doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024284

近可积 Hamilton 系统拟有效稳定性的推广

李宏田[1]，左　平[2]，张博森[3]
(1. 中国刑事警察学院 基础部，沈阳 110854；
2. 三亚学院 新能源与智能网联汽车学院，海南 三亚 572022；
3. 吉林大学 数学学院，长春 130012)

摘要： 考虑对近可积 Hamilton 系统拟有效稳定性进行推广. 在 KAM(Kolmogorov-Arnold-Moser)型非退化条件下，给出近可积广义 Hamilton 系统和 Poisson 系统的拟有效稳定性定理，与一般的 Hamilton 系统不同，所讨论的广义 Hamilton 系统和 Poisson 系统的作用变量和角变量一般可以具有不同的维度.

关键词： 拟有效稳定性；近可积广义 Hamilton 系统；Poisson 系统；KAM 型非退化条件
中图分类号： O175.1　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671-5489(2025)02-0340-07

Generalisation of Quasi-effective Stability for Nearly Integrable Hamiltonian Systems

LI Hongtian[1], ZUO Ping[2], ZHANG Bosen[3]
(1. *Department of Foundation*, *Criminal Investigation Police University of China*, *Shenyang* 110854, *China*;
2. *School of New Energy and Intelligent Networked Automobile*, *University of Sanya*, *Sanya* 572022, *Hainan Province*, *China*; 3. *College of Mathematics*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*)

Abstract: We considered extending the quasi-effective stability for nearly integrable Hamiltonian systems. We gave the quasi-effective stability theorems for nearly integrable generalized Hamiltonian systems and Poisson systems under the KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) type non-degenerate condition. Unlike the general Hamiltonian systems, the action variables and angular variables of the generalized Hamiltonian systems and Poisson systems under discussion could generally have different dimensions.

Keywords: quasi-effective stability; nearly integrable generalized Hamiltonian system; Poisson system; KAM type non-degenerate condition

Hamilton 系统是继 Newton 力学、Lagrange 力学后又一重要的力学分析体系. KAM(Kolmogorov-Arnold-Moser)理论[1-3]是研究 Hamilton 系统或其他近可积保守系统拟周期运动存在性的重要理论，Wayne[4]将经典 KAM 理论推广到了无穷维空间中. KAM 理论目前已成为研究无穷维 Hamilton 系统的重要工具，并在研究波动方程、梁方程、Schrödinger 方程等问题[5-7]上也应用广泛. 在 Hamilton 系统下，近可积 Hamilton 系统的稳定性是备受关注的问题，其中最著名的理论是 KAM

收稿日期： 2024-07-12.　**网络首发日期：** 2024-11-08.
第一作者简介： 李宏田(1986—)，男，满族，博士，讲师，从事非线性系统稳定性的研究，E-mail: lihongtian@cipuc.edu.cn. **通信作者简介：** 左　平(1967—)，女，汉族，博士，教授，从事图像处理、数值解及非线性系统稳定性的研究，E-mail: 363509677@qq.com.
基金项目： 辽宁省自然科学基金(批准号：20180550271)和三亚学院人才引进项目(批准号：USYRC23-17).
网络首发地址： https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20241107.1527.001.

理论和 Nekhoroshev 理论．目前，近可积 Hamilton 系统稳定性的研究大多数是针对其中某一种稳定性进行稳定条件的弱化或对 Hamilton 系统进行推广．本文考虑两种稳定性之间的联系，并对近可积 Hamilton 系统进行推广．

KAM 稳定性说明了在某些 KAM 型非退化条件下，近可积 Hamilton 系统相空间中的大多数轨道是永恒稳定的；Nekhoroshev 稳定性是指在某些陡性条件以及拟凸条件下，Hamilton 系统相空间的所有轨道在指数长时间内是稳定的．虽然近可积 Hamilton 系统的 KAM 稳定性和 Nekhoroshev 稳定性成立所满足的条件不同，但轨道的稳定性结论却相似，只不过前者是永恒稳定，后者是指数长时间稳定．Cong 等[8-9]研究了 KAM 理论和 Nekhoroshev 理论之间的联系，证明了在满足某些 KAM 型非退化条件下，近可积 Hamilton 系统和保体积映射的相空间上存在一个几乎满测度的开子集，使得起始点位于该开子集上的所有轨道都是 Nekhoroshev 稳定的，并且将这种稳定性定义为拟有效稳定性．

