{0\leqslant t\leqslant B_n r}|f_k(t)|\leqslant r$．对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，令 $f_{k,r}^{+}(s)$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续，定义为

$$f_{k,r}^{+}(t)=\begin{cases}f_k(0), & t<0,\\ f_{k,r}(s), & 0<t\leqslant B_n r.\end{cases}$$

对任意的 $t\in\mathbb{R}$，记 $F_{k,r}^{+}(t)=\int_0^t f_{k,r}^{+}(s)\mathrm{d}s$．显然，$f_{k,r}^{+}$ 满足定理 2 的所有假设，因此问题(2)至少存在一个非平凡解 $u_n\in X$，且 $\|u_n\|_\infty\leqslant B_n r$．因此，对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，有 $u_n(k)>0$ 或 $u_n(k)\leqslant 0$，并且由后者可得 $-\Delta^2 u_n(k-1)=f_{k,r}^{+}(0)\geqslant 0$．从而由强极大值原理[26]得 u_n 恒为 0 或 $u_n>0$．由定理 2 知 $u_n\neq 0$，因此 $u_n>0$．证毕．

令 $K=\{u\in X\,|\,u(k)>0,\ \min\limits_{k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}}\geqslant\delta\|u\|\}$ 为 X 中非负函数的一个锥．定义问题(2)对应的和算子 A：$X\to X$ 为 $Au(k):=\sum\limits_{j=1}^{n}G(k,j)f(u(k))$．

引理 1　A：$X\to X$ 是一个全连续算子，且 $A(K)\subset K$．

证明：易见 A 是连续线性算子．下证保锥性．定义 $\varphi(k)=k$，$\psi(k)=n+1-k$，$k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，则

$$G(k,j)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(j)\psi(k)[n+1-\alpha(n+1-\eta)]+\alpha\psi(k)\varphi(j)\psi(\eta)}{(n+1)[n+1-\alpha(n+1-\eta)]}, & j\leqslant k,\\[2ex] \dfrac{\varphi(k)\psi(j)[n+1-\alpha(n+1-\eta)]+\alpha\psi(k)\psi(j)\varphi(\eta)}{(n+1)[n+1-\alpha(n+1-\eta)]}, & j\geqslant k,\end{cases}$$

从而 $G(k,j)\leqslant G(j,j)$，$k,j\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$．由于

$$\frac{G(k,j)}{G(j,j)}=\begin{cases}\dfrac{\varphi(j)\psi(k)[n+1-\alpha(n+1-\eta)]+\alpha\psi(k)\varphi(j)\psi(\eta)}{\varphi(j)\psi(j)[n+1-\alpha(n+1-\eta)]+\alpha\psi(j)\varphi(j)\psi(\eta)}\geqslant\dfrac{1}{n^2}, & j\leqslant k,\\[2ex] \dfrac{\varphi(k)\psi(j)[n+1-\alpha(n+1-\eta)]+\alpha\psi(k)\psi(j)\varphi(\eta)}{\varphi(j)\psi(j)[n+1-\alpha(n+1-\eta)]+\alpha\psi(j)\psi(j)\varphi(\eta)}\geqslant\dfrac{1}{n^2}, & j\geqslant k,\end{cases}$$

故 $\dfrac{G(k,j)}{G(j,j)}\geqslant\dfrac{1}{n^2}:=\delta$，$k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$．因此，若 $u\in K$，则

$$\min_{k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}}Au(k)=\min_{k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}}\sum_{j=1}^{n}G(k,j)v(j)\geqslant\delta\sum_{j=1}^{n}G(j,j)v(j)\geqslant\delta\|Au\|,$$

所以 $A(K)\subset K$．

引理 2(**Krein-Rutmann**)[27]　令 A：$E\to E$ 是一个连续线性算子，且 $A(K)\subset K$，若存在 $v\in E\backslash(-K)$ 和一个正常数 C，使得 $CA(v)\geqslant v$，则谱半径 $r(A)\neq 0$ 且 A 有一个与其主特征值 $\lambda=r(A)^{-1}$ 一致的正特征函数．

