

本质拟对称非负张量 H-谱半径的算法

林志兴, 吕洪斌

(福建省金融信息处理重点实验室(莆田学院), 福建 莆田 351100)

摘要: 首先, 定义一类本质拟对称非负张量, 其是涵盖本质正张量、弱正张量和广义弱正张量的更广泛的张量类. 其次, 应用张量的 H-特征值在对角相似变换下的不变性质, 给出本质拟对称非负张量 H-谱半径的算法, 并用数值例子说明算法的有效性.

关键词: 本质拟对称非负张量; H-谱半径; 算法

中图分类号: O183.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)02-0411-06

Algorithm for H-Spectral Radius of Essentially Quasi-symmetric Non-negative Tensors

LIN Zhixing, LÜ Hongbin

(Fujian Key Laboratory of Financial Information Processing (Putian University), Putian 351100, Fujian Province, China)

Abstract: Firstly, we defined a class of essentially quasi-symmetric non-negative tensors, which encompassed a broader class of tensors covering essentially positive tensors, weakly positive tensors and generalized weakly positive tensors. Secondly, we gave an algorithm for the H-spectral radius of an essentially quasi-symmetric non-negative tensor by applying the property that the H-eigenvalues of the tensor were invariant under diagonal similarity transformations, and used numerical examples to illustrate the effectiveness of the algorithm.

Keywords: essentially quasi-symmetric non-negative tensor; H-spectral radius; algorithm

张量是矩阵的一种高维推广, 在信号和图像处理、连续介质物理、数据挖掘和处理、非线性优化、物理学的弹性分析和高阶统计学等领域应用广泛^[1-3]. 一个 m 阶 n 维实张量是 n^m 个元素的多维数组

$$\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}), \quad a_{i_1 i_2 \dots i_m} \in \mathbb{R}, \quad i_j = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

用 $\mathbb{R}^{[m, n]}$ 表示实数域 \mathbb{R} 上的 m 阶 n 维张量的集合. 若 $a_{i_1 i_2 \dots i_m} \geq 0 (i_j = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m)$, 则称 \mathbf{A} 为非负张量, 记为 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$. 此外, 本文中 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 和 $\mathbb{R}_+^{n \times n}$ 分别表示复数域和实数域上的 $n \times n$ 阶矩阵及其非负矩阵集合, \mathbb{R}_+^n 和 \mathbb{R}_{++}^n 分别表示 n 维欧氏空间上的非负非零向量和正向量集合.

目前, 关于张量特征值的研究已有很多结果: $\text{Qi}^{[4]}$ 和 $\text{Lim}^{[5]}$ 分别定义了张量的特征值; 文献[6]给出了不可约非负张量 H-谱半径的 NQZ 算法; 文献[7]证明了算法对本质正张量的收敛性; 文献[8]提出了非负张量 H-谱半径的 LZI 算法, 并证明了 LZI 算法对一类不可约非负张量的收敛性; 文献[9]证明了弱正张量 H-谱半径 NQZ 算法的线性收敛性; 文献[10]给出了广义弱正张量的定义和 H-谱半径算法的线性收敛性; 文献[11]给出了弱本质不可约非负张量 H-谱半径的拟幂型算法. 本文定义一类本

收稿日期: 2024-07-12.

第一作者简介: 林志兴(1973—), 男, 汉族, 硕士, 教授, 从事矩阵理论及其应用的研究, E-mail: linzhixing@163.com. **通信作者简介:** 吕洪斌(1964—), 男, 汉族, 博士, 教授, 从事数值代数、矩阵理论及其应用的研究, E-mail: hbinlv@126.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 61772292)、福建省自然科学基金(批准号: 2023J01997)和莆田市科技项目(批准号: 2023SZ3001PTXY17).

质拟对称非负张量, 并给出不可约本质拟对称非负张量 H-谱半径的对角相似算法.

