第 63 卷　第 3 期　　吉林大学学报(理学版)　　Vol. 63　No. 3
2025 年 5 月　　Journal of Jilin University (Science Edition)　　May　2025

doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024331

含真空的二维趋化浅水波模型强解的爆破准则

辛泽惠，徐夫义
(山东理工大学 数学与统计学院，山东 淄博 255049)

摘要： 考虑含真空的二维趋化浅水波模型初(边)值问题，利用能量方法和一些重要的不等式建立该模型局部强解的一个新爆破准则，并给出影响强解延拓的新因素.

关键词： 趋化浅水波系统；爆破准则；真空；强解

中图分类号： O175.2　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671-5489(2025)03-0700-09

Blow Up Criteria for Strong Solutions of Two-Dimensional Chemotaxis-Shallow Water Model with Vacuum

XIN Zehui, XU Fuyi
(*School of Mathematics and Statistics*, *Shandong University of Technology*, *Zibo* 255049, *Shandong Province*, *China*)

Abstract: We considered the initial (boundary) value problem for the two-dimensional chemotaxis-shallow water model with vacuum, and established a new blow up criteria for the local strong solutions of the model by using the energy method and some important inequalities. We also gave some new factors that affected the extension of strong solutions.

Keywords: chemotaxis-shallow water system; blow up criterion; vacuum; strong solution

1　引言与主要结果

趋化是一种生物现象，它描述了在化学物质驱动下细胞的集体运动或细菌密度的变化，如细胞迁移、器官形成、癌症病变等. 目前，已建立了许多相关的趋化模型[1-3]. 这种模型的重要意义在于它能诱导扩散和聚集两种不同的机制，能精确描述一些生物现象，揭示问题的本质. 由于细菌或微生物通常生活在流体中，因此主要研究流体中的趋化现象，即趋化模型和黏性不可压缩流体的耦合系统[4-8]. 当考虑不可压缩流体在三维空间中受重力和旋转加速度的影响时，可用非线性浅水波方程模拟，同时浅水波系统也被认为是二维等熵可压缩带有旋转力的 Navier-Stokes 方程的重要推广. 近年来，该模型受到广泛关注[9-14].

本文考虑如下二维趋化浅水波系统：

$$\begin{cases} n_t + \operatorname{div}(nu) = D_n \Delta n - \nabla \cdot (n\chi(c)\nabla c), \\ c_t + \operatorname{div}(cu) = D_c \Delta c - nf(c), \\ h_t + \operatorname{div}(hu) = 0, \\ hu_t + hu \cdot \nabla u + h^2 \nabla n + (1+n)\nabla h^2/2 = \mu\Delta u + (\mu+\lambda)\nabla(\operatorname{div} u), \\ (n,c,h,u)(x,0) = (n_0,c_0,h_0,u_0)(x), \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期： 2024-08-21.　**网络首发日期：** 2025-04-02.

第一作者简介： 辛泽惠(1999—)，女，汉族，硕士研究生，从事偏微分方程的研究，E-mail：17860562269@163.com. **通信作者简介：** 徐夫义(1980—)，男，汉族，博士，教授，从事偏微分方程的研究，E-mail：zbxufuyi@163.com.

基金项目： 国家自然科学基金(批准号：12326430)和山东省自然科学基金(批准号：ZR2021MA017).

网络首发地址： https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20250402.1434.005.

其中：未知数 n,c,h,u 分别表示细菌密度、基质浓度、流体高度和流体速度，n_0,c_0,h_0,u_0 为对应的初值；常数 D_n 和 D_c 是细胞和底物相应的扩散系数；假设趋化灵敏性 $\chi(c)$ 和细胞对底物的消耗率 $f(c)$ 为光滑函数；常数 μ 和 λ 分别为剪切黏度系数和体积黏度系数，满足 $\mu\geqslant 0$，$\mu+\lambda\geqslant 0$. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是细胞和流体运动相互作用的物理域. 受文献[15]实验结果以及流体表面为自由边界事实的驱动，基于两个合理假设(细胞和基质都停留在流体的表面；与流体的水平尺度相比，流体的垂直加速度可以忽略不计)，文献[16]首次提出了趋化浅水波模型(1)，该模型的推导主要基于物理的守恒定律和扩散机制，与文献[6,17]研究的模型相比，它保留了具有自由界面的三维流体力学的本质特征，在相关问题刻画上具有很大优势. 近年来，趋化浅水模型(1)受到广泛关注[16,18-21]. 文献[16]首先建立了该模型含真空大初值意义下强解的局部适定性，并给出了如下爆破准则：

$$\lim_{T\to\bar{T}}\left(\int_0^T \|\boldsymbol{D}(u)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}t+\sup_{0<t<T}\|n\|_{L^\infty}\right)=\infty,$$

其中 $\boldsymbol{D}(u)$ 为形变张量，$\boldsymbol{D}(u)=\dfrac{1}{2}(\nabla u+\nabla u^t)$. 该结果表明，模型(1)中影响强解延拓的因素是速度场的形变张量 $\boldsymbol{D}(u)$ 和细菌密度 n. 本文考虑模型(1)中还有哪些因素影响强解的延拓.

