

# 基于参数耦合的 Hamilton 系统分析与控制

付景超, 董禹佟

(东北电力大学 理学院, 吉林 吉林 132012)

**摘要:** 针对一类关于参数耦合的 Hamilton 系统, 研究其控制问题. 首先, 通过绘制系统的 Lyapunov 指数图、混沌吸引子图和时域波形图验证系统在一定参数条件下具有的复杂动力学行为; 其次, 分别用滑模控制法、自适应反推控制法和高频鲁棒控制法设计控制器, 将混沌系统的状态稳定至平衡点; 最后, 通过 MATLAB 软件数值仿真验证所设计控制器的有效性, 并对其控制效果进行比较.

**关键词:** 耦合 Hamilton 系统; 滑模控制; 自适应反推控制; 高频鲁棒控制; Lyapunov 指数

**中图分类号:** O415.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2026)02-0445-06

## Analysis and Control of Hamiltonian Systems Based on Parameter Coupling

FU Jingchao, DONG Yutong

(College of Science, Northeast Electric Power University, Jilin 132012, Jilin Province, China)

**Abstract:** The control problem of a class of Hamiltonian systems with parameter coupling was studied. Firstly, the complex dynamic behavior of the system under certain parameters was verified by drawing Lyapunov exponent diagram, chaotic attractor diagram and time domain waveform diagram. Secondly, sliding mode control method, adaptive backstepping control method and high frequency robust control method were used to design the controller, and the state of the chaotic system was stabilized to the equilibrium point. Finally, the effectiveness of the designed controller was verified by numerical simulation of MATLAB software, and its control effect was compared.

**Keywords:** coupled Hamiltonian system; sliding mode control; adaptive backstepping control; high frequency robust control; Lyapunov exponent

Hamilton 系统又称典型系统、正则系统或 Hamilton 典型系统(方程), 由于其可将动力学问题转化为一组代数方程, 因此避免了微分方程的求解过程, 极大简化了问题的求解难度.

耦合 Hamilton 系统在力学、物理学和工程力学等领域应用广泛, 已引起人们广泛关注: Hampton 等<sup>[1]</sup>研究了耦合 Hamilton 系统之间的测度同步; Yamaguchi<sup>[2]</sup>研究了全局耦合 Hamilton 系统中的弛豫和扩散现象; Vincent<sup>[3]</sup>研究了在耦合 Duffing Hamilton 系统中的测量同步; 赵红菊<sup>[4]</sup>研究了耦合 Hamilton 系统的动力学行为; Ojo<sup>[5]</sup>介绍了量子统计算子和经典的混沌 Hamilton 系统; 王颖<sup>[6]</sup>研究了变分法在非线性耦合 Hamilton 系统中的应用; 郑然然<sup>[7]</sup>研究了混合型弱耦合 Hamilton 系统的周期解问题; Zhang 等<sup>[8]</sup>用机器学习预测了耦合 Hamilton 系统中的测度同步.

目前混沌系统有较多控制方法, 如模糊控制<sup>[9-10]</sup>、自适应控制<sup>[11-12]</sup>、Backstepping 控制<sup>[13-14]</sup>和轨

收稿日期: 2024-07-30.

第一作者简介: 付景超(1977—), 男, 汉族, 博士, 副教授, 从事非线性动力系统分析和控制的研究, E-mail: neufujingchao@126.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12101112).

迹跟踪控制<sup>[15]</sup>等, 并已应用到图像加密学<sup>[16]</sup>、生物学<sup>[17]</sup>和电力学<sup>[18-19]</sup>等领域.

本文在参数耦合 Hamilton 系统<sup>[20]</sup>上进行研究, 分析该模型的动力学行为, 并应用滑模控制法、自适应反推控制法和高频鲁棒控制法设计控制器对系统进行控制, 使其稳定到平衡点. 最后, 通过数值仿真验证控制器的有效性, 并对控制效果进行比较.