1 相关定义与结果

定义 1^[12] 设 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m, n]}$, 若有非空真子集 $J \subset \langle n \rangle = \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $a_{i_2 \dots i_m} = 0, i \in J, i_2, \dots, i_m \in \langle n \rangle \setminus J$, 则称张量 \mathbf{A} 是可约的, 否则称其为不可约的.

定义 2^[7] 设 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$, 则称 $\mathbf{M}(\mathbf{A}) = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ 是张量 \mathbf{A} 的优化矩阵, 其中 $a_{ij} = a_{j \dots j}, i, j \in \langle n \rangle$.

由定义 1 和定义 2 知, 若张量 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$ 的优化矩阵 $\mathbf{M}(\mathbf{A})$ 是不可约的, 则 \mathbf{A} 是不可约张量.

定义 3^[7, 9-10] 设 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$, $\mathbf{M}(\mathbf{A}) = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ 是张量 \mathbf{A} 的优化矩阵. 若 $a_{ij} > 0 (i, j \in \langle n \rangle)$, 则称 \mathbf{A} 是本质正张量; 若 $a_{ij} > 0 (i, j \in \langle n \rangle, i \neq j)$, 则称 \mathbf{A} 是弱正张量; 若存在 $i_0 \in \langle n \rangle$, 使得 $a_{i_0 j} > 0, a_{j i_0} > 0 (i_0, j \in \langle n \rangle, j \neq i_0)$, 则称 \mathbf{A} 是广义弱正张量.

本文推广本质正张量、弱正张量和广义弱正张量类, 定义一类本质拟对称非负张量, 并给出其 H-特征值的算法.

定义 4 设 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$, $\mathbf{M}(\mathbf{A}) = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ 是张量 \mathbf{A} 的优化矩阵. 若 $a_{ij} > 0 \Leftrightarrow a_{ji} > 0 (i \neq j)$, 则称 \mathbf{A} 是本质拟对称非负张量; 若 $\mathbf{M}(\mathbf{A})$ 是不可约的, 则称 \mathbf{A} 是不可约本质拟对称非负张量.

由定义 4 知, 本质正张量、弱正张量和广义弱正张量均是特殊的本质拟对称非负张量类, 其与本原张量和不可约非负张量之间的包含关系如图 1 所示.

定义 5^[4-5] 设 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m, n]}$, 若存在 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和非零向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 使得

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^{m-1} = \lambda \mathbf{x}^{[m-1]},$$

则 λ 称为张量 \mathbf{A} 的特征值, \mathbf{x} 为张量 \mathbf{A} 的相应于特征值 λ 的特征向量, 其中 $\mathbf{A}\mathbf{x}^{m-1}$ 和 $\mathbf{x}^{[m-1]}$ 为 n 维向量, 它们的第 i 个元素分别为

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}^{m-1})_i = \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^n a_{i i_2 \dots i_m} x_{i_2} \dots x_{i_m}, \quad (\mathbf{x}^{[m-1]})_i = x_i^{m-1}.$$

若 λ 和 \mathbf{x} 的元素都是实的, 则 λ 称为张量 \mathbf{A} 的 H-特征值, \mathbf{x} 称为相应于特征值 λ 的 H-特征向量. 本文用 $\sigma_H(\mathbf{A})$ 表示张量 \mathbf{A} 的 H-特征值集合, $\rho(\mathbf{A}) = \max_{\lambda \in \sigma_H(\mathbf{A})} |\lambda|$ 称为张量 \mathbf{A} 的 H-谱半径.

定义 6^[13] 设 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m, n]}$, $\mathbf{B} = (b_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m, n]}$, 如果存在对角可逆矩阵 $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得 $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-(m-1)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}$, 则称张量 \mathbf{A}, \mathbf{B} 是对角相似的, 其中 $b_{i_1 i_2 \dots i_m} = a_{i_1 i_2 \dots i_m} d_{i_1}^{-(m-1)} d_{i_2} \dots d_{i_m}, i_j = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$.

