

一类具有恢复率的生态流行病学 模型及其最优控制

王 婷, 杜润梅, 那 杨, 郝丽娜

(长春工业大学 数学与统计学院, 长春 130012)

摘要: 首先, 建立并讨论一类在食饵和捕食者种群中都存在感染, 且染病种群具有自我恢复能力的四维生态流行病学动力学模型; 其次, 建立相应的最优控制模型, 并利用 Pontryagin 极大值原理计算出其最优控制策略; 最后, 应用数值分析考察模型的动力学行为及其最优控制策略。结果表明, 疾病恢复率对系统的动力学行为有重要影响。

关键词: 捕食系统; 生态流行病学; 恢复率; 定性分析; 最优控制

中图分类号: O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)03-0716-17

An Ecoepidemiological Model with Recovery Rate and Its Optimal Control

WANG Ting, DU Runmei, NA Yang, HAO Lina

(School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Technology, Changchun 130012, China)

Abstract: Firstly, we established and discussed a four-dimensional ecoepidemiological model in which both prey and predator populations were infected, and the infected population had self-recovery ability. Secondly, we established the corresponding optimal control model and used Pontryagin's maximum principle to calculate its optimal control strategy. Finally, we investigated the dynamic behaviors of the model and its optimal control strategy by using numerical analysis. The results show that the recovery rate of diseases has a significant impact on the dynamic behavior of the system.

Keywords: predator-prey system; ecological epidemics; recovery rate; qualitative analysis; optimal control

0 引 言

目前, 关于带有疾病传播的捕食者-食饵模型的研究已取得了一系列成果。Lenhart 等^[1]考虑初始条件的变化, 对控制施加边界、多重状态和控制, 针对控制的线性依赖以及自由终端时间等问题, 综合论述了最优控制理论在生物模型中的应用及其数值分析方法; Pei 等^[2]考虑一种具有延迟和捕食者寄生感染的生态流行病学系统, 研究了捕食者和食饵存在 Hopf 分支周期振荡的条件和稳态渐近稳定的条件, 数值分析结果表明, 恢复会使感染食饵和捕食者的水平降低, 但使健康猎物的水平在极限时间内提高; Simon 等^[3]考虑一类在食饵种群中有疾病的捕食者模型, 研究了一类在有限时间内施加分离

收稿日期: 2024-08-19.

第一作者简介: 王 婷(2000—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事常微分方程定性理论及应用的研究, E-mail: wangt_323@qq.com.

通信作者简介: 郝丽娜(1982—), 女, 汉族, 博士, 讲师, 从事常微分方程定性理论及应用的研究, E-mail: haolina@ccut.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12071067).

和治疗两种控制的最优问题, 使系统在该时间内被感染的食饵种群数量最少; Agnihotri 等^[4]探索了一种由浮游植物、易感浮游动物和受感染的浮游动物组成的 Holling II 型捕食者-食饵模型, 并采用联合努力量收获所有的 3 个种群; 姚佳佳等^[5]分析了一类食饵-捕食模型的局部、全局稳定性和 Hopf 分支存在性, 并对模型所得理论结果进行了数值验证; Ananth 等^[6]考虑一种额外食物提供给 Holling III 型功能性反应的捕食者-食饵系统, 并研究了一个以额外食物质量作为控制参数的时间最优控制问题, 使系统在最少时间内达到期望状态.

Rahmani Doust 等^[7]考虑一类在食饵和捕食者种群中都存在感染的四维生态流行病学模型, 进行了动力学分析, 并提出了相关的控制模型和最优控制策略, 建立的模型如下:

$$\min \int_0^T \left[\frac{1}{2}(W_1 u_1^2 + W_2 u_2^2) + i(t) + y(t) \right] dt,$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \frac{ds}{dt} = s(1 - s - i) - a(1 - u_1)si - bsx, \\ \frac{di}{dt} = a(1 - u_1)si - di - fxi - miy, \\ \frac{dx}{dt} = csx + gix - e(1 - u_2)xy - \delta x, \\ \frac{dy}{dt} = e(1 - u_2)xy - \alpha y + niy, \end{cases}$$

其中 $s(t)$ 是易感食饵种群密度, $i(t)$ 是感染食饵种群密度, $x(t)$ 是易感捕食者种群密度, $y(t)$ 是感染捕食者种群密度, a 是食饵种群感染率, b 是易感捕食者种群对易感食饵种群捕获率, c 是易感食饵种群到易感捕食者种群的转化率, d 是感染食饵种群的死亡率, e 是捕食者种群感染率, f 是易感捕食者种群对感染食饵种群捕获率, g 是感染食饵种群到易感捕食者种群的转化率, m 是感染捕食者种群对感染食饵种群的捕获率, n 是感染食饵种群到感染捕食者种群的转化率, α 是感染捕食者种群的死亡率, δ 是易感捕食者种群的自然死亡率, u_1 是食饵种群的治疗控制, u_2 是捕食者种群的治疗控制, $W_i (i=1, 2)$ 是权重参数. 但该模型并未考虑染病种群可能具有免疫能力而进行自我恢复的问题.

因此, 本文在此基础上考虑种群可能对疾病具有自我恢复能力, 并假设捕食系统中易感捕食者可以捕食两类食饵种群, 但染病捕食者因染病只能捕食到染病食饵种群, 建立模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - x_1 - x_2) - ax_1x_2 - bx_1y_1 + Ax_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = ax_1x_2 - dx_2 - fx_2y_1 - mx_2y_2 - Ax_2, \\ \frac{dy_1}{dt} = cx_1y_1 + gx_2y_1 - ey_1y_2 - \theta y_1 + By_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = ey_1y_2 - \alpha y_2 + nx_2y_2 - By_2, \end{cases} \tag{1}$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad y_1(0) = y_{10}, \quad y_2(0) = y_{20},$$

其中 $x_1(t)$ 是易感食饵种群密度, $x_2(t)$ 是感染食饵种群密度, $y_1(t)$ 是易感捕食者种群密度, $y_2(t)$ 是感染捕食者种群密度, a 是食饵种群感染率, b 是易感捕食者种群对易感食饵种群捕获率, c 是易感捕食者种群捕食易感食饵种群的增长率, d 是感染食饵种群的死亡率, e 是捕食者种群感染率, f 是易感捕食者种群对感染食饵种群捕获率, g 是易感捕食者种群捕食感染食饵种群的增长率, m 是感染捕食者种群对感染食饵种群的捕食率, n 是感染捕食者种群捕食感染食饵种群的增长率, α 是感染捕食者种群的死亡率, θ 是易感捕食者种群的自然死亡率, A 是感染食饵种群的疾病自愈率, B 是感染捕食者种群的疾病自愈率.

1 定性分析

1.1 平衡点的存在性

下面讨论系统(1)平衡点的存在性, 通过分析可知系统(1)存在 7 类平衡点.

(i) 平凡平衡点 $E_0(0,0,0,0)$ 总是存在.

(ii) 轴向平衡点 $E_1(1,0,0,0)$ 总是存在.

(iii) 当 $c > \theta$ 时, 无病平衡点 $E_2(x_{12}, 0, y_{12}, 0)$ 存在, 其中 $x_{12} = \frac{\theta}{c}, y_{12} = \frac{c-\theta}{bc}$.

(iv) 当 $\frac{ce-\theta e}{c\alpha+cB} < b < \frac{e}{\alpha+B}$ 时, 无感染食饵平衡点 $E_3(x_{13}, 0, y_{13}, y_{23})$ 存在, 其中

$$x_{13} = \frac{e-b(\alpha+B)}{e}, \quad y_{13} = \frac{\alpha+B}{e}, \quad y_{23} = (\alpha+B) \frac{e(\theta-c)+bc(\alpha+B)}{e^2(\alpha+2B)}.$$

(v) 当 $a > d+A$ 时, 无捕食者平衡点 $E_4(x_{14}, x_{24}, 0, 0)$ 存在, 其中

$$x_{14} = \frac{d+A}{a}, \quad x_{24} = [a-(d+A)] \frac{d+A}{a(d+A)+a^2d}.$$

(vi) 无感染捕食者平衡点 $E_5(x_{15}, x_{25}, y_{15}, 0)$ 的存在性分析比较复杂, 下面给出相应的结论.

定理 1 当满足下列条件之一时, 系统(1)的边界平衡点 $E_5(x_{15}, x_{25}, y_{15}, 0)$ 存在:

- 1) $q_1 = 0, \rho_1 < -q_3/q_2 < \rho_2$;
- 2) $f(\rho_1)f(\rho_2) < 0$;
- 3) $\Delta = 0$ 且 $\rho_1 < -\frac{q_2}{2q_1} < \rho_2$;
- 4) $q_1 < 0, \Delta > 0, \rho_1 < -\frac{q_2}{2q_1} < \rho_2, f(\rho_1)f(\rho_2) < 0$;
- 5) $q_1 > 0, \Delta > 0, \rho_1 < -\frac{q_2}{2q_1} < \rho_2, f(\rho_1)f(\rho_2) > 0$.

证明: 由方程组

$$\begin{cases} 1-x_1-x_2-ax_2-by_1+\frac{Ax_2}{x_1}=0, \\ ax_1-d-fy_1-A=0, \\ cx_1+gx_2-\theta=0 \end{cases}$$

计算可得

$$x_1 = \frac{\theta-gx_2}{c}, \quad y_1 = \frac{a\theta-agx_2-cd-cA}{cf}$$

显然, 当 $0 < x_2 < \frac{a\theta-cd-cA}{ag}$ 时, $x_1 > 0, y_1 > 0$ 存在. 由 $0 < x_1 + x_2 < 1$, 有 $\frac{\theta-gx_2}{c} + x_2 < 1$, 解得

$(c-g)x_2 < c-\theta$. 因此 x_2 需满足 $(c-g)x_2 < c-\theta, 0 < x_2 < \frac{a\theta-cd-cA}{ag}$. 利用消元可得方程

$$f(x_2) := q_1x_2^2 + q_2x_2 + q_3 = 0, \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned} q_1 &\triangleq -fg^2 + cfg + acfg - abg^2, \\ q_2 &\triangleq -cfg + 2f\theta g - cf\theta - acf\theta + 2ab\theta g - bcdg - bcgA + c^2fA, \\ q_3 &\triangleq cf\theta - f\theta^2 - ab\theta^2 + bcd\theta + b\theta cA. \end{aligned}$$

令 $\Delta = q_2^2 - 4q_1q_3$, 下面分情况讨论.