1　预备知识与主要结果

考虑标准 Hamilton 系统

$$\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{y}}\\ \dot{\boldsymbol{x}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}\nabla H(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

$$H(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=N(\boldsymbol{y})+\epsilon P(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\epsilon), \tag{2}$$

其中：$\boldsymbol{y}\in G\subset\mathbb{R}^n$ 是作用变量；$\boldsymbol{x}\in\mathbb{T}^n$ 是角变量；$\mathbb{T}^n=\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z}^n)$是通常的 n 维环面；G 为有界闭区域；N 和 P 为定义在 $G\times\mathbb{T}^n$ 上的实解析函数；ϵ 为扰动参数；$\boldsymbol{I}=(I_{ij})$为结构矩阵，是 G 上反对称的光滑矩阵函数，满足 Jacobi 恒等式

$$\sum_m\left(I_{im}\frac{\partial I_{jk}}{\partial \boldsymbol{z}_m}+I_{jm}\frac{\partial I_{ki}}{\partial \boldsymbol{z}_m}+I_{km}\frac{\partial I_{ij}}{\partial \boldsymbol{z}_m}\right)=0,\quad \boldsymbol{z}\in G\times\mathbb{T}^n,\quad \forall\, i,j,k.$$

结构矩阵 $\boldsymbol{I}$ 为

$$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}. \tag{3}$$

定义 1[8]　若对任意的 $\epsilon\in(0,\epsilon_0]$，都存在正参数 $\alpha,\gamma,c,\epsilon_0,d$ 满足以下条件：

1）$D_\epsilon=\text{meas }D-O(\epsilon^d)$；

2）对所有$(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{x}_0)\in D_\epsilon\times\mathbb{T}^n$，当$|t|\leqslant\exp\{c\epsilon^{-\alpha}\}$时，都满足

$$|\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{y}_0|\leqslant c\epsilon^{\gamma}.$$

则称 Hamilton 系统(1)具有拟有效稳定性．

定义 2[9]　若存在正常数 a,b,c,d,ϵ_0 及定义在 $G\times\mathbb{T}^n$ 上的函数 $\boldsymbol{\omega}_{**}$，使得当$|t|\leqslant\exp\{c\varepsilon^{-\alpha}\}$时，对任意的 $\epsilon\in[0,\epsilon_0]$，都有$|\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{y}_0|\leqslant c\epsilon^b$ 和$|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_0-t\boldsymbol{\omega}_{**}(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{x}_0)|\leqslant c\epsilon^d$，则起始点称为$(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{x}_0)$的轨道$(\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{x}(t))$具有近不变环面性质．

文献[8]证明了标准 Hamilton 系统的拟有效稳定性，其证明框架如图 1 所示，根据文献[10]，有广义 Hamilton 系统的不变环面和拟有效稳定性定理．

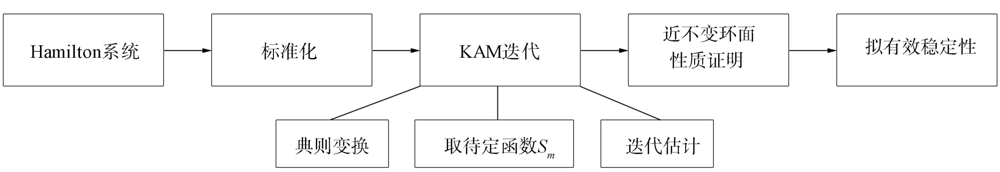

图 1　标准 Hamilton 系统拟有效稳定性证明的框架

Fig. 1　Framework of proving quasi-effective stability for standard Hamiltonian systems

考虑广义 Hamilton 系统，即作用变量和角变量不同维度的情况，设系统(1)中作用变量 $\boldsymbol{y}\in G\subset\mathbb{R}^l$，角变量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{T}^m$，$\mathbb{T}^m=\mathbb{R}^m/(2\pi\mathbb{Z}^m)$，则结构矩阵 $\boldsymbol{I}$ 可化为如下形式：

$$I=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & B^{\mathrm{T}}\\ -B & C\end{pmatrix},\tag{4}$$

其中$\mathbf{0}=\mathbf{0}_{l,l}$为零矩阵，$B=B_{l,m}$，$C^{\mathrm{T}}=-C$，满足$l\leqslant m$且$l+m$为偶数. 若不然，则结构矩阵$I$为奇异矩阵.