定理 1^[13] 设 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m, n]}$, $\mathbf{B} = (b_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m, n]}$, 如果张量 \mathbf{A}, \mathbf{B} 是对角相似的, 则 $\sigma_H(\mathbf{A}) = \sigma_H(\mathbf{B})$.

类似于非负矩阵, 非负张量的 H-谱半径有如下基本性质.

定理 2^[12] 设 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$, 则:

- 1) $\rho(\mathbf{A})$ 是张量 \mathbf{A} 的特征值, 且 $\rho(\mathbf{A})$ 有相应的非负特征向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, 如果不计倍数, 则 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ 是唯一的;
- 2) 若张量 \mathbf{A} 是不可约的, 则 $\rho(\mathbf{A})$ 有相应的正特征向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{++}^n$.

Chang 等^[12] 将关于非负矩阵谱半径上下界的经典 Perron-Frobenius 定理推广到非负张量上, 得到

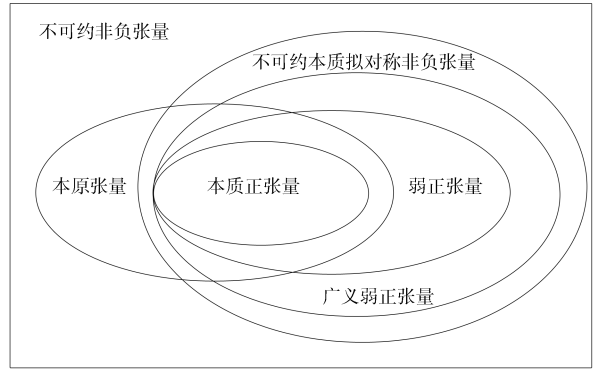


图 1 非负张量类的包含关系

Fig. 1 Inclusion relations of non-negative tensor classes

如下结果:

定理 3^[12] 设张量 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$, 则

$$\min_{i \in \langle n \rangle} r_i(\mathbf{A}) \leq \rho(\mathbf{A}) \leq \max_{i \in \langle n \rangle} r_i(\mathbf{A}),$$

其中 $r_i(\mathbf{A}) = \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^n a_{i i_2 \dots i_m}$, $i \in \langle n \rangle$.

设矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 记 \mathbf{A} 的有向图^[14]为 $\Gamma(\mathbf{A})$. 如果 i_1, i_2, \dots, i_{r+1} 互不相同, 且 $a_{i_i i_{s+1}} \neq 0$ ($s=1, 2, \dots, r$), 则称 $e_{i_1 \rightarrow i_{r+1}}$ 是 $\Gamma(\mathbf{A})$ 上的有向路径, 并称 r 是有向路径 $e_{i_1 \rightarrow i_{r+1}}$ 的长度.

定义 7^[14] 设矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\Gamma(\mathbf{A})$ 是 \mathbf{A} 的有向图. 如果对任意两个不同的结点 $i, j \in \langle n \rangle$ 都有 i 到 j 的有向路径, 则称有向图 $\Gamma(\mathbf{A})$ 是强连通的.

定理 4^[14] 设矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则 \mathbf{A} 是不可约的当且仅当 \mathbf{A} 的有向图 $\Gamma(\mathbf{A})$ 是强连通的.

2 算法构造

设张量 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$, 取 $-\min_{i \in \langle n \rangle} a_{i \dots i} < \theta < \max_{i \in \langle n \rangle} r_i(\mathbf{A})$, 记 $\mathbf{A} := \mathbf{A}^{(0)} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}^{(0)})_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^n$. 对

$k=0, 1, 2, \dots$, 记

$$r_i^{(k)} = \sum_{i_2, \dots, i_m \in \langle n \rangle} a_{i i_2 \dots i_m}^{(k)}, \quad \bar{r}^{(k)} = \max_{i \in \langle n \rangle} r_i^{(k)}, \quad r_-^{(k)} = \min_{i \in \langle n \rangle} r_i^{(k)},$$

$$\mathbf{D}_k = \frac{1}{(\bar{r}^{(k)} + \theta)^{1/(m-1)}} [\text{diag}(r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \dots, r_n^{(k)}) + \theta \mathbf{I}]^{1/(m-1)},$$

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = (\mathbf{D}_k)^{-(m-1)} \cdot \mathbf{A}^{(k)} \cdot \mathbf{D}_k,$$

其中 \mathbf{I} 为单位矩阵. 则有非负张量 H-谱半径的如下算法.