1) 当 $c-g > 0, c-\theta > 0$ 时, $x_2 < \frac{c-\theta}{c-g}, x_2 < \frac{a\theta-cd-cA}{ag}, 0 < x_2 < 1$, 取交集可得 $0 < x_2 <$

$$\min\left\{\frac{c-\theta}{c-g}, \frac{a\theta-cd-cA}{ag}, 1\right\}.$$

2) 当 $c-g < 0$ 时, $x_2 > \frac{c-\theta}{c-g}, x_2 < \frac{a\theta-cd-cA}{ag}, 0 < x_2 < 1$, 取交集. 当 $c-\theta > 0$ 时, $0 < x_2 <$

$$\min\left\{\frac{a\theta-cd-cA}{ag}, 1\right\}; \text{ 当 } c-\theta < 0 \text{ 时, } \frac{c-\theta}{c-g} < x_2 < \min\left\{\frac{a\theta-cd-cA}{ag}, 1\right\}.$$

定义

$$\rho_1 \triangleq \begin{cases} 0, & c > g, c > \theta, \\ 0, & \theta < c < g, \\ \frac{c-\theta}{c-g}, & c < g, c < \theta, \end{cases} \quad \rho_2 \triangleq \begin{cases} \min\left\{\frac{c-\theta}{c-g}, \frac{a\theta - cd - cA}{ag}, 1\right\}, & c > g, c > \theta, \\ \min\left\{\frac{a\theta - cd - cA}{ag}, 1\right\}, & \theta < c < g, \\ \min\left\{\frac{a\theta - cd - cA}{ag}, 1\right\}, & c < g, c < \theta. \end{cases}$$

因此方程(2)的正解满足 $\rho_1 < x_2 < \rho_2$. 下面讨论正解 x_2 的存在性.

- 1) 当 $q_1 = 0$ 时, $\rho_1 < -\frac{q_3}{q_2} < \rho_2$, 方程(2)存在正解 $x_2 = -\frac{q_3}{q_2} := x_{25}$, 无感染捕食者平衡点 $E_5(x_{15}, x_{25}, y_{15}, 0)$ 存在;
- 2) 当 $f(\rho_1)f(\rho_2) < 0$ 时, 方程(2)存在正解;
- 3) 当 $\Delta = 0$ 且 $\rho_1 < -\frac{q_2}{2q_1} < \rho_2$ 时, 方程(2)存在正解 $x_2 = -\frac{q_2}{2q_1} := x_{25}$;
- 4) 当 $q_1 < 0, \Delta > 0, \rho_1 < -\frac{q_2}{2q_1} < \rho_2, f(\rho_1)f(\rho_2) < 0$ 时, 方程(2)存在两个不等正解 $x_2 = \frac{-q_2 \pm \sqrt{q_2^2 - 4q_1q_3}}{2q_1} := x_{25}$;
- 5) 当 $q_1 > 0, \Delta > 0, \rho_1 < -\frac{q_2}{2q_1} < \rho_2, f(\rho_1)f(\rho_2) > 0$ 时, 方程(2)存在两个不等正解 $x_2 = \frac{-q_2 \pm \sqrt{q_2^2 - 4q_1q_3}}{2q_1} := x_{25}$.

利用上述分析, 可得系统(1)边界平衡点 $E_5(x_{15}, x_{25}, y_{15}, 0)$ 的存在性定理.

(vii) 内部平衡点 $E^*(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$.

令方程组

$$\begin{cases} 1 - x_1 - x_2 - ax_2 - by_1 + \frac{Ax_2}{x_1} = 0, & (3) \\ ax_1 - d - fy_1 - my_2 - A = 0, & (4) \\ cx_1 + gx_2 - ey_2 - \theta + \frac{By_2}{y_1} = 0, & (5) \\ ey_1 - \alpha + nx_2 - B = 0. & (6) \end{cases}$$

由式(6)可得

$$y_1 = \frac{\alpha - nx_2 + B}{e}, \tag{7}$$

由式(4)可得

$$y_2 = \frac{ax_1 - d - fy_1 - A}{m}, \tag{8}$$

由式(3)可得

$$y_1 = \frac{x_1(1 - x_1 - x_2) - ax_1x_2 + Ax_2}{bx_1}. \tag{9}$$

将式(7)和式(9)联立可得

$$x_2 = \frac{-abx_1 - Bbx_1 + ex_1(1 - x_1)}{-nbx_1 + aex_1 - Ae + ex_1}.$$

由式(5)可得

$$y_2 = \frac{-cx_1y_1 - gx_2y_1 + \theta y_1}{B - ey_1}. \tag{10}$$

将式(8)和式(10)联立可得关于 x_1 的方程, 如果该方程存在正解且满足 $x_1, x_2, y_1, y_2 > 0$, 则系统(1)

存在内部平衡点. 鉴于系统的复杂性, 本文未讨论内部平衡点 $E^*(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$ 存在性的充分性判据.

1.2 平衡点的稳定性

经计算, 可得系统(1)的 Jacobi 矩阵为

$$J(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

其中 $a_{11} = 1 - 2x_1 - (1+a)x_2 - by_1$, $a_{12} = -x_1 - ax_1 + A$, $a_{13} = -bx_1$, $a_{14} = 0$, $a_{21} = ax_2$, $a_{22} = ax_1 - d - fy_1 - my_2 - A$, $a_{23} = -fx_2$, $a_{24} = -mx_2$, $a_{31} = cy_1$, $a_{32} = gy_1$, $a_{33} = cx_1 + gx_2 - ey_2 - \theta$, $a_{34} = -ey_1 + B$, $a_{41} = 0$, $a_{42} = ny_2$, $a_{43} = ey_2$, $a_{44} = ey_1 - \alpha + nx_2 - B$. 下面利用渐近自治系统证明系统(1)平衡点的稳定性.

定理 2 系统(1)的平衡点 $E_0(0, 0, 0, 0)$ 总是不稳定的.

证明: 在平衡点 $E_0(0, 0, 0, 0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_0) = J(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & A & 0 & 0 \\ 0 & -d - A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta & B \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha - B \end{pmatrix},$$

显然特征根不全为负, 故平衡点 $E_0(0, 0, 0, 0)$ 不稳定. 证毕.

定理 3 如果 $a < d + A$, $c < \theta$, 则系统(1)的平衡点 $E_1(1, 0, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的.

证明: 在平衡点 $E_1(1, 0, 0, 0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_1) = J(1, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 - a + A & -b & 0 \\ 0 & a - d - A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c - \theta & B \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha - B \end{pmatrix},$$

显然当 $a < d + A$, $c < \theta$ 时, 特征根全为负数, 故平衡点 $E_1(1, 0, 0, 0)$ 是局部渐近稳定的. 计算得

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} &= x_1(1 - x_1 - x_2) - ax_1x_2 - bx_1y_1 + Ax_2 + ax_1x_2 - dx_2 - fx_2y_1 - mx_2y_2 - Ax_2 = \\ &= -x_1^2 + x_1 - x_1x_2 - bx_1y_1 - dx_2 - fx_2y_1 - mx_2y_2 \leq x_1(1 - x_1 - x_2). \end{aligned}$$

由比较定理可知, 对任意时间 t , 有 $0 \leq x_1(t) + x_2(t) \leq 1$. 由于

$$\frac{dx_2}{dt} = ax_1x_2 - dx_2 - fx_2y_1 - mx_2y_2 - Ax_2 \leq (a - d - A)x_2 \leq 0,$$

显然, 当 $a < d + A$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$. 又因为

$$\frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} = cx_1y_1 + gx_2y_1 - ey_1y_2 - \theta y_1 + By_2 + ey_1y_2 - \alpha y_2 + nx_2y_2 - By_2 \leq (c - \theta)y_1 - \alpha y_2 < 0,$$

因此当 $c < \theta$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) + y_2(t) = 0$, 从而有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = 0$. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 由

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - x_1 - x_2) - ax_1x_2 - bx_1y_1 + Ax_2 \leq x_1(1 - x_1),$$

有 $x_1(t) \rightarrow 1$, 则平衡点 $E_1(1, 0, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的. 证毕.

定理 4 如果 $ey_{12} - \alpha - B < 0$, $ax_{12} - d - fy_{12} - A < 0$, 则系统(1)的平衡点 $E_2(x_{12}, 0, y_{12}, 0)$ 局部渐近稳定; 如果还满足 $e < \frac{\alpha + B}{4(1 + \mu)^2}$, 则系统(1)的平衡点 $E_2(x_{12}, 0, y_{12}, 0)$ 全局渐近稳定.

证明: 在平衡点 $E_2(x_{12}, 0, y_{12}, 0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_2) = J(x_{12}, 0, y_{12}, 0) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{pmatrix},$$

其中 $b_{11} = 1 - 2x_{12} - by_{12} < 0$, $b_{12} = -x_{12} - ax_{12} + A$, $b_{13} = -bx_{12} < 0$, $b_{22} = ax_{12} - d - fy_{12} - A$, $b_{31} = cy_{12} > 0$, $b_{32} = gy_{12} > 0$, $b_{33} = cx_{12} - \theta = 0$, $b_{34} = -ey_{12} + B$, $b_{44} = ey_{12} - \alpha - B$. 其特征方程为

$$(\lambda - b_{44})(\lambda - b_{22})[\lambda^2 + (-b_{11} - b_{33})\lambda + b_{11}b_{33} - b_{13}b_{31}] = 0,$$

相应的特征值为 $\lambda_1 = b_{44} = ey_{12} - \alpha - B$, $\lambda_2 = b_{22} = ax_{12} - d - fy_{12} - A$, 且 $\lambda_3 + \lambda_4 = b_{11} + b_{33} < 0$, $\lambda_3\lambda_4 = b_{11}b_{33} - b_{13}b_{31} > 0$ 恒成立. 因此当 $ey_{12} - \alpha - B < 0$, $ax_{12} - d - fy_{12} - A < 0$ 时, 平衡点 $E_2(x_{12}, 0, y_{12}, 0)$ 是局部渐近稳定的. 因为

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= ax_1x_2 - dx_2 - fx_2y_1 - mx_2y_2 - Ax_2 = (ax_1 - d - A)x_2 - fx_2y_1 - mx_2y_2 \leq \\ &(a - d - A)x_2 - fx_2y_1 - mx_2y_2 < 0, \end{aligned}$$

所以当 $a < d + A$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$.