引理 3　对算子 A：$X\to X$，谱半径 $r(A)\neq 0$ 且 A 有一个与其主特征值 $\lambda=r(A)^{-1}$ 一致的正特征函数．

证明：由于存在 $k_0\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，使得 $G(k_0,k_0)>0$，故存在 $[k_1,k_2]_{\mathbb{Z}}\subset[1,n]_{\mathbb{Z}}$，使得 $k_0\in[k_1,k_2]_{\mathbb{Z}}$，且 $\forall k,j\in[k_1,k_2]_{\mathbb{Z}}$，$G(k,j)>0$. 取 $u\in X$，使得 $\forall k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，$u(k)\geqslant 0$，$u(k_0)>0$，且 $\forall k\notin[k_1,k_2]_{\mathbb{Z}}$，$u(k)=0$，则对任意的 $k\in[k_1,k_2]_{\mathbb{Z}}$，有

$$Au(k)=\sum_{j=1}^{n}G(k,j)v(j)\geqslant\sum_{j=k_1}^{k_2}G(k,j)v(j)>0.$$

因此，对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，存在 $C>0$，使得 $C(Au)(k)\geqslant u(k)$. 由引理2知，谱半径 $r(A)\neq 0$ 且 A 有一个与其主特征值 $\lambda_1=r(A)^{-1}$ 一致的正特征函数.

由引理3知，$\lambda_1=r(A)^{-1}$ 是线性三点边值问题(4)的主特征值.

引理4[25]　对任意的 $n\geqslant 3$ 和 $u\in X$，有 $\lambda_1\|u\|_2\leqslant\|u\|_X$.

下面利用 Sobolev 和 l^2 估计代替一致估计，给出定理2的一个变体.

定理5　令 $n\geqslant 3$，对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，设 f_k：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续. 假设存在 $\beta=\beta(n)\geqslant 0$，$d:=d(n)$，使得：

1) $\beta<\lambda_1$；

2) 对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，$\limsup\limits_{|t|\to\infty}\left|\dfrac{2F_K(t)}{t^2}\right|\leqslant\beta$；

3) $d^2<\int_0^d f_{\bar{k}}(t)\mathrm{d}t$，$\bar{k}\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$.

则问题(2)至少有一个解 $u_n\in X$，且

$$0<\|u_n\|_X<\left[\frac{n\gamma}{1-(\beta+\varepsilon)/\lambda}\right]^2,\tag{17}$$

其中 $0<\varepsilon<\lambda-\beta$.

证明：设 $\beta+\varepsilon<\lambda(\varepsilon>0)$，由条件2)知，存在 $R>0$，使得对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，有

$$2F_k(t)\leqslant(\beta+\varepsilon)t^2,\qquad |t|\geqslant R.$$

此外，令 $\gamma:=2\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\max\limits_{|t|\leqslant R}F_k(t)$，得

$$2F_k(t)\leqslant(\beta+\varepsilon)t^2+\gamma,\quad\forall k\in[1,n]_{\mathbb{Z}},\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

因此，对任意的 $u\in X$，由引理4得

$$I(u)=\Phi(u)-\Psi(u)=\frac{\|u\|_X^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}F_k(u(k))\geqslant$$

$$\frac{\|u\|_X^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}\left[(\beta+\varepsilon)\frac{|u(k)|^2}{2}+\frac{\gamma}{2}\right]\geqslant\left(1-\frac{\beta+\varepsilon}{\lambda_1^2}\right)\frac{\|u\|_X^2}{2}-n\frac{\gamma}{2},$$

从而 I 满足强制性条件，且在 X 中取得最小值. 后续证明与定理2的证明类似，由 $I(u_n)\leqslant I(0)=0$ 得式(17)的右边成立.