算法 1

设张量 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$, $\epsilon > 0$, $k=0$.

步骤 1) 计算 $r_i^{(k)} = \sum_{i_2, \dots, i_m \in \langle n \rangle} a_{i i_2 \dots i_m}^{(k)}$, $\bar{r}^{(k)} = \max_{i \in \langle n \rangle} r_i^{(k)}$, $r_-^{(k)} = \min_{i \in \langle n \rangle} r_i^{(k)}$.

步骤 2) 如果 $|\bar{r}^{(k)} - r_-^{(k)}| < \epsilon$, 转步骤 3); 否则, 记

$$\mathbf{D}_k = \frac{1}{(\bar{r}^{(k)} + \theta)^{1/(m-1)}} [\text{diag}(r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \dots, r_n^{(k)}) + \theta \mathbf{I}]^{1/(m-1)},$$

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = (\mathbf{D}_k)^{-(m-1)} \cdot \mathbf{A}^{(k)} \cdot \mathbf{D}_k.$$

令 $k := k + 1$, 转步骤 1).

步骤 3) 输出 $\rho(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\bar{r}^{(k)} + r_-^{(k)})$.

3 算法的收敛性

下面证明算法 1 对不可约本质拟对称非负张量 H-谱半径的计算是收敛的.

引理 1 设张量 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$, 则 $\bar{r}^{(k)}$ 单调递增有上界, $r_-^{(k)}$ 单调递减有下界.

证明: 应用定理 3 和定理 1, 对任意的 $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, 有

$$\begin{aligned} r_-^{(0)} \leq \bar{r}^{(k+1)} &= \max_{i \in \langle n \rangle} r_i^{(k+1)} = \max_{i \in \langle n \rangle} \frac{\sum_{i_2, \dots, i_m \in \langle n \rangle} (a_{i i_2 \dots i_m}^{(k)} + \theta)(r_{i_2}^{(k)} + \theta)^{1/(m-1)} \cdot \dots \cdot (r_{i_m}^{(k)} + \theta)^{1/(m-1)}}{r_i^{(k)} + \theta} - \theta \leq \\ &= \frac{(\bar{r}^{(k)} + \theta) \sum_{i_2, \dots, i_m \in \langle n \rangle} (a_{i i_2 \dots i_m}^{(k)} + \theta)}{r_i^{(k)} + \theta} - \theta = \bar{r}^{(k)}, \end{aligned}$$

因此, $\bar{r}^{(k)}$ 单调递减有下界. 类似可证 $r_-^{(k)}$ 单调递增有上界. 证毕.

引理 2 设 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$ 是不可约本质拟对称张量, 则对任意的 $k \in \mathbb{Z}^+$ 和任意的 $a_{i_j \dots j}^{(0)} > 0$ ($i \neq j$), 有

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij\dots j}^{(k)} \geq a := \underline{a}^2 / \bar{r}^{(0)} > 0,$$

其中 $\underline{a} = \min\{a_{ij\dots j} > 0 : i, j \in \langle n \rangle, i \neq j\}$.

