

# 一类完全四阶非线性常微分方程 边值问题正解的存在性

胡万民, 韩晓玲

(西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070)

**摘要:** 用 Leray-Schauder 不动点定理, 研究一类完全四阶非线性常微分方程

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)), & t \in [0, 1], \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = u'''(1) = 0, \end{cases}$$

其中  $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R}_+)$ . 在非线项  $f$  满足至多线性增长条件下证明其正解的存在性和唯一性结果; 在  $f$  满足超线性增长条件下, 引入一类 Nagumo 型条件限制  $f(t, x_0, x_1, x_2, x_3)$  在  $x_3$  上至多二次增长后得到其正解的存在性结果.

**关键词:** 完全四阶非线性边值问题; 正解; 存在性; 唯一性; Leray-Schauder 不动点定理; Nagumo 型条件

**中图分类号:** O175.8 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)03-0709-07

## Existence of Positive Solutions to Boundary Value Problems for a Class of Fully Fourth-Order Nonlinear Ordinary Differential Equations

HU Wanmin, HAN Xiaoling

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** By using Leray-Schauder fixed point theorem, we study a class of fully fourth-order nonlinear ordinary differential equations

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)), & t \in [0, 1], \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = u'''(1) = 0, \end{cases}$$

where  $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R}_+)$ . The existence and uniqueness of the positive solutions are proven under the condition that the nonlinear term  $f$  grows at most linearly. Under the condition that  $f$  satisfies the superlinear growth, the existence of positive solutions are obtained by introducing a Nagumo-type condition to limit that  $f(t, x_0, x_1, x_2, x_3)$  is quadratical growth on  $x_3$  at most.

**Keywords:** fully fourth-order nonlinear boundary value problem; positive solution; existence; uniqueness; Leray-Schauder fixed point theorem; Nagumo-type condition

收稿日期: 2024-07-12.

第一作者简介: 胡万民 (1983—), 男, 汉族, 硕士研究生, 从事常微分方程边值问题及其应用的研究, E-mail: huwm318@126.com.

通信作者简介: 韩晓玲 (1978—), 女, 汉族, 博士, 教授, 从事常微分方程边值问题及其应用的研究, E-mail: hanxiaoling9@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12161079).

## 0 引言

四阶微分方程边值问题刻画了弹性梁在外力作用下的形变情况,而梁是建筑和工程中最基本的结构之一,因此,关于该问题的研究备受关注并取得了许多成果<sup>[1-13]</sup>.文献[1]给出了该问题 6 种常见的边值条件,文献[2-13]相继研究了带有这些边值条件的四阶边值问题,采用的方法主要有不动点理论<sup>[2-3,5,9,13]</sup>、不动点指数理论<sup>[6,12]</sup>、上下解方法<sup>[4,8,10-11]</sup>、单调迭代方法<sup>[4,11]</sup>、截断函数技巧<sup>[4,10-11]</sup>、Banach 压缩映射原理<sup>[7]</sup>等.

文献[2]考虑了边值问题(BVP):

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = g(t)f(u(t)), & t \in [0,1], \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = u'''(1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $f \in C([0, \infty), [0, \infty))$ ,  $g \in C([0, 1], [0, \infty))$  且  $\int_0^1 g(t)dt > 0$ , 在得到 BVP(1) 正解的先验估计后,用 Krasnosel'skii 不动点定理获得了 BVP(1) 解的存在性.文献[3]考虑了下列 BVP:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)), & t \in [0,1], \\ u(0) = A, \quad u'(0) = B, \quad u'(1) = C, \quad u'''(1) = D, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $f: [0, 1] \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  是 Carathéodory 函数,  $A, B, C, D > 0$ , 在考虑非线性项在某些有界集上的“高度”后,用 Schauder 不动点定理获得了 BVP(2) 解的存在性.文献[5]考虑了下列 BVP:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)), & t \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

其中  $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ , 用 Leray-Schauder 不动点定理获得了 BVP(3) 解的存在性.文献[10]用上下解方法获得了 BVP(3) 解的存在性.文献[12]在  $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$  条件下,用锥中的不动点指数理论获得了 BVP(3) 解的存在性.文献[6]考虑了下列 BVP:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)), & t \in [0,1], \\ u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