3　连续问题的数值相关解

下面利用离散问题(2)的解近似逼近连续问题(1)的数值解. 考虑差分三点边值问题

$$\begin{cases}-\Delta^2u_n(k-1)=h_n^2f_k^n(u_n(k)),\quad k\in[1,n]_{\mathbb{Z}},\\ u(0)=\alpha u(\eta),\quad u(n+1)=0,\end{cases}\tag{18}$$

其中：$h_n=\dfrac{b-a}{n+1}$ 是步长；$x_k^n=a+kh_n$ 是网格点；对任意的 $k\in[1,n+1]_{\mathbb{Z}}$，设 f_k^n：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续，且满足

$u_n(k):=u(x_k^n)$，$f_k^n(t)=f(x_k^n,t)$.

对给定的 $n\geqslant 3$ 和 $k\in[1,n+1]_{\mathbb{Z}}$，令 $v_n(k-1):=\dfrac{\Delta u_n(k-1)}{h_n}$，并且定义两个函数 ω_n,τ_n：$[a,b]\to\mathbb{R}$，对任意的 $x\in[a,b]$，有

$$\omega_n(x):=u_n(k-1)+v_n(k-1)(x-x_{k-1}^n),\qquad\forall x_{k-1}^n\leqslant x\leqslant x_k^n,\tag{19}$$

$$\tau_n(x):=v_n(k-1)+\frac{\Delta v_n(k-1)}{h_n}(x-x_{k-1}^n),\qquad \forall\, x_{k-1}^n\leqslant x\leqslant x_k^n. \tag{20}$$

命题 1　假设存在 $n_0\leqslant 1$，使得对任意的 $n\leqslant n_0$，问题(18)至少存在一个解 $u_n\in X$. 进一步，假设存在 $R>0$，使得对任意的 $n\geqslant n_0$，$\|u_n\|_\infty\leqslant R$ 成立，即 u_n 有界，则存在两个函数 $\omega,\tau\in C[a,b]$满足下列条件：

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\|\omega_n-\omega\|_\infty=0$；

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|\tau_n-\tau\|_\infty=0$.

其中对任意的 $x\in[a,b]$，有

$$\omega(x)=\int_a^x\tau(s)\mathrm{d}s,\qquad \tau(x)=\tau(a)-\int_a^x f(s,\omega(s))\mathrm{d}s. \tag{21}$$

特别地，$\omega\in C^2([a,b])$，并且 ω 是问题(1)的解，且

$$\|\omega\|_\infty\leqslant R,\quad \|\omega'\|_\infty\leqslant(b-a)Q_R,\quad \|\omega''\|_\infty\leqslant Q_R, \tag{22}$$

其中 $Q_R=\max\limits_{(x,t)\in[a,b]\times[-R,R]}|f(x,t)|$.

证明：分两步证明.

断言 1　对任意的 $n\geqslant 3$，设 R 满足对任意的 $n\geqslant n_0$，$\|u_n\|_\infty\leqslant R$，则

$$\left|\frac{\Delta u_n(k-1)}{h_n}\right|\leqslant(b-a)Q_R.$$

对任意的 $k\in[1,n+1]_{\mathbb{Z}}$，由式(5)得

$$\begin{aligned}|\Delta u_n(k-1)|=h_n^2\left|\sum_{j=1}^n[G(k,j)-G(k-1,j)]f_j^n(u_n(j))\right|\leqslant\\ h_n^2\left|\left[\sum_{j=1}^n(G(k,j)-G(k-1,j)\right]+\frac{-\alpha}{n+1-\alpha(n+1-\eta)}G_0(\eta,j)\right|Q_R\leqslant\\ \frac{(b-a)^2}{(n+1)^3}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\right]Q_R=\frac{n(b-a)^2}{(n+1)^2}Q_R,\end{aligned}$$

故

$$\left|\frac{\Delta u_n(k-1)}{h_n}\right|\leqslant\frac{n}{n+1}(b-a)Q_R\leqslant(b-a)Q_R.$$

断言 2　存在两个函数 $\omega,\tau\in C[a,b]$，使得通过必要的子序列可证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(x)=\omega(x)$且 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n(x)=\tau(x)$ 在$[a,b]$中一致成立.