证明: 显然, 对任意的 $k \in \mathbb{Z}^+$, 若 $a_{ij\dots j} > 0$, 则 $a_{ij\dots j}^{(k)} > 0$. 由引理 1 有

$$\bar{r}^{(0)} \geq \bar{r}^{(k)} \geq a_{ij\dots j}^{(k)} = a_{ij\dots j}^{(k-1)} \cdot \frac{r_j^{(k-1)} + \theta}{r_i^{(k-1)} + \theta} = \dots = a_{ij\dots j}^{(0)} \cdot \frac{\prod_{t=0}^{k-1} (r_j^{(t)} + \theta)}{\prod_{t=0}^{k-1} (r_i^{(t)} + \theta)} \geq \underline{a} \cdot \frac{\prod_{t=0}^{k-1} (r_j^{(t)} + \theta)}{\prod_{t=0}^{k-1} (r_i^{(t)} + \theta)}, \quad (1)$$

从而有 $\frac{\prod_{t=0}^{k-1} (r_j^{(t)} + \theta)}{\prod_{t=0}^{k-1} (r_i^{(t)} + \theta)} \leq \frac{\bar{r}^{(0)}}{\underline{a}}$. 又由 $\frac{\prod_{t=0}^{k-1} (r_j^{(t)} + \theta)}{\prod_{t=0}^{k-1} (r_i^{(t)} + \theta)} \cdot \frac{\prod_{t=0}^{k-1} (r_i^{(t)} + \theta)}{\prod_{t=0}^{k-1} (r_j^{(t)} + \theta)} = 1$ 及 $a_{\bar{i}\bar{i}\dots\bar{i}} > 0$, 有 $\frac{\prod_{t=0}^{k-1} (r_j^{(t)} + \theta)}{\prod_{t=0}^{k-1} (r_i^{(t)} + \theta)} \geq$

$\underline{a}^2 / \bar{r}^{(0)}$, 再由式(1)有 $a_{ij}^{(k)} = a_{ij\dots j}^{(k)} \geq a := \underline{a}^2 / \bar{r}^{(0)} > 0$. 证毕.

定理 5 设 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$ 是不可约本质拟对称张量, 则对 $\forall k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, 由算法 1 有

$$\bar{r}^{((k+1)n)} - \underline{r}^{((k+1)n)} \leq \alpha (\bar{r}^{(kn)} - \underline{r}^{(kn)}),$$

其中 $0 < \alpha = 1 - \left(\frac{a_0}{\bar{r}^{(0)} + \theta}\right)^n < 1$, $a_0 := \min_{i \in \langle n \rangle} \{a, a_{\bar{i}\bar{i}\dots\bar{i}} + \theta\} > 0$, 进而有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{r}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{r}^{(k)} = \rho(\mathbf{A})$.

证明: 设 $\underline{r}^{(0)} < \bar{r}^{(0)}$, 否则, 由定理 3 知 $\underline{r}^{(0)} = \bar{r}^{(0)} = \rho(\mathbf{A})$. 由张量序列 $\{\mathbf{A}^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ 的构造过程知, 当 $a_{i_1 i_2 \dots i_m}^{(0)} \neq 0$ 时, $a_{i_1 i_2 \dots i_m}^{(k)} \neq 0, \forall i_1, i_2, \dots, i_m \in \langle n \rangle; a_{i\dots i}^{(k)} = a_{i\dots i}^{(0)} = a_{i\dots i}, i \in \langle n \rangle$.

设 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$ 是不可约本质拟对称张量, 定义 $\mathbf{A}^{(k)} + \theta \mathbf{E} =: \tilde{\mathbf{A}}^{(k)} = (\tilde{a}_{i_1 i_2 \dots i_m}^{(k)}), k = 0, 1, 2, \dots$, 其中 $\mathbf{E} \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$ 是单位张量. 则由引理 2 知, 对任意的 $a_{ij\dots j} > 0, i, j \in \langle n \rangle, k \in \mathbb{Z}^+$, 有 $\tilde{a}_{ij\dots j}^{(k)} \geq a_0 > 0$.