其中  $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+)$ , 用锥中的不动点指数理论获得了 BVP(4) 解的存在性.文献[7]在  $f$  满足 Lipschitz 条件下用 Banach 压缩映射原理获得了 BVP(4) 解的存在性和唯一性.文献[8]用上下解方法获得了 BVP(4) 解的存在性.文献[9]用 Leray-Schauder 不动点定理获得了 BVP(4) 解的存在性.文献[11]考虑了下列 BVP:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)), & t \in [0,1], \\ u(0) = u'(0) = u''(1) = 0, \quad u'''(1) = g(u(1)), \end{cases} \quad (5)$$

其中  $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ ,  $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , 用单调迭代和上下解方法获得了 BVP(5) 解的存在性.文献[13]用 Perov 不动点定理获得了 BVP(4) 和 BVP(5) 解的存在性和唯一性.

受上述研究工作的启发,本文主要考虑完全四阶非线性边值问题:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)), & t \in [0,1], \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = u'''(1) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

其中  $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R}_+)$ . 由于边值条件的特殊性,本文主要用 Leray-Schauder 不动点定理,在非线项  $f$  分别满足至多线性增长条件、Lipschitz 条件、超线性增长以及  $f(t, x_0, x_1, x_2, x_3)$  关于  $x_3$  满足一类 Nagumo 型条件下,证明 BVP(6) 正解的存在性.

## 1 预备知识

记  $I = [0, 1]$ . 用  $C(I)$  表示  $I$  上全体连续函数构成的 Banach 空间,其范数  $\|u\| = \max_{t \in I} |u(t)|$ ; 用  $C^n(I)$  表示  $I$  上全体  $n$  阶连续可微函数构成的 Banach 空间,其范数  $\|u\| = \max\{\|u\|_C, \|u'\|_C, \dots, \|u^{(n)}\|_C\}$ ; 用  $L^2(I)$  表示  $I$  上全体 Lebesgue 平方可积函数构成的 Banach 空间,其范数  $\|u\|_2 =$

$\left(\int_0^1 |u(t)|^2 dx\right)^{1/2}$ ; 用  $H^n(I)$  表示 Soblev 空间, 其范数  $\|u\|_{n,2} = \left(\sum_{i=0}^n \|u^{(i)}\|_2^2\right)^{1/2}$ ,  $u \in H^n(I)$  表明  $u \in C^{n-1}(I)$ ,  $u^{(n-1)}(t)$  在  $I$  上绝对连续,  $u^{(n)} \in L^2(I)$ .

首先, 考虑 BVP(6)相应的线性边值问题(LBVP):

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = h(t), & t \in I, \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = u'''(1) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

**引理 1** 对  $\forall h \in L^2(I)$ , LBVP(7)有唯一解  $u := Sh \in H^4(I)$ , 且解算子  $S: L^2(I) \rightarrow H^3(I)$  是一个全连续算子.

证明: 对  $\forall h \in L^2(I)$ , 易验证 LBVP(7)有如下形式的解:

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s) ds := Sh(t), \quad t \in I, \tag{8}$$

其中  $G(t,s)$ 是相应的 Green 函数, 表达式为

$$G(t,s) = \frac{1}{12} \begin{cases} s^2(6t - 2s - 3t^2), & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t^2(6s - 2t - 3s^2), & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{9}$$

显然,  $\forall s, t \in I, G(t,s) \geq 0$ .

由式(8)和式(9)易得出算子  $S: L^2(I) \rightarrow H^4(I)$ 是线性有界算子. 此外, 由于嵌入  $H^4(I) \hookrightarrow C^3(I)$  是紧的, 嵌入  $C^3(I) \hookrightarrow H^3(I)$ 是连续的, 可得算子  $S: L^2(I) \rightarrow H^3(I)$ 是一个全连续算子.

**引理 2** 若  $\forall t \in I, h(t) \geq 0$ , 则 LBVP(7)的解  $u$  具有如下性质:

- 1)  $u(t) \geq 0, u'(t) \geq 0, u'''(t) \leq 0, t \in I$ ;
- 2)  $u''(0)u'''(0) \leq 0$ ;
- 3)  $u''(0)u''(1) \leq 0$ ;
- 4)  $\|u^{(i)}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u^{(i+1)}\|_2, i=0,1,2,3$ .