任意取定 $x\in[a,b]$，则存在 $k\in[1,n+1]_{\mathbb{Z}}$，使得 $x_{k_n-1}^n\leqslant x<x_{k_n}^n$. 由假设条件知存在 $n_0\geqslant 3$，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，问题(18)至少存在一个解 $u_n\in X$. 当 $n\geqslant n_0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}x_{k_n-1}^n=\lim_{n\to\infty}x_{k_n}^n=x. \tag{23}$$

进一步，由断言 1、定理 2 中条件 1)及式(19),(20)得

$$|\omega_n(x)|=|u_n(k-1)|+|v_n(k-1)|(x-x_{k_n-1}^n)\leqslant R+(b-a)Q_R,$$

$$|\tau_n(x)|=|v_n(k-1)|+|f_k^n(u_n(k))|(x-x_{k_n-1}^n)\leqslant 2(b-a)Q_R,$$

从而由 x 的任意性可知序列$\{\omega_n\}$和$\{\tau_n\}$在$[a,b]$中等度有界. 下面证明它们等度连续.

取 $s_1,s_2\in[a,b]$，则可无条件假设：对任意的 $n\leqslant n_0$，存在 $j,k\in[1,n+1]_{\mathbb{Z}}$ $(j<k)$，使得 $x_{j-1}^n\leqslant s_1\leqslant x_j^n$ 且 $x_{k-1}^n\leqslant s_2\leqslant x_k^n$. 因此，由定理 2 中条件 1)和断言 1 得

$$\begin{aligned}|\omega_n(s_2)-\omega_n(s_1)|\leqslant|\omega_n(s_2)-\omega_n(x_{k-1}^n)|+\sum_{i=j+1}^{k-1}|\omega_n(x_i^n)-\omega_n(x_{i-1}^n)|+|\omega_n(x_j^n)-\omega_n(s_1)|\leqslant\\ |v_n(k-1)|(s_2-x_{k-1}^n)+\sum_{i=j+1}^{k-1}|v^n(i-1)|(x_i^n-x_{i-1}^n)+|v_n(j-1)|(x_j^n-s_1)\leqslant\\ (b-a)Q_R(s_2-s_1).\end{aligned}$$

同理可得

$$|\tau_n(s_2)-\tau_n(s_1)|\leqslant|\tau_n(s_2)-\tau_n(x_{k-1}^n)|+\sum_{i=j+1}^{k-1}|\tau_n(x_i^n)-\tau_n(x_{i-1}^n)|+|\tau_n(x_j^n)-\tau_n(s_1)|\leqslant$$
$$\frac{|\Delta v_n(k-1)|}{h_n}(s_2-x_{k-1}^n)+\sum_{i=j+1}^{k-1}\frac{|\Delta v_n(i-1)|}{h_n}(x_i^n-x_{i-1}^n)+\frac{|\Delta v_n(j-1)|}{h_n}(x_j^n-s_1)\leqslant$$
$$Q_R(s_2-s_1).$$

从而由 Ascoli-Arzla's 定理[28]知函数 ω 和 τ 满足断言 2，进而也满足条件 1)和 2).

下面证明式(21)成立. 根据 $\omega_n(x)$ 和 $\tau_n(x)$ 的定义知，对任意的 $k\in[1,n+1]_{\mathbb{Z}}$，有 $\omega_n(x_{k-1}^n)=u_n(k-1)$ 和 $\tau_n(x_{k-1}^n)=v_n(k-1)$，因此

$$\omega_n(x_k^n)=u_n(k)=u_n(0)+h_n\sum_{i=1}^{k}v_n(i-1)=\omega_n(a)+h_n\sum_{i=1}^{k}\tau_n(x_{i-1}^n).\tag{24}$$

另一方面，有

$$\tau_n(x_k^n)=v_n(k)=v_n(0)+h_n\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta v_n(i-1)}{h_n}=$$
$$\tau(a)-h_n\sum_{i=1}^{k}f_i^n(u_n(i))=\tau(a)-h_n\sum_{i=1}^{k}\omega_i^n(u_n(i)).\tag{25}$$

在式(24)和式(25)中，用 k 替换 k_n，并利用式(23)和断言 2 知，当 $n\to\infty$ 时，有 $\omega(x)=\int_a^x\tau(s)\mathrm{d}s$ 且 $\tau(x)=\tau(a)-\int_a^x f(s,\omega(s))\mathrm{d}s$. 显然，$\omega$ 是问题(1)的一个解.