### 1 参数耦合 Hamilton 系统

用 Hamilton 函数  $H = \frac{1}{2}[v^2 + u^2 + x^2 + y^2 + k(xy)^2]$  对 2 个线性振子  $\dot{x} = v, \dot{y} = u$  进行参数耦合, 其中  $k$  为耦合常数. 利用

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{1}$$

对  $H$  的各分量进行求导, 得到对应的动力学方程式为

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = -(1 + ky^2)x, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{u} = -(1 + kx^2)y. \end{cases} \tag{2}$$

系统(2)在  $k=1$  时是混沌的. 此时系统(2)可改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_1x_3^2, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -x_3 - x_3x_1^2, \end{cases} \tag{3}$$

其中  $x_1, x_2, x_3, x_4$  为状态变量.

系统的平衡点为  $O(0,0,0,0)$ . 经计算系统(3)的 4 个 Lyapunov 指数分别为

$$\begin{aligned} LE_1 &= 1.2527, & LE_2 &= 0.005, \\ LE_3 &= -0.005, & LE_4 &= -1.2527, \end{aligned}$$

其 Lyapunov 指数随时间变化曲线如图 1 所示. 由图 1 可见, 系统有混沌现象产生. 系统(3)的二维混沌吸引子和时域波形分别如图 2 和图 3 所示.

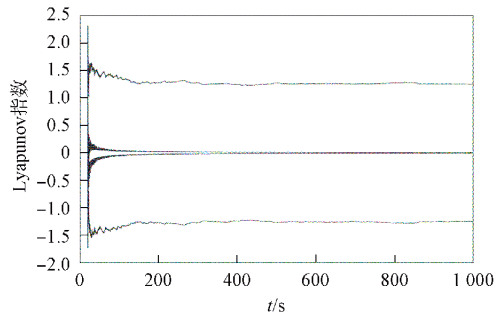


图 1 系统(3)的 Lyapunov 指数

Fig. 1 Lyapunov exponent of system (3)

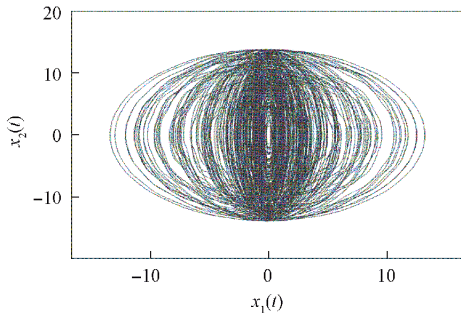


图 2 系统(3)的混沌吸引子

Fig. 2 Chaotic attractor of system (3)

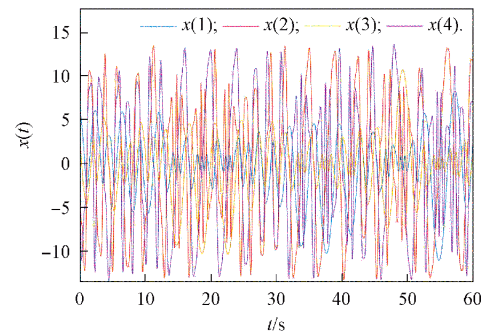


图 3 系统(3)的时域波形

Fig. 3 Time domain waveform of system (3)

### 2 参数耦合 Hamilton 系统滑模控制

#### 2.1 参数耦合 Hamilton 系统滑模控制器设计

引理 1<sup>[21]</sup> 对于受控系统

$$\dot{x} = f(x) + u, \tag{4}$$

采用趋近律

$$\dot{s} = -k \sinh^{-1}(a + b|s(x)|) \operatorname{sgn}(s(x)), \quad k > 0, \quad a \geq 0, \quad b > 0$$

设计控制器可使系统被控制到平衡点  $x_d$ .