证明: 1) 证明过程参见文献[2]中引理 3. 1.

2) 由式(9)可得

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,s) = \frac{1}{2} \begin{cases} s^2(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t(2s-t-s^2), & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases} \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t,s) = \frac{1}{2} \begin{cases} -s^2, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ 2s-2t-s^2, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases} \tag{11}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} G(t,s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ -1, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases} \tag{12}$$

从而  $u''(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 (2s - s^2)h(s) ds, u'''(0) = - \int_0^1 h(s) ds$ . 因为对  $\forall s \in I$ , 有

$$2s - s^2 = s(2 - s) \geq 0, \tag{13}$$

所以

$$u''(0)u'''(0) \leq 0. \tag{14}$$

3) 由式(11)可得  $u''(1) = - \frac{1}{2} \int_0^1 s^2 h(s) ds$ . 结合式(13)可得  $u''(0)u''(1) \leq 0$ .

4) 考虑 LBVP(7)的边值条件, 利用 Hölder 不等式, 对  $\forall t \in I$ , 有

$$|u(t)| = \left| \int_0^t u'(s) ds \right| \leq \int_0^t |u'(s)| ds \leq \left( \int_0^t |u'(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left( \int_0^t 1 ds \right)^{1/2} \leq t^{1/2} \|u'\|_2,$$

从而

$$\|u\|_2 = \left( \int_0^1 |u(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left( \int_0^1 t \|u'\|_2^2 dt \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u'\|_2.$$

同理可得  $\|u'\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u''\|_2, \|u''\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u^{(4)}\|_2$ . 由 1) 可知,  $\forall t \in I, u'''(t) \leq 0$ . 结合 3) 可知,

$\exists t_0 \in I$ , 使得  $u''(t_0) = 0$ . 从而

$$u''(t) = \begin{cases} -\int_t^{t_0} u'''(s) ds, & t \in [0, t_0], \\ \int_{t_0}^t u'''(s) ds, & t \in (t_0, 1]. \end{cases}$$

由前述计算方法可得  $\|u''\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u'''\|_2$ .

**引理 3(Leray-Schauder 不动点定理)**<sup>[14]</sup> 设  $X$  是 Banach 空间,  $T: X \rightarrow X$  是全连续算子, 若同伦方程簇  $x = \lambda Tx (0 < \lambda < 1)$  的解集在  $X$  中有界, 则  $T$  在  $X$  中存在不动点.

本文假设条件:

(H<sub>0</sub>) 对  $\forall M > 0$ , 存在一个正函数  $H_M(\rho) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \setminus \{0\})$ , 满足

$$\int_0^{+\infty} \frac{\rho d\rho}{H_M(\rho)} = +\infty, \tag{15}$$

使得对  $\forall (t, x_0, x_1, x_2, x_3) \in I \times [-M, M]^3 \times \mathbb{R}$ , 下式成立:

$$|f(t, x_0, x_1, x_2, x_3)| \leq H_M(|x_3|); \tag{16}$$

(H<sub>1</sub>) 存在常数  $\tilde{\alpha} > 0, a_i \geq 0 (i=0, 1, 2, 3)$ , 满足  $\frac{a_0}{4} + \frac{a_1}{2\sqrt{2}} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{\sqrt{2}} < 1$ , 使得对  $\forall (t, x_0, x_1, x_2, x_3) \in I \times \mathbb{R}^4$ , 下式成立:

$$|f(t, x_0, x_1, x_2, x_3)| \leq a_0|x_0| + a_1|x_1| + a_2|x_2| + a_3|x_3| + \tilde{\alpha};$$

(H<sub>2</sub>) 存在常数  $a_i \geq 0 (i=0, 1, 2, 3)$ , 满足  $\frac{a_0}{4} + \frac{a_1}{2\sqrt{2}} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{\sqrt{2}} < 1$ , 使得对  $\forall t \in I, x_i, y_i \in \mathbb{R} (i=0, 1, 2, 3)$ , 下式成立:

$$|f(t, x_0, x_1, x_2, x_3) - f(t, y_0, y_1, y_2, y_3)| \leq \sum_{i=0}^3 a_i |x_i - y_i|;$$