取 $i_0 \in E_0 = \{i \in \langle n \rangle : r_i(\mathbf{A}) = \min_{i \in \langle n \rangle} r_i(\mathbf{A})\}$, 则有

$$\begin{aligned} r_{i_0}^{(1)} &= \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^n a_{i_0 i_2 \dots i_m}^{(1)} = \bar{r}^{(0)} - \sum_{i_2, \dots, i_m=1}^n \tilde{a}_{i_0 i_2 \dots i_m}^{(0)} \frac{(\bar{r}^{(0)} + \theta) - \prod_{l=2}^m (r_{i_l}^{(0)} + \theta)^{1/(m-1)}}{r_{i_0}^{(0)} + \theta} \leq \\ &\bar{r}^{(0)} - \tilde{a}_{i_0 i_0 \dots i_0}^{(0)} \frac{(\bar{r}^{(0)} + \theta) - (r_{i_0}^{(0)} + \theta)}{r_{i_0}^{(0)} + \theta} \leq \bar{r}^{(0)} - \frac{a_0}{\bar{r}^{(0)} + \theta} \cdot (\bar{r}^{(0)} - \underline{r}^{(0)}). \end{aligned} \quad (2)$$

类似地, 利用式(2)并依次推导可得

$$r_{i_0}^{(t)} \leq \bar{r}^{(0)} - \left(\frac{a_0}{\bar{r}^{(0)} + \theta}\right)^t (\bar{r}^{(0)} - \underline{r}^{(0)}), \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

对任意的 $i \in \langle n \rangle \setminus E_0$, 由 \mathbf{A} 是不可约本质拟对称张量知, $\Gamma(\mathbf{M}(\mathbf{A}))$ 是强连通的, 故存在 $a_{i_1 i_0 \dots i_0} > 0, a_{i_2 \tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_1} > 0, \dots, a_{i_{r-1} \tilde{i}_{r-2} \dots \tilde{i}_{r-2}} > 0, a_{\tilde{i}_{r-1} \tilde{i}_{r-1} \dots \tilde{i}_{r-1}} > 0$, 其中 $i_0, \tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{r-1}, i$ 互不相同, 且 $r \leq n-1$. 由式(3)有

$$\begin{aligned} r_{i_1}^{(2)} &\leq \bar{r}^{(0)} - \tilde{a}_{i_1 i_0 \dots i_0}^{(1)} \frac{(\bar{r}^{(0)} + \theta) - (r_{i_0}^{(1)} + \theta)}{r_{i_1}^{(1)} + \theta} \leq \bar{r}^{(0)} - \frac{a_0}{\bar{r}^{(0)} + \theta} \cdot (\bar{r}^{(0)} - r_{i_0}^{(1)}) < \\ &\bar{r}^{(0)} - \left(\frac{a_0}{\bar{r}^{(0)} + \theta}\right)^2 (\bar{r}^{(0)} - \underline{r}^{(0)}). \end{aligned} \quad (4)$$

类似地, 利用式(4)并依次推导可得

$$\begin{aligned} r_{i_{r-1}}^{(t)} &\leq \bar{r}^{(0)} - a_{i_{r-1} \tilde{i}_{r-2} \dots \tilde{i}_{r-2}}^{(t-1)} \frac{(\bar{r}^{(0)} + \theta) - (r_{\tilde{i}_{r-2}}^{(t-1)} + \theta)}{r_{i_{r-1}}^{(t-1)} + \theta} \leq \bar{r}^{(0)} - \frac{a_0}{\bar{r}^{(0)} + \theta} \cdot (\bar{r}^{(0)} - r_{\tilde{i}_{r-2}}^{(t-1)}) < \\ &\bar{r}^{(0)} - \left(\frac{a_0}{\bar{r}^{(0)} + \theta}\right)^t (\bar{r}^{(0)} - \underline{r}^{(0)}), \quad t = 3, 4, \dots, n. \end{aligned}$$