下面给出本文的主要结果.

定理1 如果广义Hamilton系统(1)-(4)满足以下条件：

$$\max\left\{\|y\|,\|\epsilon P\|,\|N\|,\|I\|,\|\omega\|,\left\|\frac{\partial\omega}{\partial y}\right\|\right\}\leqslant M,\tag{5}$$

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)=r,\tag{6}$$

$$\operatorname{rank}\left\{\omega,\frac{\partial^{\alpha}\omega}{\partial y^{\alpha}}:\ \forall\alpha\in\mathbb{Z}_{+}^{l},\ 0<|\alpha|\leqslant m-r+1\right\}=m,\qquad\forall y\in\operatorname{Re}(G+\rho),\tag{7}$$

则广义Hamilton系统(1)-(4)具有拟有效稳定性，其中$|\cdot|$和$\|\cdot\|$分别表示欧氏范数和上确界范数，$\dfrac{\partial^{\alpha}\omega}{\partial y^{\alpha}}=\left(\dfrac{\partial^{\alpha}\omega_1}{\partial y^{\alpha}},\cdots,\dfrac{\partial^{\alpha}\omega_m}{\partial y^{\alpha}}\right)^{\mathrm{T}}$.

2 近可积广义Hamilton系统的近不变环面性质

定理2 若$\omega(y_0)$满足小除数条件

$$|\langle k,\omega(y_0)\rangle|\geqslant\alpha|k|^{-\tau},\qquad\forall k\in\mathbb{Z}^{m}\backslash\{\mathbf{0}\},\tag{8}$$

且存在正常数ϵ_0，使得当$0<\epsilon<\epsilon_0$时，存在y_0的邻域O_ϵ，满足任意的$(y_*,x_*)\in O_\epsilon\times\mathbb{T}^m$，则起始点为$(y_*,x_*)$的轨道$(y(t),x(t))$具有近不变环面性质.

定理3 若系统(1)-(4)满足式(5)～(7)，并且对任意给定的$\omega(y_0)$，均满足以下小除数条件：

$$|\langle k,\omega(y_0)\rangle|\geqslant\alpha|k|^{-\tau},\quad\forall k\in\mathbb{Z}^{m},\quad 0<|k|\leqslant L(\kappa),\tag{9}$$

其中α,τ为正常数，$L(\kappa)$为截断的阶数，则存在一个仅依赖于M,K,τ,δ,α以及κ的常数ϵ_0满足$\epsilon_0=\left(\dfrac{4\alpha\kappa^{\tau+3}}{35Mc_5}\right)^2$，使得对任意的$\epsilon\in(0,\epsilon_0)$，均存在$\mathscr{O}(0,1)\times\mathbb{T}^m$上的坐标变换$\Phi_*$：

$$\begin{cases}x=x,\\ y=y_0+\sqrt{\epsilon}Y,\end{cases}$$

将Hamilton系统(2)化为

$$H\circ\Phi_*\circ\Psi=N_*+\sqrt{\epsilon}P_{**},$$

$$N_*(y,\epsilon)=\langle\omega(y_0),y\rangle+O(\sqrt{\epsilon}),$$

$$\omega_*(y,\epsilon)=\frac{\partial N_*}{\partial y}(y,\epsilon)=\omega(y_0)+O(\sqrt{\epsilon}),$$

$$\|P_{**}\|\leqslant c_1\sqrt{\epsilon}\exp\left\{-\frac{c_2}{\kappa}\right\}.$$