**定理 1** 对于受控系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_1 x_3^2 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_4 + u_3, \\ \dot{x}_4 = -x_3 - x_3 x_1^2 + u_4, \end{cases} \quad (5)$$

施加滑模控制器

$$\begin{cases} u_1 = \dot{x}_{d1} - f(x) + k_1 e_1(t) + \varepsilon_1 \ln(\cdot) \operatorname{sgn}(e_1(t)), \\ u_2 = \dot{x}_{d2} - f(x) + k_2 e_2(t) + \varepsilon_2 \ln(\cdot) \operatorname{sgn}(e_2(t)), \\ u_3 = \dot{x}_{d3} - f(x) + k_3 e_3(t) + \varepsilon_3 \ln(\cdot) \operatorname{sgn}(e_3(t)), \\ u_4 = \dot{x}_{d4} - f(x) + k_4 e_4(t) + \varepsilon_4 \ln(\cdot) \operatorname{sgn}(e_4(t)), \end{cases} \quad (6)$$

可使其稳定到平衡点  $(0, 0, 0, 0)$ , 其中  $k_i > 0, \varepsilon_i > 0, e_i(t) = -x_i, \lim_{t \rightarrow \infty} x_i = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ .  $\ln(\cdot) = \ln(\sqrt{b|x_i|} + \sqrt{b|x_i| + 1})$  的函数值恒大于 0, 并且随自变量绝对值的减小而减小, 自变量绝对值越接近零, 斜率越大. 新型趋近律不仅引入指数部分, 使趋近滑模面阶段速度更快, 还引入系统状态量  $x_i$  的函数, 使趋近速度与系统状态  $|x_i|$  相关, 当  $|x_i|$  较大时,  $\ln(\cdot)$  较大, 此时按指数趋近律  $-k_i e_i(t)$  和变速趋近律  $-\varepsilon_i \ln(\cdot) \operatorname{sgn}(e_i(t))$  快速趋近滑模面, 趋近速度较大. 当系统状态接近滑模面时, 指数趋近律趋近速度近似为零, 变速趋近律起主要作用, 而滑模控制率的作用使状态  $x_i$  进入滑模面并向原点运动. 此时,  $-\varepsilon_i \ln(\cdot) \operatorname{sgn}(e_i(t))$  项逐渐减小,  $|x_i|$  趋越近于零, 其值减小越快, 系统的切换带越窄, 极大减小了系统的稳态抖振.

证明: 以  $\dot{x}_1 = x_2 + u$  为例, 令  $V(e(t)) = \frac{1}{2} e^2(t)$ , 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= e(t)\dot{e}(t) = e(t)(\dot{x}_d - x_2 - u) = e(t)[-ke(t) - \varepsilon \ln(\sqrt{b|x|} + \sqrt{b|x| + 1}) \times |e(t)|/e(t)] = \\ &= -ke^2(t) - \varepsilon \ln(\sqrt{b|x|} + \sqrt{b|x| + 1}) |e(t)| \leq -ke^2(t) = -2kV(e(t)), \end{aligned}$$

即  $\dot{V}(e(t)) + 2kV(e(t)) \leq 0$ , 引入  $S(t) > 0$ , 有  $\dot{V}(e(t)) + 2kV(e(t)) = -S(t)$ , 该一阶非齐次方程的解为  $V(e(t)) = V(e(0))e^{-2kt} - e^{-2kt} \int_0^t e^{2k\tau} S(\tau) d\tau$ . 由上述条件可知  $e^{-2kt} \int_0^t e^{2k\tau} S(\tau) d\tau > 0$ , 即有  $V(e(t)) \leq V(e(0))e^{-2kt}$ , 将  $V(e(t)) = \frac{1}{2} e^2(t)$  代入可得  $|e(t)| \leq |e(0)| e^{-kt}$ , 指数渐近稳定, 证毕.

### 2.2 数值仿真

对初值  $(6, -2, 2, 1)$ , 取  $k_i = 1, b_i = 1, \varepsilon_i = 1 (i = 1, 2, 3, 4)$ . 图 4 为受控系统(5)的时域波形. 变更控制器参数  $b_i = 1$  为  $b_i = 10 (i = 1, 2, 3, 4)$ , 在保持其他参数不变条件下, 仿照上述过程进行数值仿真, 结果如图 5 所示.