(H<sub>3</sub>) 存在常数  $\tilde{b} > 0, b_i \geq 0 (i=0, 1, 2, 3)$ , 满足  $\frac{b_0}{8} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{2} + b_3 < 1$ , 使得对  $\forall (t, x_0, x_1, x_2, x_3) \in I \times \mathbb{R}^4$ , 下式成立:

$$-f(t, x_0, x_1, x_2, x_3)x_2 \leq \sum_{i=0}^3 b_i x_i^2 + \tilde{b}.$$

## 2 主要结果

**定理 1** 假设  $f \in C(I \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R}_+)$  且满足条件(H<sub>1</sub>), 则 BVP(6)至少有一个正解.

证明: 定义算子  $F: H^3(I) \rightarrow L^2(I)$ , 其中

$$F(u)(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)), \quad t \in I. \tag{17}$$

则算子  $F$  连续且将  $H^3(I)$  中的有界集映为  $L^2(I)$  中的有界集. 由引理 1 可知, 复合算子  $T := S \circ F: H^3(I) \rightarrow H^3(I)$  是全连续算子, 从而 BVP(6)的解等价于算子  $T$  的不动点. 下面证明算子  $T$  有不动点.

考虑同伦方程簇

$$u = \lambda Tu, \quad 0 < \lambda < 1. \tag{18}$$

设  $u \in H^3(I)$  是方程(18)的解, 则

$$u = \lambda Tu = \lambda SF(u) = S(\lambda F(u)).$$

记  $h = \lambda F(u)$ , 则  $u = Sh \in H^3(I)$  是 BVP(6)的唯一解, 且满足:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = \lambda f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)), & t \in I, \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = u'''(1) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

对方程(19)两端取范数  $\|\cdot\|_2$ , 再结合条件(H<sub>1</sub>)和引理 2 中 4)可得

$$\|u^{(4)}\|_2 = \lambda \|F(u)\|_2 \leq \|F(u)\|_2 \leq \sum_{i=0}^3 a_i \|u^{(i)}\|_2 + \tilde{\alpha} \leq$$

$$\left(\frac{a_0}{4} + \frac{a_1}{2\sqrt{2}} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{\sqrt{2}}\right) \|u^{(4)}\|_2 + \tilde{\alpha},$$

因此

$$\|u^{(4)}\|_2 \leq \frac{\tilde{\alpha}}{1 - \left(\frac{a_0}{4} + \frac{a_1}{2\sqrt{2}} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{\sqrt{2}}\right)} := C_0.$$

又由引理 2 中 4), 得

$$\|u\|_{3,2} = \left(\sum_{i=0}^3 \|u^{(i)}\|_2^2\right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)^{1/2} \|u^{(4)}\|_2 < \|u^{(4)}\|_2 \leq C_0. \quad (20)$$

表明方程(18)的解集在  $H^3(I)$  中有界. 根据引理 3, 算子  $T$  存在不动点  $u_0 \in H^3(I)$ , 由引理 2 中 1) 知,  $u_0$  即为 BVP(6) 的正解.

**定理 2** 假设  $f \in C(I \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R}_+)$  且满足条件  $(H_2)$ , 则 BVP(6) 有唯一正解.

证明: 令  $\tilde{\alpha} = \max_{t \in I} |f(t, 0, 0, 0, 0)| + 1$ , 由于条件  $(H_2)$  可以推出条件  $(H_1)$ , 因此由定理 1 可知 BVP(6) 至少有一个正解. 下面证明该解的唯一性.

设  $u_1, u_2$  是 BVP(6) 的任意两个正解, 则  $u_1 = S(F(u_1)), u_2 = S(F(u_2))$ . 记  $u = u_2 - u_1$ , 则  $u$  是 LBVP(7) 对于  $h = F(u_2) - F(u_1)$  的解. 根据  $(H_2)$  以及引理 2 中 4) 可得

$$\|u^{(4)}\|_2 = \|F(u_2) - F(u_1)\|_2 \leq \sum_{i=0}^3 a_{(i)} \|u_2^{(i)} - u_1^{(i)}\|_2 = \sum_{i=0}^3 a_i \|u^{(i)}\|_2 \leq \left(\frac{a_0}{4} + \frac{a_1}{2\sqrt{2}} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{\sqrt{2}}\right) \|u^{(4)}\|_2,$$

从而  $\|u^{(4)}\|_2 \left[1 - \left(\frac{a_0}{4} + \frac{a_1}{2\sqrt{2}} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{\sqrt{2}}\right)\right] \leq 0$ , 即  $\|u^{(4)}\|_2 \leq 0$ . 根据式 (20) 可得  $\|u\|_{3,2} \leq 0$ , 即  $u_1 = u_2$ . 因此 BVP(6) 有唯一正解.