对所有的$(y(0),x(0))\in O(y_0,\epsilon)\times\mathbb{T}^m$，当$|t|\leqslant c_1\exp\left\{\dfrac{c_2}{4\kappa}\right\}$时，存在不变环面

$$\hat{y}(t)=y(0),\qquad\hat{x}(t)=x(0)+\omega_{**}(y_0,y(0),x(0),\epsilon)t\ (\mathrm{mod}\ 2\pi),\tag{10}$$

使得以$(y(0),x(0))$为起始点的轨道$(y(t),x(t))$满足

$$|y(t)-\hat{y}(t)|\leqslant c_3\sqrt{\epsilon},\qquad|x(t)-\hat{x}(t)|\leqslant c_4\sqrt{\epsilon},$$

其中$\omega_{**}(y_0,y(0),x(0),\epsilon)=\omega(y_0)+O(\sqrt{\epsilon})$，$c_1,c_2,c_3,c_4$为正常数.

下面证明定理2.

2.1 标准化

对系统(2)进行标准化，做变换Φ_*：$(\mathscr{O}(0,1)\times\mathbb{T}^m)+\rho\rightarrow(O(y_0,\epsilon)\times\mathbb{T}^m)+\rho$，令

$$\boldsymbol{Y}=\frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0}{\sqrt{\epsilon}},\qquad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x},$$

则 Hamilton 系统(2)化为

$$\hat{H}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})=\frac{N(\boldsymbol{y}_0)}{\sqrt{\epsilon}}+\langle\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{y}_0),\boldsymbol{Y}\rangle+O(\sqrt{\epsilon}\boldsymbol{Y}^2)+\sqrt{\epsilon}P_*(\boldsymbol{y}_0+\sqrt{\epsilon}\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X},\epsilon).$$

不失一般性，取 $H(\boldsymbol{y}_0)=0$，$\varepsilon=\sqrt{\epsilon}$，$\boldsymbol{\omega}_0=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{y}_0)$，

$$P_0(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}_0,\varepsilon)=O(\boldsymbol{Y}^2)+P_*(\boldsymbol{y}_0+\varepsilon\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X},\varepsilon^2),$$

则 Hamilton 系统(2)可化为

$$\hat{H}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})=\langle\boldsymbol{\omega}_0,\boldsymbol{Y}\rangle+\epsilon P_0(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}_0,\varepsilon).$$

简记$\langle\boldsymbol{\omega}_0,\boldsymbol{Y}\rangle=\langle\boldsymbol{\omega}_0,\boldsymbol{y}\rangle$，$\epsilon P_0(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X},\boldsymbol{y}_0,\varepsilon)=\varepsilon P_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$，则有

$$\hat{H}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\langle\boldsymbol{\omega}_0,\boldsymbol{y}\rangle+\varepsilon P_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}),\tag{11}$$

系统(1)-(4)改为如下形式：

$$\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{Y}}\\ \dot{\boldsymbol{X}}\end{pmatrix}=\hat{\boldsymbol{I}}\nabla\hat{H}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}),\tag{12}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{I}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}(\varepsilon\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{y}_0)$.

2.2　KAM 迭代

设实解析函数 P 为

$$P(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^m}P_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}\rangle},$$

记

$$\bar{P}(\boldsymbol{y})=P_0(\boldsymbol{y}),$$
$$\widetilde{P}_L(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^m,\ 0<|\boldsymbol{k}|\leqslant L}P_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{y})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}\rangle},$$
$$R_LP(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^m,\ |\boldsymbol{k}|>L}P_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{y})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}\rangle}.$$

由文献[10]取具有如下形式的 Hamilton 流 ϕ_{j+1}^t：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_{j+1}^t=\varepsilon\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}\nabla S_j(\phi_{j+1}^t),\tag{13}$$

做辛变换 $\phi_{j+1}^1=\Phi_{j+1}D_{j+1}\to D_j$，由 Cauchy 积分公式有

$$\begin{aligned}H_{j+1}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=H_j\circ\Phi_{j+1}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=N_j(\boldsymbol{y},\varepsilon)+\varepsilon\bar{P}_j(\boldsymbol{y},\varepsilon)+\\ \varepsilon^2\int_0^1(1-t)\{\{N_j,S_j\},S_j\}\circ\phi_{j+1}^t\mathrm{d}t+\varepsilon R_LP_j(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+\varepsilon\{\widetilde{N}_j,S_j\}+\\ \varepsilon^2\int_0^1\{P_j,S_j\}\circ\phi_{j+1}^t\mathrm{d}t+\varepsilon(\{N_0,S_j\}+\widetilde{P}_j).\end{aligned}\tag{14}$$