从而有 $r_i^{(n)} \leq \bar{r}^{(0)} - \left(\frac{a_0}{\bar{r}^{(0)} + \theta}\right)^n (\bar{r}^{(0)} - \underline{r}^{(0)})$. 于是有

$$\bar{r}^{(n)} - \underline{r}^{(n)} \leq \max_{i \in \langle n \rangle} r_i^{(n)} - \underline{r}^{(n)} \leq \left(1 - \left(\frac{a_0}{\bar{r}^{(0)} + \theta}\right)^n\right) (\bar{r}^{(0)} - \underline{r}^{(0)}).$$

类似上述证明, 对任意的 $k \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$\bar{r}^{(kn)} - \underline{r}^{(kn)} \leq \left(1 - \left(\frac{\alpha_0}{\bar{r}^{(0)} + \theta}\right)^n\right) (\bar{r}^{((k-1)n)} - \underline{r}^{((k-1)n)}) \leq \dots \leq \left(1 - \left(\frac{\alpha_0}{\bar{r}^{(0)} + \theta}\right)^n\right)^k (\bar{r}^{(0)} - \underline{r}^{(0)}).$$

由于 $0 < \alpha := 1 - \left(\frac{\alpha_0}{\bar{r}^{(0)} + \theta}\right)^n < 1$, 应用引理 1 并令 $k \rightarrow \infty$, 则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{r}^{(kn)} - \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{r}^{(kn)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{r}^{(kn)} - \underline{r}^{(kn)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha^k (\bar{r}^{(0)} - \underline{r}^{(0)})) = 0,$$

即 $\rho(\mathbf{A}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{r}^{(kn)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{r}^{(kn)}$. 证毕.

注 1 算法 1 中引入了参数 θ , 相当于一个移位算法, 在设计上是有意义的. 同时, 参数 θ 在其取值范围内对算法的计算效率有一定影响, 但还不能从理论上说明 θ 的最优取值.

注 2 定理 5 的条件是非负张量 \mathbf{A} 是不可约本质拟对称的, 但条件过于严格. 事实上, 若记 $\mathbf{M}(\mathbf{A}) = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, 只要有矩阵 $\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{A}) = (\tilde{\alpha}_{ij}) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, 使得矩阵 $\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{A})$ 拟对称且不可约, 则由定理 5

的证明即知算法 1 收敛, 其中 $\tilde{\alpha}_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \text{ 或 } 0, & a_{ij} \neq 0, \\ 0, & a_{ij} = 0. \end{cases}$

例如, 对于张量 $\mathbf{A} = (a_{ijk}) \in \mathbb{R}_+^{[3,4]}$, 设 $\mathbf{M}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 其余元素任意非负, 取 $\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{A}) =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{A})$ 是拟对称的, 此时算法 1 收敛.

注 3 设 $\mathbf{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}_+^{[m, n]}$ 是不可约本质拟对称张量, 则由算法 1 知, $\mathbf{x} = \left(\prod_{k=1}^m \mathbf{D}^{(k)}\right) \mathbf{e}$ 即为 $\rho(\mathbf{A})$ 对应的正特征向量, 其中 $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}_+^n$.

4 数值算例

下面用实例比较算法 1 和 LZI 算法^[8]的计算效率.

例 1 设张量 $\mathbf{A} = (a_{ijk}) \in \mathbb{R}_+^{[3, n]}$, 其中 $a_{ijj} = (i+j)/(2i)$, $j = i+1$, $i = j+1$, $i, j = 1, 2, \dots, n-1$, 其余元素为零, 则有

$$\mathbf{M}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{2n-1}{2(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2n-1}{2n} & 0 \end{pmatrix},$$

因此, \mathbf{A} 是不可约本质拟对称非负张量. 用算法 1 (取 $\theta = (\bar{r}^{(0)} - \underline{r}^{(0)})/2 = 0.25$) 和 LZI 算法分别计算 $\rho(\mathbf{A})$ 的迭代步数和 CPU 时间, 比较结果列于表 1. 由表 1 可见, 计算例 1 的非负张量 H-谱半径的算法 1 迭代次数明显少于 LZI 算法, 但在 CPU 用时上有些不足.