下面给出连续问题(1)正解的存在性结果，其中非线性项在零处是次线性增长的. 先给出问题(1)的 Green 函数如下：

$$\bar{G}(t,s)=G_1(t,s)+\frac{k(b-t)}{b-a-k(b-\eta)}G_1(\eta,s),$$

其中

$$G_1(k,j)=\begin{cases}\dfrac{(s-a)(b-t)}{b-a}, & a\leqslant s\leqslant t\leqslant b,\\[2mm] \dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a}, & a\leqslant t\leqslant s\leqslant b.\end{cases}$$

定理 6 $f:[a,b]\times\mathbb{R}$ 是连续函数，假设下列条件成立：

1) 存在 $\sigma>0$，使得 $\max\limits_{(x,t)\in[a,b]\times[0,\sigma]}|f(x,s)|\leqslant\dfrac{\sigma}{M}$，其中 $M:=\max\limits_{t\in(a,b)}\int_a^b|\bar{G}(t,s)|\mathrm{d}s$；

2) $\forall x\in[a,b]$，$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(x,t)}{t}=+\infty$.

则问题(1)至少存在一个正解 $u\in C^2([a,b])$，且 $\|u\|_\infty\leqslant\sigma$，$\|u'\|_\infty\leqslant\dfrac{(b-a)}{M}\sigma$，$\|u''\|_\infty\leqslant\dfrac{\sigma}{M}$. 此外，对任意的 $x\in[a,b]$，有 $u(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(x)$，$u'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n(x)$，其中 ω_n 和 τ_n 定义如式(22),(23).

证明：首先，令 $r^*=\sigma/M$，由条件 1)和式(8)得 $\max\limits_{[a,b]\times[0,B_nh_n^2r^*]}h_n^2|f(x,s)|\leqslant h_n^2r^*$. 结合条件 2)，对任意的$(x,s)\in[a,b]\times\mathbb{R}$，$n\geqslant3$，存在函数 $g_n:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，定义为 $g_n(x,s):=h_n^2f(x,s)$，满足定理 4 中的条件，此时 $r=h_n^2r^*$.

其次，固定 $n\geqslant\max\{1,(b-a)-1\}$，由条件 1)知，存在足够小的 $d=d(n)>0$，使得对任意的$(x,t)\in[a,b]\times R$，$f(x,s)>d$，则

$$\int_0^d g_n(x,t)\mathrm{d}t=\int_0^d h_n^2f(x,t)\mathrm{d}t>d^2,$$

即对任意的 $k\in[1,n+1]_{\mathbb{Z}}$，函数 g_n 满足定理 2 中条件 2)，故由定理 4 知，问题(19)存在一个正解 $u_n\in X$，使得 $\|u_n\|_\infty\leqslant B_nh_n^2r^*:=\sigma$.

令 $n_0\geqslant\max\{1,(b-a)-1\}$，$R=\sigma$，由命题 1 知，问题(1)至少存在一个满足命题 1 中条件 1),2)和

式(22)的解 $u\in C^2([a,b])$.

最后，证明 u 是正的. 因为对任意的 $k\in[1,n]_{\mathbb{Z}}$，$u_n(k)\geqslant 0$，通过构造函数 $u(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(x)$知，对任意的 $x\in(a,b)$，当 $n\geqslant 3$ 时，$\omega_n(x)>0$，显然 u 是非负的. 固定 $x\in(a,b)$，由式(23)知，当 $n\to\infty$ 时，$x_{k_n}^n\to x$. 反设 $u(x)=0$，由命题 1 的条件 1)得

$$\lim_{n\to\infty}\omega_n(x_{k_n}^n)=\lim_{n\to\infty}u_n(k_n)=0. \tag{26}$$

进一步，结合式(5),(26)和条件 2)得

$$u_n(k_n)=\sum_{j=1}^{n}G(k_n,j)f_j^n(u_n(j))\geqslant G(k_n,k_n)f_{k_n}^n(u_n(k_n))\geqslant f_{k_n}^n(u_n(k_n))>2u_n(k_n),$$

显然矛盾. 故对任意的 $x\in(a,b)$，有 $u_n(x)>0$.