令

$$F(t) = x_1(t) + x_2(t) + y_1(t) + y_2(t),$$

求导可得

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dt} = \\ &x_1 - x_1x_1 - x_1x_2 - ax_1x_2 - bx_1y_1 + Ax_2 + ax_1x_2 - dx_2 - fx_2y_1 - mx_2y_2 - \\ &Ax_2 + cx_1y_1 + gx_2y_1 - ey_1y_2 - \theta y_1 + By_2 + ey_1y_2 - \alpha y_2 + nx_2y_2 - By_2 = \\ &-x_1x_1 + x_1 + (c - b)x_1y_1 + (g - f)x_2y_1 + \\ &(n - m)x_2y_2 - \theta y_1 - \alpha y_2 - dx_2 - x_1x_2 = \\ &-x_1x_1 + x_1 + (c - b)x_1y_1 + (g - f)x_2y_1 + \\ &(n - m)x_2y_2 - x_1x_2 + \mu x_1 - \mu(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \leq \\ &-x_1^2 + (1 + \mu)x_1 - \mu(x_1 + x_2 + y_1 + y_2), \end{aligned}$$

其中 $\mu = \min\{d, \alpha, \theta\}$. 考虑到生物学意义, 令 $b > c$, $f > g$, $m > n$, $\alpha > \theta$, 则

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} + \mu F &\leq -x_1^2 + (1 + \mu)x_1 = -\left[x_1^2 - (1 + \mu)x_1 + \left(\frac{1 + \mu}{2}\right)^2\right] + \left(\frac{1 + \mu}{2}\right)^2 = \\ &-\left(x_1 - \frac{1 + \mu}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \mu}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1 + \mu}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

从而可得

$$F(t) \leq \left(\frac{1 + \mu}{2}\right)^2 (1 - e^{-\mu t}) + F(0)e^{-\mu t},$$

因此

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} F(t) \leq \left(\frac{1 + \mu}{2}\right)^2.$$

当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\frac{dy_2}{dt} = ey_1y_2 - \alpha y_2 + nx_2y_2 - By_2 = (ey_1 - \alpha - B)y_2 \leq \left(\frac{e(1 + \mu)^2}{4} - \alpha - B\right)y_2,$$

当 $e < \frac{\alpha + B}{4(1 + \mu)^2}$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = 0$.

根据渐近自治系统理论^[8], 系统(1)退化为极限系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - x_1) - bx_1y_1 \triangleq F_1, \\ \frac{dy_1}{dt} = cx_1y_1 - \theta y_1 \triangleq F_2. \end{cases} \tag{11}$$

定义 $L_1 = x_1^{-1}y_1^{1/c-1}$, 则有

$$F_1 \cdot L_1 = (x_1(1-x_1) - bx_1y_1)x_1^{-1}y_1^{1/c-1},$$

$$F_2 \cdot L_1 = (cx_1y_1 - \theta y_1)x_1^{-1}y_1^{1/c-1},$$

对 $F_1 \cdot L_1$ 和 $F_2 \cdot L_1$ 分别求导可得

$$\frac{\partial(F_1 \cdot L_1)}{\partial x_1} = (1 - 2x_1 - by_1)x_1^{-1}y_1^{1/c-1} + (x_1(1-x_1) - bx_1y_1)(-1)x_1^{-2}y_1^{1/c-1} =$$

$$x_1^{-1}y_1^{1/c-1}[(1 - 2x_1 - by_1) + (x_1(1-x_1) - bx_1y_1)(-1)x_1^{-1}],$$

$$\frac{\partial(F_2 \cdot L_1)}{\partial y_1} = (cx_1 - \theta)x_1^{-1}y_1^{1/c-1} + (cx_1y_1 - \theta y_1)\left(\frac{1}{c} - 1\right)x_1^{-1}y_1^{1/c-2} =$$

$$x_1^{-1}y_1^{1/c-1}\left[(cx_1 - \theta) + (cx_1y_1 - \theta y_1)\left(\frac{1}{c} - 1\right)y_1^{-1}\right].$$

经计算有

$$\begin{aligned} \frac{\partial(F_1 \cdot L_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(F_2 \cdot L_1)}{\partial y_1} &= x_1^{-1}y_1^{1/c-1}[(1 - 2x_1 - by_1) + (x_1(1-x_1) - bx_1y_1)(-1)x_1^{-1}] + \\ & x_1^{-1}y_1^{1/c-1}\left[(cx_1 - \theta) + (cx_1y_1 - \theta y_1)\left(\frac{1}{c} - 1\right)y_1^{-1}\right] = \\ & x_1^{-1}y_1^{1/c-1}\left[\left(-2x_1 + x_1 + cx_1 + c\frac{1}{c}x_1 - cx_1\right) + (-by_1 + by_1) + \right. \\ & \left. \left(1 - 1 - \theta - \theta\frac{1}{c} + \theta\right)\right] = x_1^{-1}y_1^{1/c-1}\left(-\frac{\theta}{c}\right) < 0. \end{aligned}$$

根据 Dulac-Bendixson 定理^[9], 系统(11)在 $(0, \infty) \times (0, \infty)$ 上不存在极限环, 且 (x_{12}, y_{12}) 是系统(11)唯一的内部平衡点, 所以每个正解都趋于 (x_{12}, y_{12}) , 即 (x_{12}, y_{12}) 是全局渐近稳定的. 因此, 由渐近自治系统理论^[8]可知, 平衡点 $E_2(x_{12}, 0, y_{12}, 0)$ 是全局渐近稳定的. 证毕.

定理 5 如果 $c_{11} + c_{33} < 0$, $c_{22} < 0$, $H_1H_2 > H_3 > 0$, 则平衡点 $E_3(x_{13}, 0, y_{13}, y_{23})$ 局部渐近稳定; 如果还满足 $a < d + A$, $ey_1^* > B$, 则 $E_3(x_{13}, 0, y_{13}, y_{23})$ 是全局渐近稳定的.

证明: 在平衡点 $E_3(x_{13}, 0, y_{13}, y_{23})$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_3) = J(x_{13}, 0, y_{13}, y_{23}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix},$$

其中 $c_{11} = 1 - 2x_{13} - by_{13} < 0$, $c_{12} = -x_{13} - ax_{13} + A$, $c_{13} = -bx_{13} < 0$, $c_{22} = ax_{13} - d - fy_{13} - A$, $c_{31} = cy_{13} > 0$, $c_{32} = gy_{13} > 0$, $c_{33} = cx_{13} - ey_{23} - \theta$, $c_{34} = -ey_{13} + B < 0$, $c_{42} = ny_{23} > 0$, $c_{43} = ey_{23} > 0$, $c_{44} = ey_{13} - \alpha - B = 0$. 其特征方程为

$$(\lambda - c_{22})[\lambda^3 + H_1\lambda^2 + H_2\lambda + H_3] = 0,$$

其中

$$H_1 = -c_{11} - c_{33} - c_{44},$$

$$H_2 = c_{11}c_{44} + c_{33}c_{44} + c_{11}c_{33} - c_{31}c_{13} - c_{43}c_{34},$$

$$H_3 = c_{11}c_{43}c_{34} + c_{31}c_{13}c_{44} - c_{11}c_{33}c_{44} > 0.$$

相应的特征值 $\lambda_1 = c_{22} = ax_{13} - d - fy_{13} - A$, 因此当 $c_{11} + c_{33} < 0$, $c_{22} < 0$, $H_1H_2 > H_3 > 0$ 时, 根据 Routh-Hurwitz 判据^[10], 该特征方程的根具有负实部, 故平衡点 $E_3(x_{13}, 0, y_{13}, y_{23})$ 是局部渐近稳定的. 因为

$$\frac{dx_2}{dt} = ax_1x_2 - dx_2 - fx_2y_1 - mx_2y_2 - Ax_2 =$$

$$(ax_1 - d - A)x_2 - fx_2y_1 - mx_2y_2 \leq (a - d - A)x_2 - fx_2y_1 - mx_2y_2,$$

所以当 $a < d + A$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$.