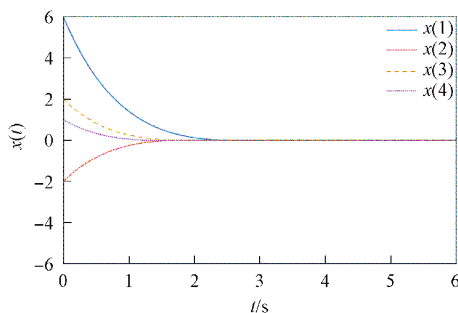


图 4 受控系统(5)的时域波形

Fig. 4 Time domain waveform of controlled system (5)

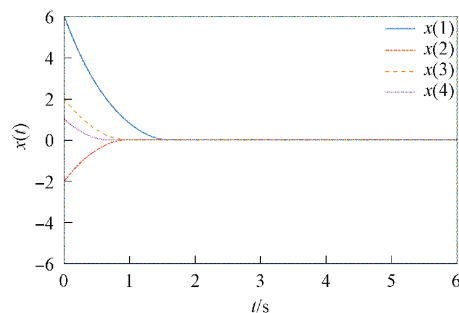


图 5 变更参数后受控系统(5)的时域波形

Fig. 5 Time domain waveform of controlled system (5) after changing parameters

### 3 参数耦合 Hamilton 系统自适应反推控制及高频鲁棒控制

#### 3.1 参数耦合 Hamilton 系统自适应反推控制器设计

对于受控系统(5),  $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$  为所需设计的控制器. 设系统(5)的状态被控制到  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, c_1 e_1, c_2 e_1 + c_3 e_2, \varphi)$ , 定义误差信号为

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - \alpha_1 = x_1, \\ e_2 = x_2 - \alpha_2 = x_2 - c_1 e_1, \\ e_3 = x_3 - \alpha_3 = x_3 - c_2 e_1 - c_3 e_2, \\ e_4 = x_4 - \alpha_4 = x_4 - \varphi. \end{cases} \quad (7)$$

将加入控制项后的系统代入受控系统(5)中, 可得到关于误差  $e_1, e_2, e_3, e_4$  的系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{x}_1 = c_1 e_1 + e_2 + u_1, \\ \dot{e}_2 = \dot{x}_2 - c_1 \dot{e}_1 = (-1 - c_1^2) e_1 - c_1 e_2 - c_2^2 e_1^3 - c_3^2 e_1 e_2^2 - \\ \quad 2c_2 c_3 e_1^2 e_2 - e_1 e_3^2 - 2c_2 e_1^2 e_3 - 2c_3 e_1 e_2 e_3 - c_1 u_1 + u_2, \\ \dot{e}_3 = \dot{x}_3 - c_2 \dot{e}_1 - c_3 \dot{e}_2 = (c_3 + c_1^2 c_3 - c_1 c_2) e_1 + (c_1 c_3 - c_2) e_2 + e_4 + \\ \quad c_2^2 c_3 e_1^3 + c_3^3 e_1 e_2^2 + 2c_2 c_3^2 e_1^2 e_2 + c_3 e_1 e_3^2 + 2c_2 c_3 e_1^2 e_3 + \\ \quad 2c_3^2 e_1 e_2 e_3 + (c_1 c_3 - c_2) u_1 - c_3 u_2 + u_3 + \varphi, \\ \dot{e}_4 = -c_2 e_1 - c_3 e_2 - e_3 - c_2 e_1^3 - c_3 e_1^2 e_2 - e_1^2 e_3 + u_4. \end{cases} \quad (8)$$

**定理 2** 施加自适应反推控制器

$$\begin{cases} u_1 = -e_2, \\ u_2 = (1 + c_1^2) e_1 - e_2 + c_2^2 e_1^3 + c_3^2 e_1 e_2^2 + 2c_2 c_3 e_1^2 e_2 + e_1 e_3^2 + 2c_2 e_1^2 e_3 + 2c_3 e_1 e_2 e_3, \\ u_3 = c_1 c_2 e_1 - c_3 e_2 - e_3 - e_4 - \varphi, \\ u_4 = c_2 e_1 + c_3 e_2 + e_3 - e_4 + c_2 e_1^3 + c_3 e_1^2 e_2 + e_1^2 e_3, \end{cases} \quad (9)$$

可使其稳定到平衡点  $(0, 0, 0, 0)$ .