令

$$P_{j+1}:=P_{j+1}^1+P_{j+1}^2+P_{j+1}^3+P_{j+1}^4,\tag{15}$$

其中

$$P_{j+1}^1=\varepsilon\int_0^1(1-t)\{\{N_j,S_j\},S_j\}\circ\phi_{j+1}^t\mathrm{d}t,\tag{16}$$

$$P_{j+1}^2=R_LP_j,\tag{17}$$

$$P_{j+1}^3=\{\widetilde{N}_j,S_j\},\tag{18}$$

$$P_{j+1}^4=\varepsilon\int_0^1\{P_j,S_j\}\circ\phi_{j+1}^t\mathrm{d}t,\tag{19}$$

S_j 满足同调方程

$$\{N_0,S_j\}+\widetilde{P}_j=0.\tag{20}$$

取 $\sigma_0=\dfrac{1}{16}\kappa$，$\nu=\dfrac{7}{16}\kappa$，则由文献[8]，在 $D_{j-\kappa/2}$ 上有

$$\| P_{j+1}^2 \|_{D_{j}-\kappa/2} = \| R_L P_j \|_{D_j-\kappa/2} \leqslant \left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^n \frac{\| P_j \|}{\sigma_0^{n+1}} \mathrm{e}^{-L\nu} \leqslant \frac{1}{8} \| P_j \|_{D_j}, \tag{21}$$

进一步，可得

$$\| P_{j+1}^2 \|_{D_{j+1}} \leqslant \| P_{j+1}^2 \|_{D_j-2\kappa} \leqslant \frac{1}{8} \| P_j \|_{D_j}, \tag{22}$$

$$\| \nabla R_L P_j \|_{D_j-4\kappa} \leqslant \frac{1}{4\kappa} \| P_j \|_{D_j}. \tag{23}$$

考虑$(\boldsymbol{Y}_t,\boldsymbol{X}_t)=\phi_{j+1}^t(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$，由 Cauchy 积分公式，对任意的$(\boldsymbol{Y}_t,\boldsymbol{X}_t)\in D_j-2\kappa$，有

$$|(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{Y}_t,\boldsymbol{X}_t)| \leqslant \varepsilon \| \nabla S_j(\boldsymbol{Y}_t,\boldsymbol{X}_t) \|_{D_j-2\kappa} < \kappa. \tag{24}$$

若 ε 满足不等式

$$\frac{35Mc_5\varepsilon}{32\alpha\kappa^{\tau+3}} \leqslant \frac{1}{8}, \tag{25}$$

则由文献[8]知，$\| P_{j+1}^3 \|_{D_{j+1}}$，$\| P_{j+1}^4 \|_{D_{j+1}}$ 和 $\| P_{j+1}^1 \|_{D_{j+1}}$ 有如下估计：

$$\| P_{j+1}^3 \|_{D_{j+1}} \leqslant \| \{\widetilde{N}_j, S_j\} \|_{D_j-4\kappa} \leqslant \frac{1}{8} \| P_j \|_{D_j}, \tag{26}$$

$$\| P_{j+1}^4 \|_{D_{j+1}} \leqslant \varepsilon \| \{P_j, S_j\} \phi_{j+1}^t \|_{D_{j+1}} \leqslant \frac{1}{8} \| P_j \|_{D_j}, \tag{27}$$

$$\| P_{j+1}^1 \|_{D_{j+1}} \leqslant \varepsilon \| \nabla(P_j+(1-t)\{N_j,S_j\}) \|_{D_{j+1}} \| I \|_{D_0} \| \nabla S_j \|_{D_{j+1}} \leqslant \frac{1}{8} \| P_j \|_{D_j}. \tag{28}$$