根据渐近自治系统理论^[8], 系统(1)退化为极限系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(1-x_1) - bx_1y_1, \\ \frac{dy_1}{dt} = cx_1y_1 - ey_1y_2 - \theta y_1 + By_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = ey_1y_2 - \alpha y_2 - By_2. \end{cases} \tag{12}$$

定义 Lyapunov 函数为

$$V(x_1, y_1, y_2) = \left(x_1 - x_1^* - x_1^* \ln \frac{x_1}{x_1^*}\right) + G_1 \left(y_1 - y_1^* - y_1^* \ln \frac{y_1}{y_1^*}\right) + G_2 \left(y_2 - y_2^* - y_2^* \ln \frac{y_2}{y_2^*}\right),$$

其中 G_1, G_2 是正常数. 对 $V(x_1, y_1, y_2)$ 关于时间 t 求导, 可得

$$\frac{dV}{dt} = \left(1 - \frac{x_1^*}{x_1}\right) \frac{\partial x_1}{\partial t} + G_1 \left(1 - \frac{y_1^*}{y_1}\right) \frac{\partial y_1}{\partial t} + G_2 \left(1 - \frac{y_2^*}{y_2}\right) \frac{\partial y_2}{\partial t}, \tag{13}$$

将系统(12)代入式(13)可得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \left(1 - \frac{x_1^*}{x_1}\right) (x_1(1-x_1) - bx_1y_1) + G_1 \left(1 - \frac{y_1^*}{y_1}\right) (cx_1y_1 - ey_1y_2 - \theta y_1 + By_2) + \\ & G_2 \left(1 - \frac{y_2^*}{y_2}\right) (ey_1y_2 - \alpha y_2 - By_2), \end{aligned}$$

经计算整理得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & (x_1 - x_1^*)(1 - x_1 - by_1) + (G_1y_1 - G_1y_1^*) \times \\ & \left(cx_1 - ey_2 - \theta + \frac{By_2}{y_1}\right) + (G_2y_2 - G_2y_2^*)(ey_1 - \alpha - B) = \\ & -(x_1 - x_1^*)^2 + (cG_1 - b)(x_1 - x_1^*)(y_1 - y_1^*) + \\ & (eG_2 - eG_1)(y_1 - y_1^*)(y_2 - y_2^*) + BG_1(y_1 - y_1^*) \left(\frac{y_1^*y_2 - y_1y_2^*}{y_1y_1^*}\right) = \\ & -(x_1 - x_1^*)^2 + (cG_1 - b)(x_1 - x_1^*)(y_1 - y_1^*) + (eG_2 - eG_1)(y_1 - y_1^*)(y_2 - y_2^*) + \\ & BG_1(y_1 - y_1^*) \left(\frac{y_2 - y_2^*}{y_1^*} - \frac{y_2(y_1 - y_1^*)}{y_1y_1^*}\right) = \\ & -(x_1 - x_1^*)^2 - \frac{BG_1y_2}{y_1y_1^*}(y_1 - y_1^*)^2 + (cG_1 - b)(x_1 - x_1^*)(y_1 - y_1^*) + \\ & \left(eG_2 - eG_1 + \frac{BG_1}{y_1^*}\right)(y_1 - y_1^*)(y_2 - y_2^*). \end{aligned}$$

当 $ey_1^* > B$ 时, 取 $G_1 = \frac{b}{c}, G_2 = \frac{eby_1^* - Bb}{ecy_1^*}$, 则有 $\frac{dV}{dt}$ 是负定的. 根据 Lasalle 不变性原理^[11], 平衡点 $E_3(x_{13}, 0, y_{13}, y_{23})$ 是全局渐近稳定的. 证毕.

定理 6 如果 $d_{11} < 0, d_{33} < 0, d_{44} < 0$, 则平衡点 $E_4(x_{14}, x_{24}, 0, 0)$ 局部渐近稳定; 如果还满足 $c + g < \theta, n < \alpha, a \leq 1$, 则平衡点 $E_4(x_{14}, x_{24}, 0, 0)$ 全局渐近稳定.

证明: 在平衡点 $E_4(x_{14}, x_{24}, 0, 0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_4) = J(x_{14}, x_{24}, 0, 0) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ 0 & 0 & d_{33} & d_{34} \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix},$$

其中 $d_{11} = 1 - 2x_{14} - (1 + a)x_{24}, d_{12} = -x_{14} - ax_{14} + A < 0, d_{13} = -bx_{14} < 0, d_{21} = ax_{24} > 0, d_{22} = ax_{14} - d - A = 0, d_{23} = -fx_{24} < 0, d_{24} = -mx_{24} < 0, d_{33} = cx_{14} + gx_{24} - \theta, d_{34} = B > 0, d_{44} = -\alpha + nx_{24} - B$. 其特征方程为

$$(\lambda - d_{44})(\lambda - d_{33})[\lambda^2 + (-d_{11} - d_{22})\lambda + d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}] = 0.$$

显然其特征根满足

$\lambda_1 = -\alpha + nx_{24} - B$, $\lambda_2 = cx_{14} + gx_{24} - \theta$, $\lambda_3 + \lambda_4 = d_{11}$, $\lambda_4 = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} = -d_{12}d_{21} > 0$. 因此当 $d_{11} < 0$, $d_{33} < 0$, $d_{44} < 0$ 时, 特征根实部全为负, 故平衡点 $E_4(x_{14}, x_{24}, 0, 0)$ 是局部渐近稳定的. 因为

$$\frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} = cx_1y_1 + gx_2y_1 - ey_1y_2 - \theta y_1 + By_2 + ey_1y_2 - \alpha y_2 + nx_2y_2 - By_2 = (cx_1 + gx_2 - \theta)y_1 + (nx_2 - \alpha)y_2 \leq (c + g - \theta)y_1 + (n - \alpha)y_2,$$

所以当 $c + g < \theta, n < \alpha$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) + y_2(t) = 0$, 从而 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = 0$.

根据渐近自治系统理论^[8], 系统(1)退化为极限系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - x_1 - x_2) - ax_1x_2 + Ax_2 \triangleq \varphi_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = ax_1x_2 - dx_2 - Ax_2 \triangleq \varphi_2. \end{cases} \quad (14)$$

定义 $L_2 = x_1^{-1}x_2^0$, 则有

$$\varphi_1 \cdot L_2 = (x_1(1 - x_1 - x_2) - ax_1x_2 + Ax_2)x_1^{-1}x_2^0, \quad \varphi_2 \cdot L_2 = (ax_1x_2 - dx_2 - Ax_2)x_1^{-1}x_2^0.$$

对 $\varphi_1 \cdot L_1$ 和 $\varphi_2 \cdot L_1$ 分别求导, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1 \cdot L_2}{\partial x_1} &= (1 - 2x_1 - x_2 - ax_2)x_1^{-1}x_2^0 + (x_1(1 - x_1 - x_2) - ax_1x_2 + Ax_2)(-1)x_1^{-2}x_2^0 = \\ &= x_1^{-1}x_2^0[1 - 2x_1 - x_2 - ax_2 + (x_1(1 - x_1 - x_2) - ax_1x_2 + Ax_2)(-1)x_1^{-1}] = \\ &= x_1^{-1}x_2^0\left(1 - 2x_1 - x_2 - ax_2 - 1 + x_1 + x_2 + ax_2 - \frac{Ax_2}{x_1}\right) = x_1^{-1}x_2^0\left(-x_1 - \frac{Ax_2}{x_1}\right), \\ \frac{\partial \varphi_2 \cdot L_2}{\partial x_2} &= (ax_1 - d - A)x_1^{-1}x_2^0. \end{aligned}$$

经计算有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1 \cdot L_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2 \cdot L_2}{\partial x_2} &= x_1^{-1}x_2^0\left(-x_1 - \frac{Ax_2}{x_1}\right) + (ax_1 - d - A)x_1^{-1}x_2^0 = \\ &= x_1^{-1}x_2^0\left[(-1 + a)x_1 + \left(-\frac{A}{x_1}\right)x_2 + (-d - A)\right]. \end{aligned}$$

根据 Dulac-Bendixson 定理^[9], 系统(14)在 $(0, \infty) \times (0, \infty)$ 上不存在极限环, 当 $a \leq 1$ 时, (x_{14}, x_{24}) 是系统(14)唯一的内部平衡点, 每个正解都趋于 (x_{14}, x_{24}) , 从而 (x_{14}, x_{24}) 关于系统(14)是全局渐近稳定的. 因此, 由系统(14)可知, 平衡点 $E_4(x_{14}, x_{24}, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的. 证毕.

定理 7 如果 $e_{44} < 0$, $e_{11} + e_{22} + e_{33} < 0$, $R_1R_2 > R_3 > 0$, 则平衡点 $E_5(x_{15}, x_{25}, y_{15}, 0)$ 局部渐近稳定; 如果还有 $e < \frac{4(\alpha - n)}{(1 + \mu)^2}$, $\frac{g}{f} = \frac{c[(1 + a)x_1^* - A]}{abx_1^*}$, $(1 + a)x_1^* > A$ 成立, 则 $E_5(x_{15}, x_{25}, y_{15}, 0)$ 是全局渐近稳定的.

证明: 在平衡点 $E_5(x_{15}, x_{25}, y_{15}, 0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_5) = J(x_{15}, x_{25}, y_{15}, 0) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & 0 \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ 0 & 0 & 0 & e_{44} \end{pmatrix},$$

其中 $e_{11} = 1 - 2x_{15} - (1 + a)x_{25} - by_{15}$, $e_{12} = -x_{15} - ax_{15} + A$, $e_{13} = -bx_{15} < 0$, $e_{21} = ax_{25} > 0$, $e_{22} = ax_{15} - d - fy_{15} - my_{25} - A$, $e_{23} = -fx_{25} < 0$, $e_{24} = -mx_{25} < 0$, $e_{31} = cy_{15} > 0$, $e_{32} = gy_{15} > 0$, $e_{33} = cx_{15} + gx_{25} - \theta$, $e_{34} = -ey_{15} + B$, $e_{44} = ey_{15} - \alpha + nx_{25} - B$. 其特征方程为

$$(\lambda - e_{44})(\lambda^3 + R_1\lambda^2 + R_2\lambda + R_3) = 0,$$

其中

$$\begin{aligned}
R_1 &= -e_{11} - e_{22} - e_{33}, \\
R_2 &= e_{11}e_{22} + e_{11}e_{33} - e_{22}e_{33} - e_{13}e_{31} - e_{12}e_{21} - e_{23}e_{32}, \\
R_3 &= e_{11}e_{23}e_{32} + e_{33}e_{21}e_{12} + e_{22}e_{13}e_{31} - e_{11}e_{22}e_{33} - e_{21}e_{13}e_{32} - e_{12}e_{23}e_{31}.
\end{aligned}$$

则特征根为 $\lambda_1 = e_{44} = ey_{15} - \alpha + nx_{25} - B$. 因此当 $e_{44} < 0, e_{11} + e_{22} + e_{33} < 0, R_1R_2 > R_3 > 0$ 时, 根据 Routh-Hurwitz 判据^[10], 该特征方程的根具有负实部, 故平衡点 $E_5(x_{15}, x_{25}, y_{15}, 0)$ 是局部渐近稳定的. 因为

$$\frac{dy_2}{dt} = ey_1y_2 - \alpha y_2 + nx_2y_2 - By_2 \leq (n + ey_1 - \alpha)y_2 - By_2 \leq \left(n + \frac{e(1 + \mu)^2}{4} - \alpha\right)y_2 - By_2,$$

所以当 $e < \frac{4(\alpha - n)}{(1 + \mu)^2}$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = 0$.