证明: 令  $V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2)$ , 根据 Lyapunov 稳定性定理可知, 当且仅当  $c_1 < 0$  成立时,

$$\dot{V} = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + e_4 \dot{e}_4 = c_1 e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 - e_4^2 < 0.$$

此时误差系统渐近稳定到其零解, 原系统渐近稳定到平衡点  $(0, 0, 0, 0)$ .

#### 3.2 参数耦合 Hamilton 系统高频鲁棒控制控制器设计

**引理 2**<sup>[22]</sup> 对于受控系统(4), 控制器  $u$  可将系统控制到任意给定目标  $x_d$ , 其中

$$u = \dot{x}_d + k e(t) + \frac{\rho^2(x) e(t)}{\rho(x) |e(t)| + \varepsilon}, \quad k > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad |f(x)| < \rho(x), \quad e(t) = x_d - x.$$

**定理 3** 对于受控系统(5), 施加高频鲁棒控制器

$$\begin{cases} u_1 = k_1 e_1(t) + \frac{\rho_1^2(x) e_1(t)}{\rho_1(x) |e_1(t)| + \varepsilon_1}, \\ u_2 = k_2 e_2(t) + \frac{\rho_2^2(x) e_2(t)}{\rho_2(x) |e_2(t)| + \varepsilon_2}, \\ u_3 = k_3 e_3(t) + \frac{\rho_3^2(x) e_3(t)}{\rho_3(x) |e_3(t)| + \varepsilon_3}, \\ u_4 = k_4 e_4(t) + \frac{\rho_4^2(x) e_4(t)}{\rho_4(x) |e_4(t)| + \varepsilon_4}, \end{cases} \quad (10)$$

可使其稳定到平衡点  $(0, 0, 0, 0)$ , 其中  $e_i(t) = -x_i$ ,  $k_i > 0$ ,  $\varepsilon_i > 0 (i=1, 2, 3, 4)$ ,  $\rho_1(x) > |x_2|$ ,  $\rho_2(x) > |-x_1 - x_1 x_3^2|$ ,  $\rho_3(x) > |x_4|$ ,  $\rho_4(x) > |-x_3 - x_3 x_1^2|$ .

证明: 以  $\dot{x}_1 = x_2 + u$  为例, 令  $V(e(t)) = \frac{1}{2} e^2(t)$ , 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= e(t)\dot{e}(t) = e(t)(0 - x_2 - u) = e(t)\left(-x_2 - ke(t) - \frac{\rho^2(x)e(t)}{\rho(x)|e(t)| + \epsilon}\right) = \\ &= -ke^2(t) - e(t)x_2 - \frac{\rho^2(x)e^2(t)}{\rho(x)|e(t)| + \epsilon} \leq -ke^2(t) + |e(t)|\rho(x) - \frac{\rho^2(x)e^2(t)}{\rho(x)|e(t)| + \epsilon} = \\ &= -ke^2(t) + \epsilon \left[ \frac{\rho(x)e(t)}{\rho(x)|e(t)| + \epsilon} \right]. \end{aligned}$$

由  $0 \leq \frac{\rho(x)e(t)}{\rho(x)|e(t)| + \epsilon} \leq 1$ , 可得  $\dot{V}(e(t)) + ke^2(t) - \epsilon \leq 0$ , 即  $\dot{V}(e(t)) + 2kV(e(t)) - \epsilon \leq 0$ . 引入  $S(t) > 0$ , 有

$$\dot{V}(e(t)) + 2kV(e(t)) = \epsilon - S(t),$$

该一阶常系数线性微分方程的解为

$$V(e(t)) = V(e(0))e^{-2kt} + \epsilon e^{-2kt} \int_0^t e^{2k\tau} d\tau - e^{-2kt} \int_0^t e^{2k\tau} S(\tau) d\tau.$$

由  $e^{-2kt} > 0, \epsilon e^{-2kt} > 0, S(\tau) > 0$ , 有

$$V(e(t)) \leq V(e(0))e^{-2kt} + \frac{\epsilon}{2k}(1 - e^{-2kt});$$

再由  $V(e(t)) = \frac{1}{2}e^2(t)$ , 有

$$|e(t)| \leq \left[ |e(0)|e^{-2kt} + \frac{\epsilon}{k} - \frac{\epsilon}{k}e^{-2kt} \right]^{1/2}.$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $|e(0)|e^{-2kt} \rightarrow 0, \frac{\epsilon}{k}e^{-2kt} \rightarrow 0$ , 即  $|e(t)| \leq \left(\frac{\epsilon}{k}\right)^{1/2}$ . 误差始终有界, 证毕.