**引理 4** 假设  $f \in C(I \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R}_+)$  且满足条件  $(H_0)$ . 若存在  $M > 0$ , 使得 BVP(6) 的解  $u$  满足  $\|u\|_{c^2} \leq M$ , 则存在  $M_1 = M_1(M) > 0$ , 使得  $\|u'''\|_c \leq M_1$ .

证明: 设  $M > 0$ , 由式 (15) 可知存在  $M_1 > 0$ , 满足

$$\int_0^{M_1} \frac{\rho d\rho}{H_M(\rho)} > 2M. \quad (21)$$

设  $u$  是 BVP(6) 的一个解, 且  $\|u\|_{c^2} \leq M$ , 下面验证  $\|u'''\|_c \leq M_1$ .

由引理 2 中 1) 可知  $u'''(t) \leq 0, t \in I$ . 根据 BVP(6) 及式 (16) 可得

$$u^{(4)}(t) = f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t)) \leq H_M(-u'''(t)), \quad t \in I,$$

则

$$-\frac{u'''(t)u^{(4)}(t)}{H_M(-u'''(t))} \leq -u'''(t), \quad t \in I. \quad (22)$$

对式 (22) 两边在  $[t, 1] (t \in [0, 1))$  上积分可得:

$$-\int_t^1 \frac{-u'''(s)d(-u'''(s))}{H_M(-u'''(s))} \leq -\int_t^1 u'''(s)ds = u''(t) - u''(1) \leq 2\|u''\|_c \leq 2\|u\|_{c^2} \leq 2M. \quad (23)$$

在不等式 (23) 左边做变量替换  $\rho = -u'''(t)$  可得  $\int_0^{-u'''(t)} \frac{\rho d\rho}{H_M(\rho)} \leq 2M$ , 因此  $\int_0^{\|u'''\|_c} \frac{\rho d\rho}{H_M(\rho)} \leq 2M$ . 再根据式 (21), 有  $\|u'''\|_c \leq M_1$ .

**定理 3** 假设  $f \in C(I \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R}_+)$  且满足条件  $(H_0), (H_3)$ , 则 BVP(6) 至少有一个正解.

证明: 定义算子  $F: C^3(I) \rightarrow C(I)$ , 其表达式为式 (17). 根据引理 1, 算子  $S: C(I) \rightarrow C^3(I)$  是全连续算子. 因此,  $T := S \circ F: C^3(I) \rightarrow C^3(I)$  是全连续算子, BVP(6) 的解等价于算子  $T$  的不动点.

考虑方程 (18). 令  $u \in C^3(I)$  是方程 (18) 的解, 记  $h = \lambda F(u)$ , 则  $u = Sh \in C^3(I)$  是 LBVP(7) 的唯一解, 从而满足方程 (19). 将方程 (19) 两边同乘以  $-u''(t)$  并结合  $(H_3)$  可得

$$\begin{aligned}
-u^{(4)}(t)u''(t) &= -\lambda f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t))u''(t) \leq \\
&\lambda(b_0(u(t))^2 + b_1(u'(t))^2 + b_2(u''(t))^2 + b_3(u'''(t))^2 + \check{b}) \leq \\
&b_0u^2(t) + b_1(u'(t))^2 + b_2(u''(t))^2 + b_3(u'''(t))^2 + \check{b}.
\end{aligned} \tag{24}$$

对不等式(24)两边在  $I$  上积分, 再结合引理 2 中 4) 可得

$$\begin{aligned}
\|u'''\|_{\frac{2}{2}} + u''(0)u'''(0) &\leq \sum_{i=0}^3 b_i \int_0^1 (u^{(i)}(t))^2 dt + \check{b} \leq \sum_{i=0}^3 b_i \|u^{(i)}\|_{\frac{2}{2}} + \check{b} \leq \\
&\left(\frac{b_0}{8} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{2} + b_3\right) \|u'''\|_{\frac{2}{2}} + \check{b}.
\end{aligned} \tag{25}$$