综上，新扰动项 $\| P_{j+1} \|_{D_{j+1}}$ 在 D_{j+1} 上满足如下估计：

$$\| P_{j+1} \|_{D_{j+1}} \leqslant \| P_{j+1}^1 \|_{D_{j+1}} + \| P_{j+1}^2 \|_{D_{j+1}} + \| P_{j+1}^3 \|_{D_{j+1}} + \| P_{j+1}^4 \|_{D_{j+1}} \leqslant \frac{1}{2^{j+1}}M. \tag{29}$$

取 $D_0=(\mathscr{O}(0,1)\times\mathbb{T}^m)+\rho$，令 $\Psi=\Phi_1\circ\cdots\circ\Phi_J$，取 $D_J=(\mathscr{O}(0,1)\times\mathbb{T}^m)+\dfrac{1}{2}\rho\to D_0$，在 D_J 上有

$$H_J(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})=\hat{H}\circ\Psi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})=N_J(\boldsymbol{r},\varepsilon)+\varepsilon P_J(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta}), \tag{30}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\varepsilon\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\frac{\partial P_J}{\partial\boldsymbol{\theta}}, \tag{31}$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{\omega}_0-\boldsymbol{B}\left(\frac{\partial\widetilde{N}_J}{\partial\boldsymbol{r}}+\varepsilon\frac{\partial P_J}{\partial\boldsymbol{r}}\right)+\varepsilon\boldsymbol{C}\frac{\partial P_J}{\partial\boldsymbol{\theta}}. \tag{32}$$

由文献[8]知，对任意的 $|t|\leqslant\exp\left\{\dfrac{c_2}{4\kappa}\right\}$，有

$$|\boldsymbol{\theta}(t)-\boldsymbol{\omega}_*(\boldsymbol{r}(0),\varepsilon)\,t-\boldsymbol{\theta}(0)| \leqslant c_7\varepsilon\exp\left\{-\frac{c_2}{4\kappa}\right\}, \tag{33}$$

这里 $\boldsymbol{\omega}_*(\boldsymbol{r},\varepsilon)=\boldsymbol{\omega}_0+\dfrac{\partial\widetilde{N}_J}{\partial\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r},\varepsilon)$. 若 κ 充分小，则有

$$|\boldsymbol{Y}(t)-\boldsymbol{Y}(0)| \leqslant |\boldsymbol{Y}(t)-\boldsymbol{r}(t)|+|\boldsymbol{Y}(0)-\boldsymbol{r}(0)|+|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(0)| \leqslant c_7\varepsilon, \tag{34}$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{\omega}_*(\boldsymbol{r}(0),\varepsilon)t-\boldsymbol{X}(0)| \leqslant{}& |\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{\theta}(t)|+|\boldsymbol{\theta}(t)-\boldsymbol{\omega}_*(\boldsymbol{r}(0),\varepsilon)t-\boldsymbol{\theta}(0)|+\\ &|\boldsymbol{X}(0)-\boldsymbol{\theta}(0)| \leqslant c_8\varepsilon.\end{aligned} \tag{35}$$

令 $\Phi_*(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$，则有

$$(\boldsymbol{r}(0),\boldsymbol{\theta}(0))=\Psi^{-1}(\boldsymbol{Y}(0),\boldsymbol{X}(0))=\Psi^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{y}(0)-\boldsymbol{y}_0}{\sqrt{\epsilon}},\boldsymbol{x}(0)\right). \tag{36}$$

记

$$\boldsymbol{\omega}_{**}(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{y}(0),\boldsymbol{x}(0),\epsilon)=\boldsymbol{\omega}_*\left(\mathscr{B}\circ\Psi^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{y}(0)-\boldsymbol{y}_0}{\sqrt{\epsilon}},\boldsymbol{x}(0)\right),\sqrt{\epsilon}\right), \tag{37}$$

其中 $\mathscr{B}$ 表示将相空间映射到作用变量上的算子. 将式(36),(37)代入式(10),(34),(35)即完成了定理3的证明.