综上所述, 本文定义的本质拟对称非负张量类, 是本质正张量、弱正张量和广义弱正张量类的有益推广, 给出的 H-谱半径的带有参数变换的算法, 解决了某些非负张量 H-谱半径 NQZ 算法^[6]不收敛、LZI 算法^[8]不能直接计算的问题, 说明了参数选择对算法计算效率的影响, 并比较了其于 LZI 算法的效率, 数值计算结果表明本文算法是有意义的.

表 1 算法 1 和 LZI 算法计算 $\rho(A)$ 的性能对比
 Table 1 Performance comparison of $\rho(A)$ calculation by algorithm 1 and LZI algorithm

n	$\rho(A)$	算法 1		LZI 算法 ^[8]	
		迭代次数	t_{CPU}/s	迭代次数	t_{CPU}/s
5	1.770 1	78	0.015 7	59	0.007 7
10	1.934 4	151	0.048 8	211	0.036 9
20	1.982 7	547	0.304 1	750	0.253 4
30	1.992 2	1 157	1.760 0	1 582	1.394 8
40	1.995 6	1 970	6.451 5	2 691	4.797 7
50	1.997 2	2 977	17.867 4	4 064	13.276 8

参 考 文 献

- [1] CICHOCKI A, MANDIC D P, PHAN A H, et al. Tensor Decompositions for Signal Processing Applications: From Two-Way to Multiway Component Analysis [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2015, 32(2): 145-163.
- [2] SCHULTZ T, SEIDEL H P. Estimating Crossing Fibers: A Tensor Decomposition Approach [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2008, 14(6): 1635-1642.
- [3] QI L Q, WANG Y J, WU E X. D -Eigenvalues of Diffusion Kurtosis Tensors [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 221(1): 150-157.
- [4] QI L Q. Eigenvalues of a Real Supersymmetric Tensor [J]. Journal of Symbolic Computation, 2005, 40(6): 1302-1324.
- [5] LIM L H. Singular Values and Eigenvalues of Tensors: A Variational Approach [C]//1st IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-sensor Adaptive Processing. Puerto Vallarta, Mexico: [s. n.], 2005: 129-132.
- [6] NG M, QI L Q, ZHOU G L. Finding the Largest Eigenvalue of a Nonnegative Tensor [J]. SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications, 2009, 31(3): 1090-1099.
- [7] PEARSON K J. Essentially Positive Tensors [J]. International Journal of Algebra, 2010, 4(9/10/11/12): 421-427.
- [8] LIU Y J, ZHOU G L, IBRAHIM N F. An Always Convergent Algorithm for the Largest Eigenvalue of an Irreducible Nonnegative Tensor [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 235(1): 286-292.
- [9] ZHANG L P, QI L Q, XU Y. Linear Convergence of the LZI Algorithm for Weakly Positive Tensors [J]. Journal of Computational Mathematics, 2012, 30(1): 24-33.
- [10] ZHANG J L, BU C J. An Iterative Method for Finding the Spectral Radius of an Irreducible Nonnegative Tensor [J]. Computational & Applied Mathematics, 2021, 40(1): 8-1-8-14.
- [11] LIU G M, LÜ H B. An Algorithm for the Spectral Radius of Weakly Essentially Irreducible Nonnegative Tensors [J]. Calcolo, 2024, 61(1): 8-1-8-19.
- [12] CHANG K C, PEARSON K, ZHANG T. Perron-Frobenius Theorem for Nonnegative Tensors [J]. Communications in Mathematical Sciences, 2008, 6(2): 507-520.
- [13] SHAO J Y. A General Product of Tensors with Applications [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2013, 439(8): 2350-2366.
- [14] HORD R A, JOHNSON C R. Matrix Analysis [M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2014: 399-400.

(责任编辑:赵立芹)