根据引理 2 中 2),  $\check{b} - u''(0)u'''(0) > 0$ , 再结合式(25)和(H<sub>3</sub>), 有

$$\|u'''\|_{\frac{2}{2}} \leq \frac{\check{b} - u''(0)u'''(0)}{1 - \left(\frac{b_0}{8} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{2} + b_3\right)} := M_0.$$

根据引理 2 中 4), 有

$$\|u\|_{3,2} = \left(\sum_{i=0}^3 \|u^{(i)}\|_{\frac{2}{2}}\right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right)^{1/2} \|u'''\|_{\frac{2}{2}} \leq \sqrt{2}M_0^{1/2}.$$

根据 Sobolev 嵌入  $H^3(I) \hookrightarrow C^2(I)$  的有界性可得

$$\|u\|_{C^2} \leq C \|u\|_{3,2} \leq \sqrt{2}CM_0^{1/2} := M, \tag{26}$$

其中  $C$  是  $H^3(I) \hookrightarrow C^2(I)$  的嵌入常数. 结合式(16)可得

$$|\lambda f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t))| \leq |f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t))| \leq H_M(|u'''(t)|).$$

从而由引理 4 可知, 存在  $M_1 = M_1(M) > 0$ , 使得  $\|u'''\|_C \leq M_1$ . 再结合式(26)可得

$$\|u\|_{C^3} = \max\{\|u\|_{C^2}, \|u'''\|_C\} \leq \max\{M, M_1\} := M_2.$$

表明方程(18)的解集在  $C^3(I)$  上有界, 根据引理 3, 算子  $T$  存在不动点  $u_0 \in C^3(I)$ , 即  $u_0$  为 BVP(6)的正解.

### 3 应用实例

**例 1** 考虑完全四阶边值问题:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = 2(\sin t)u^{1/2}(t) + t^2(u'(t))^{1/3} + 2t(u''(t))^{1/3} + e^{-t}|u'''(t)|^{1/3} + e^t, & t \in I, \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = u'''(1) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

相应地, 非线性项为

$$f(t, x_0, x_1, x_2, x_3) = 2(\sin t)x_0^{1/2} + t^2x_1^{1/3} + 2tx_2^{1/3} + e^{-t}|x_3|^{1/3} + e^t, \quad t \in I.$$

因为  $|x|^{1/2} \leq \frac{1}{4}|x| + 1, |x|^{1/3} \leq \frac{1}{4}|x| + \frac{5}{4}$ , 所以

$$f(t, x_0, x_1, x_2, x_3) \leq \frac{1}{2}|x_0| + \frac{1}{4}|x_1| + \frac{1}{2}|x_2| + \frac{1}{4}|x_3| + 7 + e.$$

令  $a_0 = a_2 = \frac{1}{2}, a_1 = a_3 = \frac{1}{4}, \check{\alpha} = 7 + e$ , 则  $\frac{a_0}{4} + \frac{a_1}{2\sqrt{2}} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{\sqrt{2}} = \frac{3+3\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} < 1$ , 即  $f$  满足条件(H<sub>1</sub>),

根据定理 1, BVP(27)至少有一个解.

**例 2** 考虑完全四阶边值问题:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = \frac{1}{2}(\sin t)u(t) + t^2u'(t) + 3(u''(t))^5 + \frac{1}{4}u''(t)(u'''(t))^2 + \sqrt{3}e^{-t}, & t \in I, \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = u'''(1) = 0. \end{cases} \tag{28}$$

相应地, 非线性项为

$$f(t, x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(\sin t)x_0 + t^2x_1 + 3x_2^5 + \frac{1}{4}x_2x_3^2 + \sqrt{3}e^{-t}.$$