假设定理 3 的条件成立，若$(\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{x}(t))$以$(\boldsymbol{y}(0),\boldsymbol{x}(0))$为初值条件是广义 Hamilton 系统(1)-(4)的解，满足$|\boldsymbol{y}(0)-\boldsymbol{y}_*|<\frac{1}{2}\varepsilon$ 和 $\boldsymbol{x}(0)\in\mathbb{T}^m$，则当$|t|\leqslant\exp\left\{\frac{c_2}{4\kappa}\right\}$时，有

$$|\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{y}(0)|\leqslant c_3\varepsilon, \tag{38}$$

$$|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\omega}_{**}-\boldsymbol{x}(0)|\leqslant c_4\varepsilon. \tag{39}$$

由定义 2，轨道$(\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{x}(t))$具有近不变环面性质，此时 $O_\epsilon=|\boldsymbol{\omega}_{**}-\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{y}_0)|$，至此完成了定理 2 的证明.

3　广义 Hamilton 系统的拟有效稳定性

取 $\epsilon_0(\alpha)=\left(\frac{4\alpha}{35Mc_5}\right)^{2(\tau+4)}$，记

$$G^\tau_{\alpha,\boldsymbol{k}}=\{\boldsymbol{y}\in G:|\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{y})\rangle|\leqslant\alpha|\boldsymbol{k}|^{-\tau}\}, \tag{40}$$

$$G^\tau_\alpha=\bigcup_{0\neq\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^m}G^\tau_{\alpha,\boldsymbol{k}}. \tag{41}$$

由式(5)有

$$\mathrm{meas}(G^\tau_{\alpha,\boldsymbol{k}})=O(\alpha^{1/n}|\boldsymbol{k}|^{-(\tau+1)/n}), \tag{42}$$

根据文献[8]，有

$$G_*\triangleq\bigcup_{\epsilon>0}G_\epsilon=\bar{G}^\tau_\alpha=G\backslash G^\tau_\alpha. \tag{43}$$

对任意的 $\boldsymbol{y}_0\in G_*$，取

$$\alpha(\boldsymbol{y}_0)=\max\{\alpha:0<\alpha\leqslant1,|\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{y}_0)\rangle|\geqslant\alpha|\boldsymbol{k}|^{-\tau},\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^m\},$$

$$\epsilon(\boldsymbol{y}_0)=\min\{\alpha(\boldsymbol{y}_0)^{2(\tau+4)},\epsilon_0\}.$$

记 $O_\epsilon(\boldsymbol{y}_0)=O(\boldsymbol{y}_0,\epsilon)$，则由定理 2 知，当$|t|\leqslant c_1\exp\left\{\frac{c_2}{4}\epsilon^{-1/[2(\tau+4)]}\right\}$时，对所有的$(\boldsymbol{y}(0),\boldsymbol{x}(0))\in O_\epsilon(\boldsymbol{y}_0)\times\mathbb{T}^m$，均有

$$|\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{y}(0)|\leqslant c_3\epsilon^{1/2+1/[2(\tau+4)]}. \tag{44}$$

取

$$E_\epsilon=\bigcup_{\boldsymbol{y}_0\in\{\boldsymbol{y}\in G_*:\epsilon(\boldsymbol{y})\geqslant\epsilon\}}O_\epsilon(\boldsymbol{y}_0), \tag{45}$$

显然 E_ϵ 为 G 上的开子集，且满足测度估计：

$$\mathrm{meas}\,E_\epsilon=\mathrm{meas}\,G-O(\epsilon^{1/[2n(\tau+4)]}),\qquad\lim_{\epsilon\to0+}E_\epsilon=G_*.$$

至此完成了定理 1 的证明.

4　Poisson 系统的拟有效稳定性

上述讨论可应用于 Poisson 系统稳定性的问题中，根据文献[9]，令 $\epsilon_0(\nu)=\left(\frac{5M}{K^{2\nu+2}}\right)^2$，则有

$$\mathrm{meas}(G^\tau_{\alpha,\boldsymbol{k}})=O(\gamma^{1/n}|\boldsymbol{k}|^{-(\nu+1)/n}), \tag{46}$$

其中 $\nu>n(n-1)$. 由文献[9]中定理 4.1 知，当$|t|<\exp\{c_3\varepsilon^{-1/(\nu+2)})$时，有

$$|\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{y}(0)|<c_1\varepsilon^{1+1/(\nu+2)}. \tag{47}$$