例 1　对任意的 $t\in\mathbb{R}$，令 $f(t)=\mathrm{e}^t$，则对实区间$[a,b]$，$b-a\leqslant\sqrt{8/\mathrm{e}}\approx 1.71$，从而问题(1)至少有一个正解，且 $\|u\|_\infty\leqslant 1$，$\|u'\|_\infty\leqslant(b-a)/M$，$\|u''\|_\infty\leqslant 1/M$. 特别地，问题

$$\begin{cases}-u''(x)=\mathrm{e}^{u(x)}, & x\in(0,1),\\ u(0)=\alpha u(\eta), & u(1)=0\end{cases} \tag{27}$$

至少有一个正解，且 $\|u\|_\infty\leqslant 1$，$\|u'\|_\infty\leqslant(b-a)/M$，$\|u''\|_\infty\leqslant 1/M$.

下面说明问题(27)的有限差分格式

$$\begin{cases}-\Delta^2u(k-1)=\mathrm{e}^{u(k)}, & k\in[1,n]_{\mathbb{Z}},\\ u(0)=\alpha u(\eta), & u(n+1)=0\end{cases}$$

数值正解的存在性. 由 $f(t)$的定义知，存在两个常数 $r>0$ 和 $d\leqslant B_nr$，使得 $\max\limits_{|t|\leqslant B_nr}|\mathrm{e}^t|\leqslant\mathrm{e}^{B_nr}:=r_*$，$d^2<\mathrm{e}^d=\int_0^d\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$，则由定理 2 知其有限差分格式至少有一个解 $u_n\in X$，且 $0\leqslant\|u_n\|_\infty\leqslant B_nr$.

注 1　上述所有结果对边界条件为 $u(a)=0$，$u(b)=\alpha u(\eta)$的情形仍成立，只需将 Green 函数换为

$$G(k,j)=G_0(k,j)+\frac{\alpha k}{n+1-\eta}G_0(\eta,j),$$

其中 $G_0(k,j)$定义如式(7).

参　考　文　献

[1] 陈云. 奇异微分方程三点边值问题正解的存在性[D]. 济南：山东师范大学，2007.（CHEN Y. Existence of Positive Solutions of Three-Point Boundary Value Problems for Singular Differential Equations [D]. Jinan：Shandong Normal University，2007.）

[2] BARR D，SHERMAN T. Existence and Uniqueness of Solutions to Three-Point Boundary Value Problems [J]. Journal of Differential Equations，1973，13：197-212.

[3] GUPTA C P，LAKSHMIKANTHAM V. Existence and Uniqueness Theorems for a Third-Order Three-Point Boundary Value Problem [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，1991，16(11)：949-957.

[4] GUPTA C P，TROFIMCHUK S I. A Sharper Condition for the Solvability of a Three-Point Second Order Boundary Value Problem [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1997，205(2)：586-596.

[5] MA R Y. Positive Solutions for a Nonlinear Three-Point Boundary Value Problem [J]. Electronic Journal of Differential Equations，1999，1999：34-1-34-8.

[6] MA R Y. Multiplicity of Positive Solutions for Second-Order Three-Point Boundary Value Problems [J]. Computers and Mathematics with Applications，2001，40(2/3)：193-204.

[7] 马如云. 非线性常微分方程非局部问题[M]. 北京：科学出版社，2004：1-233.（MA R Y. Nonlocal Problems of Nonlinear Ordinary Differential Equations [M]. Beijing ：Science Press，2004：1-233.）

[8] BAI Z B，GE W G. Existence of Three Positive Solutions for Some Second-Order Boundary Value Problems [J]. Computers and Mathematics with Applications，2004，48(5/6)：699-707.