### 3.3 数值仿真

对初值  $(6, -2, 2, 1)$ , 取  $c_1 = -2, c_2 = 0, c_3 = 0, \varphi = 0$ , 经自适应反推控制器调节后, 受控系统(5)的时域波形如图 6 所示; 取  $k_i = 1, \epsilon_i = 0.1 (i = 1, 2, 3, 4), \rho_1(x) = |x_2| + 0.1, \rho_2(x) = |-x_1 - x_1x_3^2| + 0.1, \rho_3(x) = |x_1| + 0.1, \rho_4(x) = |-x_3 - x_3x_1^2| + 0.1$ , 经高频鲁棒控制器调节后, 受控系统(5)的时域波形如图 7 所示.

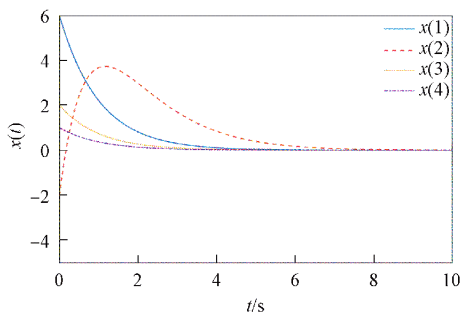


图 6 受控系统(5)经自适应反推控制器调节后的时域波形

Fig. 6 Time domain waveform adjusted by adaptive backstepping controller of controlled system (5)

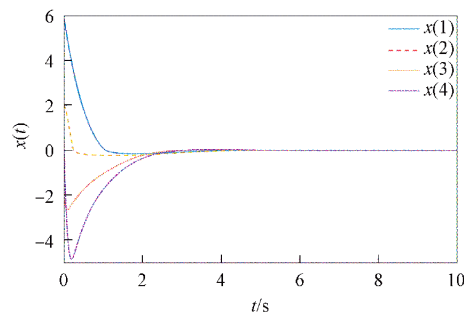


图 7 受控系统(5)经高频鲁棒控制器调节后的时域波形

Fig. 7 Time domain waveform adjusted by high frequency robust controller of controlled of controlled system (5)

综上, 本文针对一类关于参数耦合 Hamilton 系统的混沌控制问题进行了研究. 为有效将系统从混沌状态控制到平衡点处, 用滑模控制法、自适应反推控制法和高频鲁棒控制法分别设计控制器. 经数值仿真验证了所设计控制器的有效性.

滑模控制具有快速的响应速度和强鲁棒性, 但在存在模型误差和外部干扰等情形下, 在滑模面上可能会出现振荡现象. 自适应反推法具有适应性强和鲁棒性高的特点, 在处理大规模数据时可能会增加计算和内存消耗, 导致运算效率下降. 高频鲁棒控制法的收敛速度更快, 但需考虑执行器的负担. 因此, 可根据不同控制需求选择控制器.