此时满足测度估计：

$$\mathrm{meas}\,E_\epsilon=\mathrm{meas}\,G-O\left(\frac{1}{2n(\nu+2)}\right),\qquad\lim_{\epsilon\to0+}E_\epsilon=G_*.$$

5　拟有效稳定性应用展望

拟有效稳定性是用 KAM 型非退化条件代替 Nekhoroshev 陡性条件和拟凸条件，得到一个弱于 Nekhoroshev 有效稳定性的结论，从而避免了证明过程的复杂性，同时适用性较好. 如瞬态近可积 Hamilton 系统[11]、小扭转映射[12-13]都具有拟有效稳定性，刘柏枫等[14]证明了 Hamilton 系统低维不

变环面的保持性，可将该思想应用到无穷维 Hamilton 系统，得到其低维近不变环面性质定理，进而可得到梁方程、波动方程、Schrödinger 方程解的拟有效稳定性.

参考文献

[1] KOLMOGOROV A N. On Conservation of Conditionally Periodic Motions for a Small Change in Hamilton's Function [J]. Dokl Akad Nauk SSSR (N. S.), 1954, 98: 527-530.

[2] ARNOL'D V I. Proof of a Theorem by A. N. Komolgorov on the Invariance of Quasi-periodic Motions under Small Perturbations of the Hamiltonian [J]. Russ Math Surv, 1963, 18(5): 9-36.

[3] MOSER J. On Invariant Curves of Area-Preserving Mappings of an Annulus [J]. Matematika, 1962, 6(5): 51-68.

[4] WAYNE C E. Periodic and Quasi-periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations via KAM Theory [J]. Comm Math Phys, 1990, 127(3): 479-528.

[5] CHEN Y, GENG J S. A KAM Theorem for Higher Dimensional Wave Equations under Nonlocal Perturbation [J]. J Dynam Differential Equations, 2020, 32(1): 419-440.

[6] RUI J, ZHANG M, WANG Y. Kolmogorov-Arnold-Moser Theorem for Nonlinear Beam Equations with Almost-Periodic Forcing [J]. J Math Anal Appl, 2021, 493(2): 124529-1-124529-27.

[7] GENG J S, LOU Z W, SUN Y N. A KAM Theorem for Two Dimensional Completely Resonant Reversible Schrödinger Systems [J]. J Dynam Differential Equations, 2023, 35(2): 1611-1641.

[8] CONG F Z, HONG J L, LI H T. Quasi-effective Stability for Nearly Integrable Hamiltonian Systems [J]. Discrete Contin Dyn Syst (Ser B), 2016, 21(1): 67-80.

[9] CONG F Z, HONG J L, HAN Y L. Near-Invariant Tori on Exponentially Long Time for Poisson Systems [J]. J Math Anal Appl, 2007, 334(1): 59-68.

[10] ZHAO X F, LI Y. KAM in Generalized Hamiltonian Systems with Multi-scales [J]. J Dynam Differential Equations, 2023, 35(4): 2971-2995.

[11] CONG F Z, HAO T C, FENG X. Quasi-effective Stability for Time-Dependent Nearly Integrable Hamiltonian Systems [J]. J Nonlinear Sci Appl, 2019, 12(11): 711-719.

[12] 李宏田，所彧乔. 高维小扭转映射不变环面的存在性 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2022，60(1)：15-19. (LI H T, SUO Y Q. Existence of Invariant Tori for Small Twist Mappings with Higher Dimensions [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2022, 60(1): 15-19.)

[13] 李宏田. 小扭转映射的拟有效稳定性 [J]. 东北师大学报(自然科学版)，2021，53(3)：26-29. (LI H T. Quasi-effective Stability for Small Torsional Mappings [J]. Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition), 2021, 53(3): 26-29.)

[14] 刘柏枫，韩月才，祝文壮. Hamilton 系统低维不变环面的保持性 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2003，41(4)：411-418. (LIU B F, HAN Y C, ZHU W Z. The Persistence of Lower Dimensional Tori in Hamiltonian Systems [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2003, 41(4): 411-418.)

(责任编辑：赵立芹)