根据渐近自治系统理论^[8], 系统(1)退化为极限系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - x_1 - x_2) - ax_1x_2 - bx_1y_1 + Ax_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = ax_1x_2 - dx_2 - fx_2y_1 - Ax_2, \\ \frac{dy_1}{dt} = cx_1y_1 + gx_2y_1 - \theta y_1. \end{cases} \tag{15}$$

定义 Lyapunov 函数为

$$\Omega(x_1, x_2, y_1) = \left(x_1 - x_1^* - x_1^* \ln \frac{x_1}{x_1^*}\right) + G_3 \left(x_2 - x_2^* - x_2^* \ln \frac{x_2}{x_2^*}\right) + G_4 \left(y_1 - y_1^* - y_1^* \ln \frac{y_1}{y_1^*}\right),$$

其中 G_3, G_4 是正常数. 对 $\Omega(x_1, x_2, y_1)$ 关于时间 t 求导, 可得

$$\frac{d\Omega}{dt} = \left(1 - \frac{x_1^*}{x_1}\right) \frac{\partial x_1}{\partial t} + G_3 \left(1 - \frac{x_2^*}{x_2}\right) \frac{\partial x_2}{\partial t} + G_4 \left(1 - \frac{y_1^*}{y_1}\right) \frac{\partial y_1}{\partial t}, \tag{16}$$

将系统(15)代入式(16)可得

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= (x_1 - x_1^*) \left(1 - x_1 - x_2 - ax_2 - by_1 + \frac{Ax_2}{x_1}\right) + \\
&\quad (G_3x_2 - G_3x_2^*)(ax_1 - d - fy_1 - A) + (G_4y_1 - G_4y_1^*)(cx_1 + gx_2 - \theta),
\end{aligned}$$

经计算整理得

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= (x_1 - x_1^*) \left(- (x_1 - x_1^*) - (x_2 - x_2^*) - a(x_2 - x_2^*) - b(y_1 - y_1^*) + A \left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_2^*}{x_1^*}\right)\right) + \\
&\quad (G_3x_2 - G_3x_2^*)(a(x_1 - x_1^*) - f(y_1 - y_1^*)) + (G_4y_1 - G_4y_1^*)(c(x_1 - x_1^*) + g(x_2 - x_2^*)) = \\
&\quad - (x_1 - x_1^*)^2 - (x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) - a(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) - b(x_1 - x_1^*)(y_1 - y_1^*) + \\
&\quad A(x_1 - x_1^*) \left(\frac{x_2x_1^* - x_1x_2^*}{x_1x_1^*}\right) + aG_3(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) - fG_3(x_2 - x_2^*)(y_1 - y_1^*) + \\
&\quad cG_4(x_1 - x_1^*)(y_1 - y_1^*) + gG_4(x_2 - x_2^*)(y_1 - y_1^*) = \\
&\quad - (x_1 - x_1^*)^2 - (x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) - a(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) - \\
&\quad b(x_1 - x_1^*)(y_1 - y_1^*) + A(x_1 - x_1^*) \left(\frac{x_1(x_2 - x_2^*) - x_2(x_1 - x_1^*)}{x_1x_1^*}\right) + \\
&\quad aG_3(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) - fG_3(x_2 - x_2^*)(y_1 - y_1^*) + \\
&\quad cG_4(x_1 - x_1^*)(y_1 - y_1^*) + gG_4(x_2 - x_2^*)(y_1 - y_1^*) = \\
&\quad - (x_1 - x_1^*)^2 - \frac{Ax_2}{x_1x_1^*}(x_1 - x_1^*)^2 + \left(aG_3 + \frac{A}{x_1^*} - 1 - a\right)(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) + \\
&\quad (cG_4 - b)(x_1 - x_1^*)(y_1 - y_1^*) + (gG_4 - fG_3)(x_2 - x_2^*)(y_1 - y_1^*).
\end{aligned}$$

当 $(1+a)x_1^* > A$ 时, 取 $G_3 = \frac{(1+a)x_1^* - A}{ax_1^*}, G_4 = \frac{b}{c}$, 利用给定条件可得 $\frac{dV}{dt}$ 是负定的, 根据 Lasalle 不变性原理^[11], 平衡点 $E_5(x_{15}, x_{25}, y_{15}, 0)$ 是全局渐近稳定的. 证毕.

由于系统的复杂性,关于正平衡点 $E^*(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$ 的稳定性本文未做理论分析.

2 最优治疗策略

在系统(1)中引入控制函数 u 和 v , 建立其最优控制模型. 其中: u 表示对染病食饵种群进行治疗, 使染病食饵得以康复的控制函数; v 表示对染病捕食者种群进行治疗, 使染病捕食者种群得以康复的控制函数.

为简化问题, 本文假设实施治疗后, 疾病立即康复, 因此系统(1)的最优控制模型为

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - x_1 - x_2) - a(1 - u(t))x_1x_2 - bx_1y_1 + Ax_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = a(1 - u(t))x_1x_2 - dx_2 - fx_2y_1 - mx_2y_2 - Ax_2, \\ \frac{dy_1}{dt} = cx_1y_1 - gx_2y_1 - e(1 - v(t))y_1y_2 - \theta y_1 + By_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = e(1 - v(t))y_1y_2 - \alpha y_2 + nx_2y_2 - By_2, \end{cases} \quad (17)$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad y_1(0) = y_{10}, \quad y_2(0) = y_{20},$$

其中 $U = \{\mu = (u, v) \in L^\infty(0, T) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, t \in [0, T]\}$. 从实际出发, 本文建立一个使受感染物种总数和治疗费用最小化的目标泛函:

$$J = \int_0^T \left[\frac{1}{2} (W_1 u^2 + W_2 v^2) + x_2(t) + y_2(t) \right] dt,$$

其中 $W_i (i=1, 2)$ 表示权重参数, 为正常数. 下面采用 Pontryagin 极大值原理, 寻求最优控制策略. 即存在 u^* 和 v^* , 使得

$$J(u^*, v^*) = \min_U J(u, v).$$

对于系统(17), 构造 Hamilton 函数:

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} (W_1 u^2(t) + W_2 v^2(t)) + x_2 + y_2 + \lambda_1(t) [x_1(1 - x_1 - x_2) - a(1 - u(t))x_1x_2 - bx_1y_1 + Ax_2] + \\ & \lambda_2(t) [a(1 - u(t))x_1x_2 - dx_2 - fx_2y_1 - mx_2y_2 - Ax_2] + \\ & \lambda_3(t) [cx_1y_1 - e(1 - v(t))y_1y_2 - gx_2y_1 - \theta y_1 + By_2] + \\ & \lambda_4(t) [e(1 - v(t))y_1y_2 - \alpha y_2 + nx_2y_2 - By_2], \end{aligned}$$

其中函数 $\lambda_i(t) (i=1, 2, 3, 4)$ 称为伴随变量, 且满足下列方程:

$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\lambda_1(t)(1 - 2x_1 - x_2 - a(1 - u(t))x_2 - by_1) -$$

$$\lambda_2(t)(a(1 - u(t))x_2) - \lambda_3(t)cy_1,$$

$$\frac{d\lambda_2(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -1 - \lambda_1(t)(-x_1 - a(1 - u(t))x_1 + A) - \lambda_3(t)(-gy_1) - \lambda_4(t)ny_2 -$$

$$\lambda_2(t)(a(1 - u(t))x_1 - d - fy_1 - my_2 - A),$$

$$\frac{d\lambda_3(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_1} = -\lambda_1(t)(-bx_1) - \lambda_2(t)(-fx_2) - \lambda_4(t)(e(1 - v(t))y_2) -$$

$$\lambda_3(t)(cx_1 - gx_2 - e(1 - v(t))y_2 - \theta),$$

$$\frac{d\lambda_4(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_2} = -1 - \lambda_2(t)(-mx_2) - \lambda_3(t)(-e(1 - v(t))y_1 + B) -$$

$$\lambda_4(t)(e(1 - v(t))y_1 - \alpha + nx_2 - B),$$

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = \lambda_4(T) = 0.$$

由 Pontryagin 极大值原理^[1]可知

$$u^* = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u} > 0; \quad (18)$$

$$u^* \in [0,1], \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0; \tag{19}$$

$$u^* = 1, \quad \frac{\partial H}{\partial u} < 0; \tag{20}$$

$$v^* = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial v} > 0; \tag{21}$$

$$v^* \in [0,1], \quad \frac{\partial H}{\partial v} = 0; \tag{22}$$

$$v^* = 1, \quad \frac{\partial H}{\partial v} < 0. \tag{23}$$

由式(18), 当 $\frac{\partial H}{\partial u} > 0$, 即 $u > (\lambda_2 - \lambda_1)ax_1x_2/W_1$ 时, $u^* = 0$, 此时有 $(\lambda_2 - \lambda_1)ax_1x_2/W_1 < 0$. 由式(19), 当 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, 即 $u = (\lambda_2 - \lambda_1)ax_1x_2/W_1$ 时, $u^* \in [0,1]$, 此时有 $u^* = (\lambda_2 - \lambda_1)ax_1x_2/W_1 \in [0,1]$. 由式(20), 当 $\frac{\partial H}{\partial u} < 0$, 即 $u < (\lambda_2 - \lambda_1)ax_1x_2/W_1$ 时, $u^* = 1$, 此时有 $(\lambda_2 - \lambda_1)ax_1x_2/W_1 > 1$. 综合可得

$$u^* = \begin{cases} 0, & (\lambda_2 - \lambda_1)ax_1x_2/W_1 < 0, \\ (\lambda_2 - \lambda_1)ax_1x_2/W_1, & 0 \leq (\lambda_2 - \lambda_1)ax_1x_2/W_1 \leq 1, \\ 1, & (\lambda_2 - \lambda_1)ax_1x_2/W_1 > 1. \end{cases}$$

由式(21)~(23), 同理可得

$$v^* = \begin{cases} 0, & (\lambda_4 - \lambda_3)ey_1y_2/W_2 < 0, \\ (\lambda_4 - \lambda_3)ey_1y_2/W_2, & 0 \leq (\lambda_4 - \lambda_3)ey_1y_2/W_2 \leq 1, \\ 1, & (\lambda_4 - \lambda_3)ey_1y_2/W_2 > 1. \end{cases}$$

3 数值分析

下面根据理论分析结果, 利用 MATLAB 软件对系统(1)和系统(17)进行数值模拟. 先对系统(1)的平衡点进行数值模拟, 图1~图5分别给出了系统(1)的解曲线、周期以及关于 A, B, f 的分支. 其中图1~图5的参数值和初值取值如下.