[9] WEBB J R L，INFANTE G. Positive Solutions of Nonlocal Boundary Value Problems：A Unified Approach [J]. Journal of the London Mathematical Society，2006，74(2)：673-693.

[10] YANG L，SHEN C F，LIU X P. Existence of Three Positive Solutions for Some Second-Order m-Point Boundary

Value Problems [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica: English Series, 2008, 24(2): 253-264.
[11] WEBB J R L, INFANTE G. Semi-positone Nonlocal Boundary Value Problems of Arbitrary Order [J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2010, 9(2): 563-581.
[12] KONG Q K, St GEORGE T E. Existence of Nodal Solutions of Boundary Value Problems with Two Multi-point Boundary Conditions [J]. Dynamic Systems and Applications, 2014, 23(2/3): 245-263.
[13] KONG L J, KONG Q K, WONG J S W. Nodal Solutions of Multi-point Boundary Value Problems [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2010, 72(1): 382-389.
[14] RYNNE B P. Eigenvalue Criteria for Existence of Positive Solutions of Second-Order, Multi-point, p-Laplacian Boundary Value Problems [J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 2010, 36(2): 311-326.
[15] AKOREDE M B, ARAWOMO P O. Positive Solutions to a Nonlinear Three-Point Boundary Value Problem with Singularity [J]. Mathematical Journal of Okayama University, 2024, 66: 85-102.
[16] LIAN W, BAI Z B, DU Z J. Existence of Solution of a Three-Point Boundary Value Problem via Variational Approach [J]. Applied Mathematics Letters, 2020, 104: 106283-1-106283-8.
[17] 康聪聪. 一类非线性二阶三点边值问题正解的存在性与多解性 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2022, 60(6): 1259-1265. (KANG C C. Existence and Multiplicity of Positive Solutions for a Class of Nonlinear Second-Order Three-Point Boundary Value Problems [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2022, 60(6): 1259-1265.)
[18] WANG J. Existence and Multiplicity of Positive Solutions of Second-Order Three-Point Boundary Value Problems [J]. International Journal of Engineering and Applied Sciences, 2018, 5(6): 49-52.
[19] WANG C L, HAN X S, LI C H. Positive Solutions to Nonlinear Second-Order Three-Point Boundary-Value Problems for Difference Equation with Change of Sign [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2008, 28: 87-1-87-10.
[20] DU Z J. Positive Solutions for a Second-Order Three-Point Discrete Boundary Value Problem [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2008, 26(1/2): 219-231.
[21] GANIES R. Difference Equations Associated with Boundary Value Problems for Second Order Nonlinear Ordinary Differential Equations [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1974, 11: 411-434.
[22] RACHŮNKOVÁ I, TISDELL C C. Existence of Non-spurious Solutions to Discrete Boundary Value Problems [J]. The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 3(2): 1-9.
[23] RACHŮNKOVÁ I, TISDELL C C. Existence of Non-spurious Solutions to Discrete Dirichlet Problems with Lower and Upper Solutions [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2007, 67(4): 1236-1245.
[24] THOMPSON H B, TISDELL C C. The Nonexistence of Spurious Solutions to Discrete, Two-Point Boundary Value Problems [J]. Applied Mathematics Letters, 2003, 16(1): 79-84.
[25] AMOROSO E, CANDITO P, MAWHIN J. Existence of a Priori Bounded Solutions for Discrete Two-Point Boundary Value Problems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2023, 519(2): 126807-1-126807-18.
[26] BONANNO G, CANDITO P, D'AGUI G. Variational Methods on Finite Dimensional Banach Spaces and Discrete Problems [J]. Advanced Nonlinear Studies, 2014, 14(4): 915-939.
[27] SUN Y P. Optimal Existence Criteria for Symmetric Positive Solutions to a Three-Point Boundary Value Problem [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2007, 66(5): 1051-1063.
[28] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1984: 16. (GUO D J. Nonlinear Functional Analysis [M]. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 1984: 16.)

(责任编辑: 赵立芹)