## 参 考 文 献

- [1] HAMPTON A, ZANETTE D H. Measure Synchronization in Coupled Hamiltonian Systems [J]. *Physical Review Letters*, 1999, 83(11): 2179-2182.
- [2] YAMAGUCHI Y Y. Relaxation and Diffusion in a Globally Coupled Hamiltonian System [J]. *Physical Review E*, 2003, 68(6): 066210-1-066210-14.
- [3] VINCENT U E. Measure Synchronization in Coupled Duffing Hamiltonian Systems [J]. *New Journal of Physics*, 2005, 7(1): 209-1-209-7.
- [4] 赵红菊. 耦合哈密顿系统的动力学行为分析 [D]. 石家庄: 河北师范大学, 2006. (ZHAO H J. Dynamical Behavior Analysis of Coupled Hamiltonian [D]. Shijiazhuang: Hebei Normal University, 2006.)
- [5] OJO A. Quantum Statistical Operator and Classically Chaotic Hamiltonian System [J]. *Journal of the Nigerian Association of Mathematical Physics*, 2011, 18(1): 181-190.
- [6] 王颖. 变分法在非线形耦合 Hamilton 系统中应用 [J]. *科技创新导报*, 2015, 12(1): 100-102. (WANG Y. Application of Variational Method in Nonlinear Coupled Hamiltonian Systems [J]. *Science and Technology Innovation Herald*, 2015, 12(1): 100-102.)
- [7] 郑然然. 混合型弱耦合 Hamilton 系统的周期解 [D]. 苏州: 苏州大学, 2019. (ZHENG R R. Periodic Solutions of Hybrid Weakly Coupled Hamiltonian Systems [D]. Suzhou: Suzhou University, 2019.)
- [8] ZHANG H, FAN H W, DU Y, et al. Anticipating Measure Synchronization in Coupled Hamiltonian Systems with Machine Learning [J]. *Chaos*, 2022, 32(8): 083136-1-083136-10.
- [9] XING J W, PENG C, CAO Z R. Event-Triggered Adaptive Fuzzy Tracking Control for High-Order Stochastic Nonlinear Systems [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2022, 359(13): 6893-6914.
- [10] LI Y G, JIANG Y C, SUN J S, et al. Adaptive Finite-Time Direct Fuzzy Control for a Nonlinear System with an Unknown Control Gain Based on a Observer [J]. *Information Sciences*, 2022, 607: 92-108.
- [11] LIU Z G, DONG H L, CHEN W X, et al. Two Unified Adaptive Control Approaches of Uncertain Delayed Nonlinear Systems [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2022, 359(14): 7438-7457.
- [12] HE K H, DONG C Y, WANG Q. Active Disturbance Rejection Adaptive Control for Uncertain Nonlinear Systems with Unknown Time-Varying Dead-Zone Input [J]. *Asian Journal of Control*, 2021, 24(3): 1209-1222.
- [13] ZHANG Z Q, WANG Q F, ZHANG Y J, et al. Reduced-Order Filters-Based Adaptive Backstepping Control for Perturbed Nonlinear Systems [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 52(8): 8388-8398.
- [14] ZHOU R R, WENG X, LI B. Reinforcement Learning-Based Optimized Backstepping Control of Nonlinear Strict Feedback System with Unknown Control Gain [J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2022, 43(5): 1358-1378.
- [15] 付景超, 孙红艳. 一类 FitzHugh-Nagumo 离散模型的混沌控制 [J]. *扬州大学学报(自然科学版)*, 2014, 17(3): 1-5. (FU J C, SUN H Y. Chaos Control for a Class of FitzHugh-Nagumo Discrete Models [J]. *Journal of Yangzhou University (Natural Science Edition)*, 2014, 17(3): 1-5.)
- [16] GHANBARI H, ENAYATIFAR R, MOTAMENI H. Chaos-Based Image Encryption Using Hybrid Model of Linear-Feedback Shift Register System and Deoxyribonucleic Acid [J]. *Multimedia Tools and Applications*, 2022, 81(22): 31815-31830.
- [17] ANURAJ S, SUNITA G. Controlling Chaos in a Food Chain Model [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2015, 115: 24-36.
- [18] XU B R, WANG G Y, YUAN F, et al. A Memristor-Meminductor-Based Chaotic System with Abundant Dynamical Behaviors [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 96(1): 765-788.
- [19] JIANG Y, ZHAI J Y. Further Results on Quasi-synchronization of Delayed Chaotic Systems with Parameters Mismatches via Intermittent Control [J]. *Asian Journal of Control*, 2018, 20(6): 2302-2313.
- [20] SPROTT J. *Elegant Chaos* [M]. Singapore: World Scientific, 2010: 126-131.
- [21] ASAD M, BHATTI A L, LQBAL S. A Novel Reaching Law for Smooth Sliding Mode Control Using Inverse Hyperbolic Function [C]//International Conference on Emerging Technologies. Piscataway, NJ: IEEE, 2012: 1-6.
- [22] UTKIN V I. *Sliding Modes in Control and Optimization* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992: 131-144.

(责任编辑:王 健)