图1(A)参数取值: $a=0.4, b=1, c=0.1, d=0.5, e=0.2, f=0.2, g=0.15, m=1.5, n=1.4, \alpha=0.5, \theta=0.2, A=0.2, B=0.3, W_1=1, W_2=1, x_1(t)=0.5, x_2(t)=0.5, y_1(t)=0.5, y_2(t)=0.5$; 图1(B)参数取值: $a=0.4, b=1, c=0.5, d=0.5, e=0.2, f=0.2, g=0.15, m=1.5, n=1.4, \alpha=0.5, \theta=0.4, A=0.2, B=0.3, W_1=1, W_2=1, x_1(t)=0.5, x_2(t)=0.5, y_1(t)=0.5, y_2(t)=0.5$; 图1(C)参数取值: $a=0.4, b=1, c=0.1, d=0.1, e=0.2, f=0.2, g=0.15, m=1.5, n=1.4, \alpha=0.8, \theta=0.4, A=0.2, B=0.3, W_1=1, W_2=1, x_1(t)=0.5, x_2(t)=0.6, y_1(t)=0.5, y_2(t)=0.2$; 图1(D)参数取值: $a=0.9, b=1, c=0.1, d=0.1, e=0.2, f=0.2, g=0.6, m=1.3, n=1.4, \alpha=1, \theta=0.2, A=0.1, B=0.2, W_1=1, W_2=1, x_1(t)=0.5, x_2(t)=0.5, y_1(t)=0.5, y_2(t)=0.2$; 图1(E)参数取值: $a=0.4, b=1, c=1, d=0.1, e=1.2, f=0.6, g=0.4, m=1.5, n=1.4, \alpha=0.3, \theta=0.2, A=0.05, B=0.06, W_1=1, W_2=1, x_1(t)=0.5, x_2(t)=0.2, y_1(t)=0.5, y_2(t)=0.5$; 图1(F)参数取值: $a=1.9, b=1.2, c=0.8, d=0.1, e=0.2, f=0.2, g=0.15, m=0.8, n=1.4, \alpha=0.2, \theta=0.2, A=0.03, B=0.01, W_1=1, W_2=1, x_1(t)=0.5, x_2(t)=0.2, y_1(t)=0.5, y_2(t)=0.5$. 图2 参数取值: $a=1.75, b=0.5, c=0.1, d=0.03, e=1.5, f=1.3, g=0.01, m=0.6, n=0.4, \alpha=0.5, \theta=0.01, A=0.45, B=0.05, x_1(t)=0.9, x_2(t)=0.01, y_1(t)=0.9, y_2(t)=0.5$. 图3 参数取值: $a=1.75, b=0.5, c=0.1, d=0.03, e=1.5, f=1.3, g=0.01, m=0.6, n=0.4, \alpha=0.5, \theta=0.01, A=0.45, B=0.05, x_1(t)=0.5251, x_2(t)=0.16569, y_1(t)=0.32248, y_2(t)=0.032839$. 图4 参数取值: $a=1.75, b=0.5, c=0.1, d=0.03, e=0.6, f=0.75, g=0.01, m=0.4, n=0.2, \alpha=0.3, \theta=0.01, A=0.45, B=0.05, x_1(t)=0.52927, x_2(t)=0.10332, y_1(t)=$

0.548 89, $y_2(t)=0.086\ 382$. 图 5 参数取值: $a=1.45, b=0.6, c=0.4, d=0.01, e=1.6, f=0.9, g=0.04, m=1, n=0.4, \alpha=0.5, \theta=0.04, A=0.05, B=0.15, x_1(t)=0.317\ 51, x_2(t)=0.204\ 78, y_1(t)=0.355\ 06, y_2(t)=0.080\ 844$.

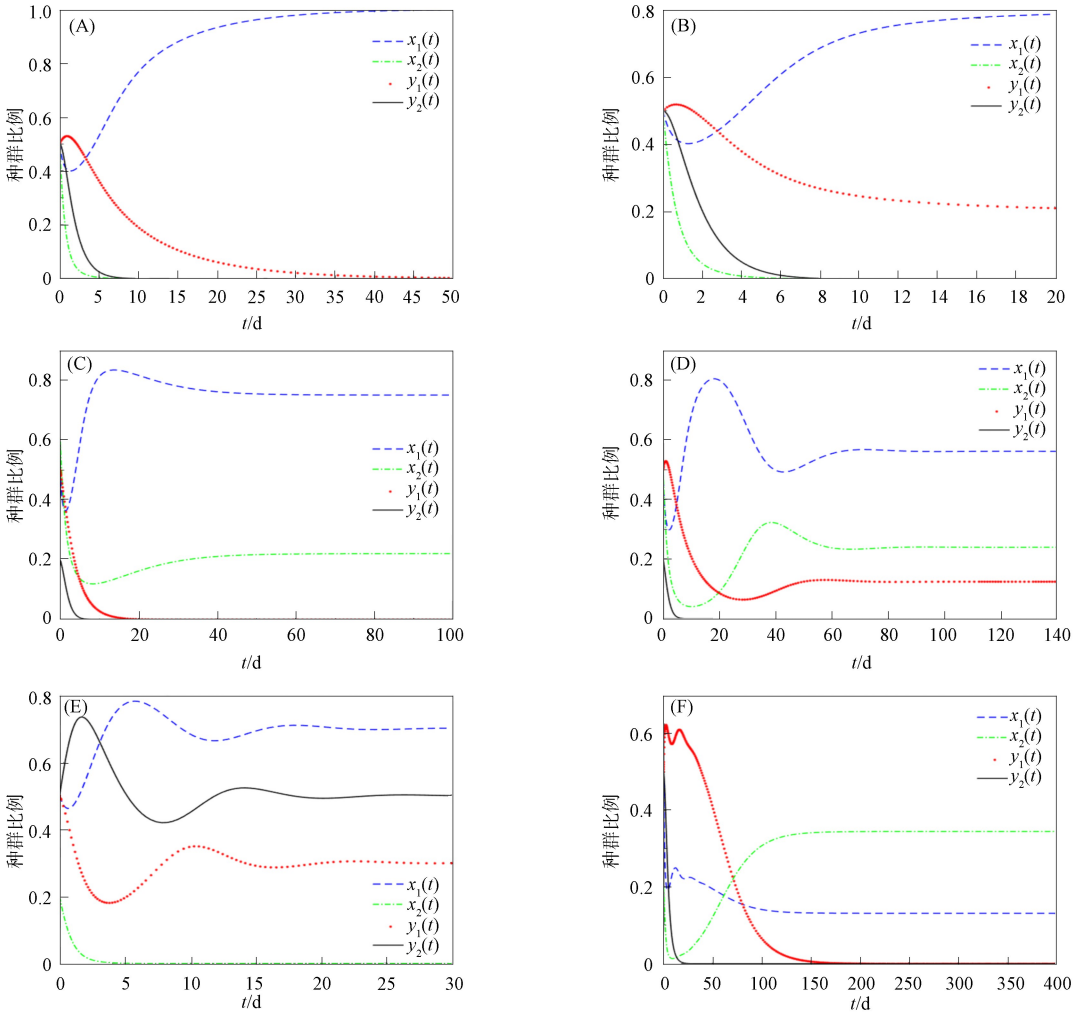


图 1 系统(1)的解曲线

Fig. 1 Solution curves of system (1)

由图 1(A)可见,当定理 2 的条件满足时,轴向平衡点 $E_1(1,0,0,0)$ 是局部渐近稳定的,系统(1)最终仅存在易感食饵种群;由图 1(B)可见,当定理 3 的条件满足时,无病平衡点 $E_2(x_{12},0,y_{12},0)$ 是局部渐近稳定的,系统(1)最终易感食饵种群和易感捕食者种群共存;由图 1(C)可见,当定理 5 的条件满足时,无捕食者平衡点 $E_4(x_{14},x_{24},0,0)$ 是局部渐近稳定的,系统(1)最终易感食饵种群和染病食饵种群共存;由图 1(D)可见,当定理 6 的条件满足时,无感染捕食者平衡点 $E_5(x_{15},x_{25},y_{15},0)$ 是局部渐近稳定的,系统(1)最终易感食饵种群、染病食饵种群和易感捕食者种群共存;由图 1(E)可见,当定理 4 的条件满足时,无感染食饵平衡点 $E_3(x_{13},0,y_{13},y_{23})$ 是局部渐近稳定的,系统(1)最终易感食饵种群、易感捕食者种群和染病捕食者种群共存;由图 1(F)可见,内部平衡点 $E^*(x_1^*,x_2^*,y_1^*,y_2^*)$ 是局部渐近稳定的,系统(1)最终四种群共存. 在数值模拟时发现,系统(1)会呈现四种群周期振荡共存的情形,如图 2 所示.