显然,  $f$  关于  $x_3$  二次增长, 因此条件(H<sub>0</sub>)成立, 且

$$\begin{aligned}
-f(t, x_0, x_1, x_2, x_3)x_2 &= -\frac{1}{2}(\sin t)x_0x_2 - t^2x_1x_2 - 3x_2^6 - \frac{1}{4}x_2^2x_3^2 - \sqrt{3}e^{-t}x_2 \leq \\
&= \frac{1}{2}|x_0||x_2| + |x_1||x_2| + \sqrt{3}|x_2| = \\
&= 2 \cdot \frac{|x_0|}{2} \cdot \frac{|x_2|}{2} + 2 \cdot |x_1| \cdot \frac{|x_2|}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|x_2| = \\
&= \frac{1}{4}x_0^2 + x_1^2 + \frac{5}{4}x_2^2 + 1.
\end{aligned}$$

令  $b_0 = \frac{1}{4}$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = \frac{5}{4}$ ,  $b_3 = 0$ ,  $\tilde{b} = 1$ , 则  $\frac{b_0}{8} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{2} + b_3 = \frac{29}{32} < 1$ . 即  $f$  满足条件  $(H_3)$ , 根据定理 3, BVP(28)至少有一个解.

### 参 考 文 献

- [1] MA R Y. Existence and Uniqueness Theorems for Some Fourth-Order Nonlinear Boundary Value Problems [J]. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2000, 23(11): 783-788.
- [2] YANG B. Positive Solutions for the Beam Equation under Certain Boundary Conditions [J]. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2005, 2005: 78-1-78-8.
- [3] YAO Q L. An Existence Theorem of Nonlinear Elastic Beam Equations Fixed at Left and Clamped at Right by Sliding Clamps [J]. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, 2007, 9(2): 112-116.
- [4] BAI Z B. The Upper and Lower Solution Method for Some Fourth-Order Boundary Value Problems [J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2007, 67(6): 1704-1709.
- [5] LI Y X, LIANG Q Y. Existence Results for a Fully Fourth-Order Boundary Value Problem [J/OL]. *Journal of Function Spaces and Applications*, (2013-07-22)[2024-06-01]. <https://doi.org/10.1155/2013/641617>.
- [6] LI Y X. Existence of Positive Solutions for the Cantilever Beam Equations with Fully Nonlinear Terms [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2016, 27: 221-237.
- [7] ZOU Y M, CUI Y J. Uniqueness Result for the Cantilever Beam Equation with Fully Nonlinear Term [J]. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 2017, 10(9): 4734-4740.
- [8] LI Y X, GAO Y B. The Method of Lower and Upper Solutions for the Cantilever Beam Equations with Fully Nonlinear Terms [J/OL]. *Journal of Inequalities and Applications*, (2019-05-14)[2024-06-01]. <https://doi.org/10.1186/s13660-019-2088-5>.
- [9] LI Y X, CHEN X C. Solvability for Fully Cantilever Beam Equations with Superlinear Nonlinearities [J/OL]. *Boundary Value Problems*, (2019-04-29)[2024-06-01]. <https://doi.org/10.1186/s13661-019-1200-6>.
- [10] 陈雪春, 李永祥. 一类完全四阶边值问题解的存在性 [J]. *浙江大学学报(理学版)*, 2020, 47(2): 155-158. (CHEN X C, LI Y X. Existence of Solutions for a Class of Fully Fourth-Order Boundary Value Problems [J]. *Journal of Zhejiang University (Science Edition)*, 2020, 47(2): 155-158.)
- [11] WEI M, LI Y X, LI G. Lower and Upper Solutions Method to the Fully Elastic Cantilever Beam Equation with Support [J/OL]. *Advances in Difference Equations*, (2021-06-21)[2024-06-01]. <https://doi.org/10.1186/s13662-021-03402-z>.
- [12] LI Y X, MA W F. Existence of Positive Solutions for a Fully Fourth-Order Boundary Value Problem [J/OL]. *Mathematics*, (2022-08-25)[2024-06-01]. <https://doi.org/10.3390/math10173063>.
- [13] CHEN H L, CUI Y J. Existence and Uniqueness of Solutions to the Nonlinear Boundary Value Problem for Fourth-Order Differential Equations with All Derivatives [J/OL]. *Journal of Inequalities and Applications*, (2023-02-08)[2024-06-01]. <https://doi.org/10.1186/s13660-022-02907-9>.
- [14] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 2 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2001: 1-550. (GUO D J. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. 2nd ed. Jinan: Shandong Science and Technology Publishing House, 2001: 1-550.)

(责任编辑: 赵立芹)