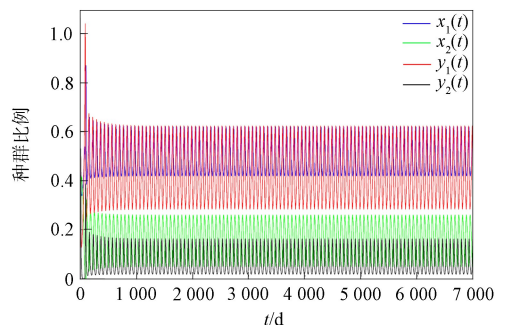


图 2 系统(1)的周期

Fig. 2 Period of system (1)

图 3 是食饵种群疾病自愈率 A 对系统(1)的分支图。由图 3 可见: 当 $A > 0.5174$ 时, 正平衡点是全局渐近稳定的; 当 $A < 0.5174$ 时, 正平衡点是不稳定的, 四种群呈现周期振荡(见图 2); 当 $A = 0.5174$ 时, 产生 Hopf 分支。可见, 当食饵自愈率增加时, 系统四种群先后经历周期震荡共存, 稳定共存, 易感食饵、易感捕食者和染病捕食者三种群共存。因此, 食饵自愈能力增加时, 染病食饵在达到稳定时的密度会减小直至灭绝。食饵自愈能力对染病食饵的影响作用较明显。

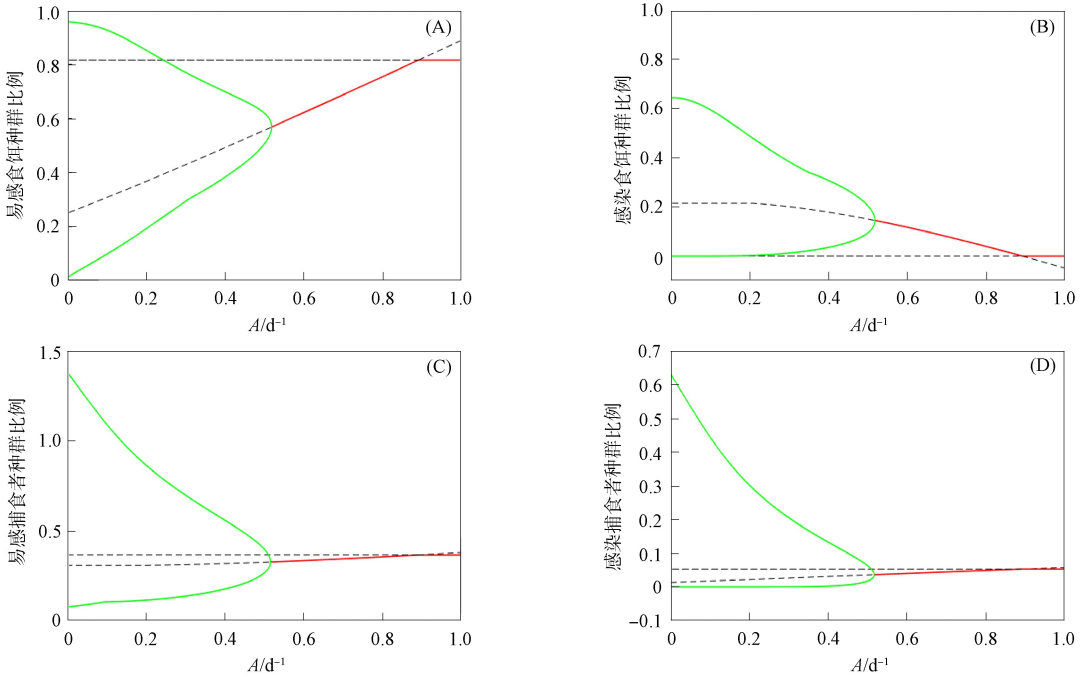


图 3 系统(1)关于 A 的分支

Fig. 3 Branch of system (1) for A

图 4 是系统(1)关于捕食者种群疾病自愈率 B 的分支图。由图 4 可见: 当 $B < 0.0424$ 时, 正平衡点是不稳定的, 四种群呈现周期振荡; 当 $0.0424 < B < 0.1495$ 时, 正平衡点是全局渐近稳定的; 当

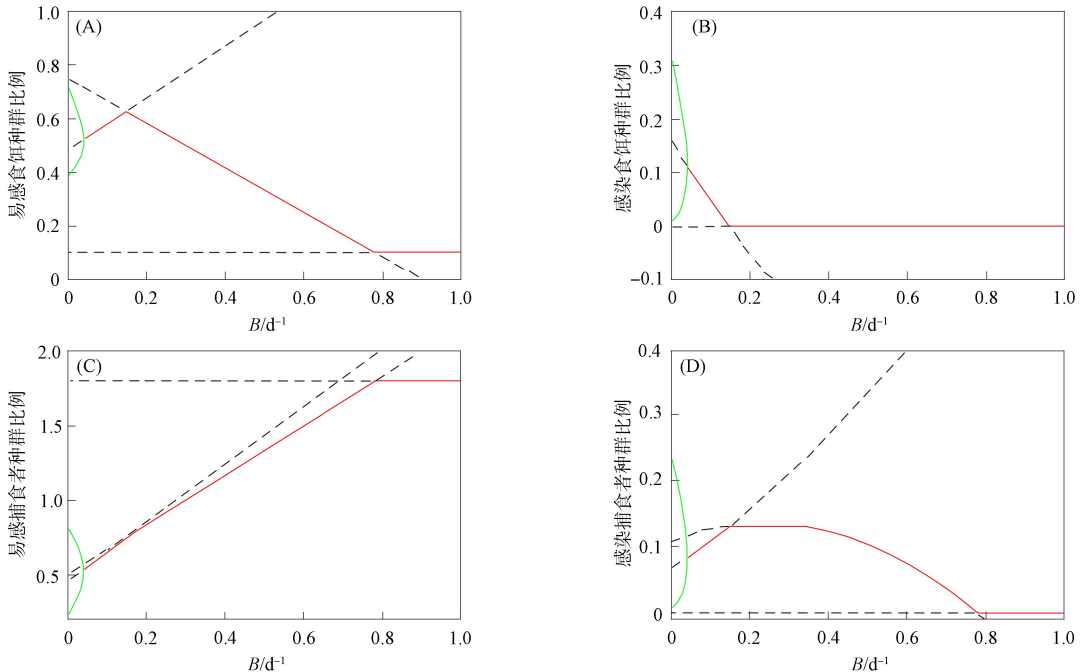


图 4 系统(1)关于 B 的分支

Fig. 4 Branch of system (1) for B

0.149 5 < B < 0.780 0 时, 正平衡点失去稳定性, 边界平衡点 $E_3(x_{13}, 0, y_{13}, y_{23})$ 稳定, 染病食饵灭绝; 当 $B > 0.780 0$ 时, 无病平衡点 $E_2(x_{12}, 0, y_{12}, 0)$ 稳定; 当 $B = 0.042 4$ 时, 产生 Hopf 分支; 当 $B = 0.149 5, B = 0.780 0$ 时, 发生跨临界分支. 可见, 当捕食者自愈率增加时, 系统四种群先后经历周期震荡共存, 稳定共存, 易感食饵、易感捕食者和染病捕食者共存, 易感食饵和易感捕食者共存. 因此, 随着捕食者自愈能力的提高, 易感捕食者数量会上升, 从而增加对食饵捕食强度, 导致易感食饵和染病食饵数量下降, 但染病捕食者数量却先增加后降低, 这是因为当易感捕食者恢复率较低时, 由于被感染的速率大于恢复速率, 从而达到平衡时的数量会增加; 之后由于恢复速率较大, 感染速率小于恢复速率, 于是平衡时的数量会减小直到灭绝. 可见, 捕食者疾病恢复率影响系统各种群的数量.

系统(1)关于易感捕食者种群对感染食饵种群捕获率 f 的分支图体现了系统有趣的动力学行为, 如图 5 所示. 由图 5 可见: 当 $0 < f < 0.401 9$ 或 $0.983 5 < f < 2$ 时, 正平衡点是全局渐近稳定的; 当 $0.401 9 < f < 0.983 5$ 时, 正平衡点是不稳定的, 四种群呈现周期振荡(见图 2); 当 $f = 0.401 9, f = 0.983 5$ 时, 分别产生超临界 Hopf 分支和亚临界 Hopf 分支. 易感捕食者种群对感染食饵种群捕获率的增加使系统正平衡点的稳定性发生变化, 种群先后经历四种群稳定共存、周期共存、稳定共存和染病食饵灭绝.

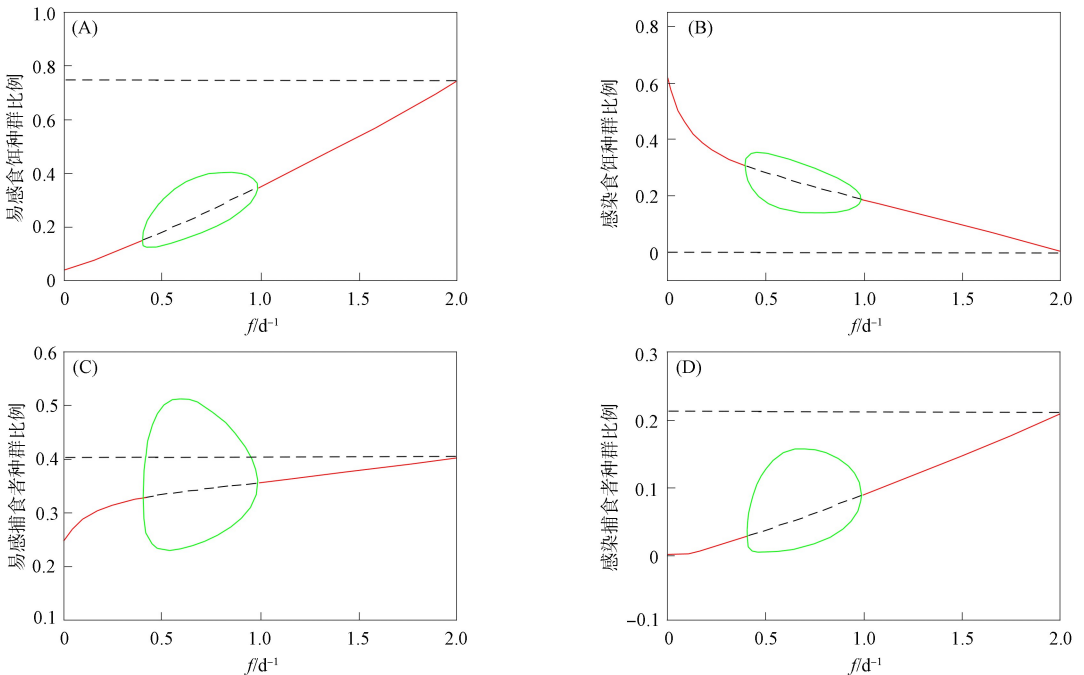


图 5 系统(1)关于 f 的分支

Fig. 5 Branch of system (1) for f

下面使用 Runge-Kutta 四阶迭代公式以及前后扫描方法数值模拟分析系统(17)的最优控制数值解, 以考察最优控制策略对种群疾病的影响. 图 6 是系统(1)和系统(17)的有无控制对比结果, 其中选取的参数取值与图 1 一致, 分别绘制有控制和无控制下系统中的种群数量随时间变化的函数, 实线表示有控制系统中的种群数量变化曲线, 虚线表示无控制系统中的种群数量变化曲线.

由图 6(A)和(B)可见, 系统(1)和系统(17)种群密度变化曲线相同, 即控制函数为零, 这是因为受感染种群在无控制下会最终灭绝, 所以无需控制; 由图 6(C)可见, 在治疗控制的作用下, 受感染食饵种群密度明显降低, 易感食饵种群数量上升; 由图 6(D)可见, 在施加治疗控制前后, 受感染的捕食者种群最终都会灭绝, 易感食饵种群数量相比无控制情形略增加, 感染的食饵种群数量和易感捕食者种群数量略减少; 由图 6(E)可见, 在施加治疗控制后, 因感染捕食者只能捕食感染食饵, 而感染食饵种群灭绝, 所以感染的捕食者种群数量减少, 易感捕食者种群数量增加, 由于捕食导致易感食饵数量下降; 由图 6(F)可见, 实施控制使感染的食饵和捕食者数量均有下降, 易感食饵和易感捕食者数量有上

升, 达到了控制疾病的目的. 图 7 是图 6(F)的 $u-v$ 控制函数图像.

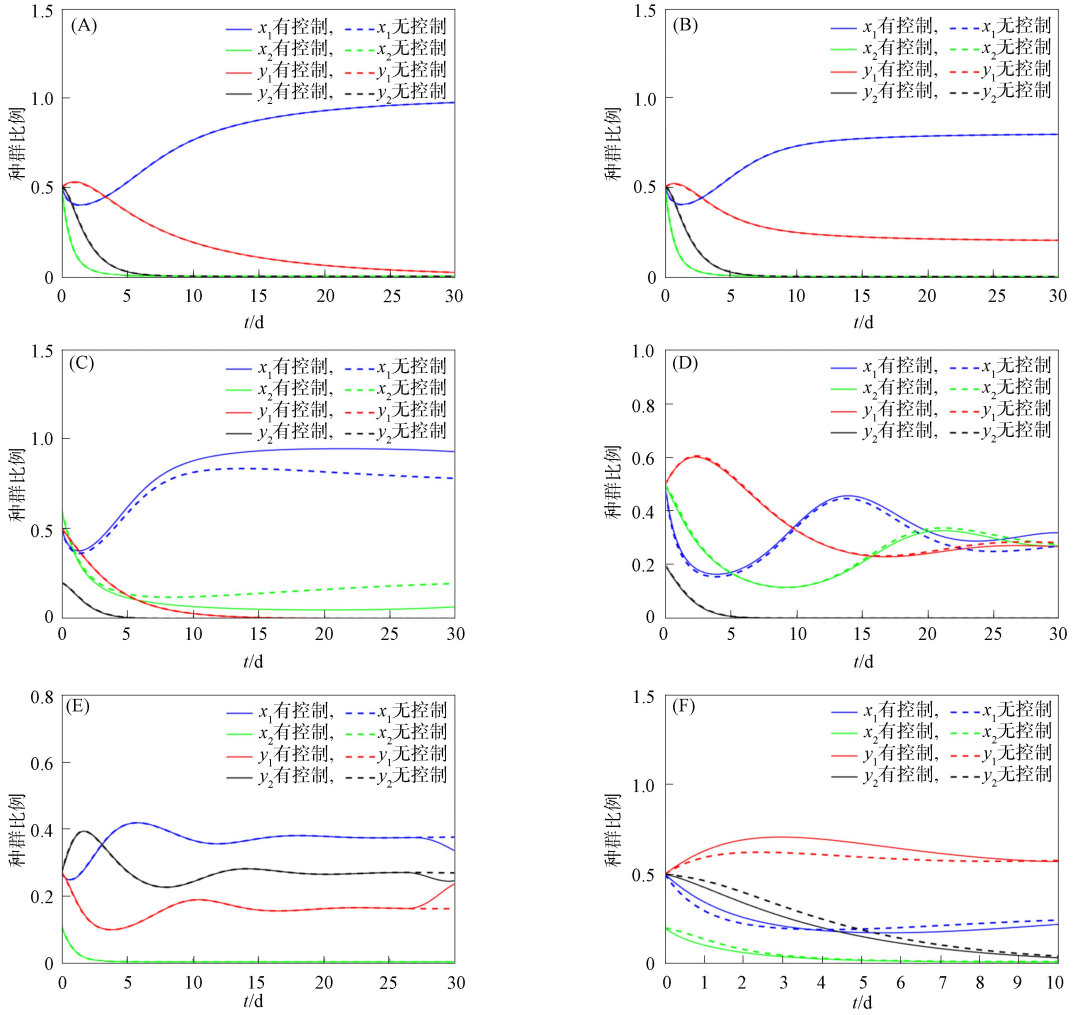


图 6 系统(1)和系统(17)的有无控制对比结果

Fig. 6 Comparison results of system (1) and system (17) with and without control

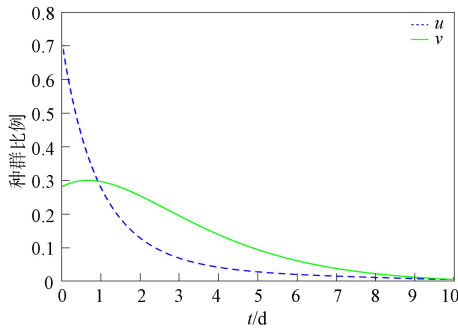


图 7 图 6(F)的控制函数图像

Fig. 7 Control function graph of Fig. 6(F)

综上所述, 本文建立并研究了一类具有恢复率的生态流行病学模型及其最优控制模型. 首先, 利用常微分方程定性理论和渐近自治系统理论, 分析了系统(1)平衡点的存在性、局部稳定性和全局稳定性, 得到了相应的充分性判据; 其次, 结合实际情况, 建立了相应的最优控制模型, 并应用最优控制理论, 求出了最优治疗策略; 再次, 数值分析结果表明, 系统(1)存在多个平衡点和多种分支现象, 具有丰富的动力学行为, 数值分支分析结果说明食饵和捕食者恢复率的增加能有效降低染病食饵和捕食者的数量; 最后, 应用前后扫描方法和 Runge-Kutta 法数值模拟了最优控制策略, 为染病捕食系统

的治疗提供一定的理论依据.

参 考 文 献

- [1] LENHART S, WORKMAN J T. Optimal Control Applied to Biological Models [M]. London: Chapman & Hall/CRC Press, 2007: 5-7.
- [2] PEI Y Z, LI S P, LI C G. Effect of Delay on a Predator-Prey Model with Parasitic Infection [J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 63(3): 311-321.
- [3] SIMON J S H, RABAGO J F T. Optimal Control for a Predator-Prey Model with Disease in the Prey Population [J]. Malaysian Journal of Mathematical Sciences, 2018, 12(2): 269-285.
- [4] AGNIHOTRI K, KAUR H. Optimal Control of Harvesting Effort in a Phytoplankton-Zooplankton Model with Infected Zooplankton under the Influence of Toxicity [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2021, 190: 946-964.
- [5] 姚佳佳, 沈维. 一类食饵-捕食模型的稳定性和 Hopf 分支的存在性 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2022, 60(2): 225-230. (YAO J J, SHEN W. Stability of a Class of Prey-Predator Model and Existence of Hopf Bifurcation [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2022, 60(2): 225-230.)
- [6] ANANTH V S, VAMSI D K K. Time Optimal Control Studies and Sensitivity Analysis of Additional Food Provided Prey-Predator Systems Involving Holling Type III Functional Response Based on Quality of Additional Food [J]. Journal of Biological Systems, 2023, 31(1): 271-308.
- [7] RAHMANI DOUST M H, SHIRAZIAN M, SHAMSABADI M. Application of Control and Optimal Treatment for Predator-Prey Model [J]. Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization, 2020, 10(1): 157-176.
- [8] MISCHAIKOW K, SMITH H, THIEME H R. Asymptotically Autonomous Semiflows; Chain Recurrence and Lyapunov Functions [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1995, 347(5): 1669-1685.
- [9] PERKO L. Differential Equations and Dynamical Systems [M]. New York: Springer, 1996: 11-21.
- [10] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程定性方法与稳定性方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2001: 12-59. (MA Z E, ZHOU Y C, LI C Z. Qualitative and Stability Methods for Ordinary Differential Equations [M]. Beijing: Science Press, 2001: 12-59.)
- [11] LASALLE J P. The Stability of Dynamical Systems [M]. Philadelphia: SIAM, 1976: 16-47.

(责任编辑: 李琦)