为简单，本文取

$$D_{\mathrm{n}}=D_{\mathrm{c}}=1,\quad \chi(c)=1,\quad f(c)=c,$$

并且对一般的 χ 和 f 本文所得结果可以很容易修改. 对于 $n_0\geqslant 0$，$c_0\geqslant 0$，$h_0\geqslant 0$，模型(1)的初值还需满足下列相容条件：

$$-\mu\Delta u_0-(\mu+\lambda)\nabla(\mathrm{div}\,u_0)+h_0^2\nabla n_0+\frac{1}{2}(1+n_0)\nabla h_0^2=\sqrt{h_0}\,g,\tag{2}$$

其中 $g\in L^2$，$g\geqslant 0$.

对于模型(1)，本文主要研究以下两种情形.

1) Cauchy 问题：$\Omega=\mathbb{R}^2$，当 $|x|\to\infty$ 时，有

$$(n,c,u)(x,t)\to(0,0),\qquad h(x,t)\to\tilde{h},\tag{3}$$

其中 $\tilde{h}$ 是一个正数.

2) 初边值问题：Ω 是 $\Omega=\mathbb{R}^2$ 中边界光滑的有界域，且在 $(0,T)\times\partial\Omega$ 上，有

$$\left(\frac{\partial n}{\partial\boldsymbol{v}},\frac{\partial c}{\partial\boldsymbol{v}},u\right)=(0,0,0),\tag{4}$$

这里 $\boldsymbol{v}$ 是 Ω 边界的单位外法向量.

对于 $1<r<\infty$，标准齐次和非齐次 Sobolev 空间为

$$\begin{cases} L^r=L^r(\Omega),\quad D^{k,r}=D^{k,r}(\Omega)=\{u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,|\,\nabla^k u\in L^r(\Omega)\},\quad \|u\|_{D^{k,r}}:=\|\nabla^k u\|_{L^r},\\ W^{k,r}=W^{k,r}(\Omega),\quad H^k=W^{k,r},\quad D^k=D^{k,2},\quad D_0^k=\{u\in D^k\,|\,\text{式(4) 或式(5) 成立}\},\\ H_0^k=L^2\cap D_0^k,\quad \int f\,\mathrm{d}x=\int_\Omega f\,\mathrm{d}x. \end{cases}$$

定理 1[16]　假设初值 (n_0,c_0,h_0,u_0) 满足 h_0 非负，且

$$n_0\in H_0^2,\quad c_0\in H_0^3,\quad u_0\in D_0^1\cap D^2,\quad h_0-\tilde{h}\in L^2\cap W^{1,q}\tag{5}$$

和相容性条件(2)成立，其中 $q>2$. 则存在时间 $T^*>0$，使得初值问题(1)-(3)和初边值问题(1)-(4)在 $[0,T^*)$ 内存在唯一强解，且 (n,c,h,u) 满足

$$\begin{cases} n\in C([0,T^*];H_0^2),\quad c\in C([0,T^*];H_0^3),\\ n_t\in L^\infty(0,T^*;L^2)\cap L^2(0,T^*;H^1),\quad c_t\in L^\infty(0,T^*;H^1)\cap L^2(0,T^*;H^2),\\ (h-\tilde{h})\in C([0,T^*];W^{1,q}),\quad h_t\in C([0,T^*];L^q),\\ u\in C([0,T^*];D_0^1\cap D^2)\cap L^2(0,T^*;D^{2,q}),\\ u_t\in L^\infty(0,T^*;L^2)\cap L^2(0,T^*;D^1),\quad \sqrt{h}u_t\in L^\infty(0,T^*;L^2), \end{cases}$$

其中当 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界域时，$\tilde{h}$ 恒为 0.

本文的主要结果如下：

定理2 在定理1的条件下，设 $\widetilde{T}<+\infty$ 是初值问题(1)-(3)和初边值问题(1)-(4)强解 (n,c,h,u) 的最大存在时间，则有

$$\lim_{T\to\widetilde{T}}\left(\int_0^T \|\boldsymbol{D}(u)\|_{L^\infty}\mathrm{d}t+\sup_{0<t<T}\|\nabla c\|_{L^\infty}\right)=\infty. \tag{6}$$

2 定理2的证明

令 (n,c,h,u) 是定理1的强解. 本文使用反证法证明定理2. 假设式(6)非真，则有

$$\lim_{T\to\widetilde{T}}\left(\int_0^T \|\boldsymbol{D}(u)\|_{L^\infty}\mathrm{d}t+\sup_{0<t<T}\|\nabla c\|_{L^\infty}\right)\leqslant M<\infty. \tag{7}$$

引理1[10] 若 $\tilde{h}$ 是一个常数，$h(x)$ 和 $\omega(x)$ 是两个满足 $h-\tilde{h}\in L^2$，$\omega\in D^1$，$\sqrt{h}\in L^2$ 的方程，则存在一些常数 $C(\tilde{h})>0$，使得

$$\|\omega\|_{L^2}^2\leqslant C\left(\int h|\omega|^2\mathrm{d}x+\|\tilde{h}-h\|_{L^2}^2\|\nabla\omega\|_{L^2}^2\right).$$

引理2 设 (n,c,h,u) 是一个强解，若式(7)成立，则存在正常数 C，使得

$$\sup_{0<t<T}\|h\|_{L^\infty}\leqslant C,\qquad 0\leqslant T\leqslant\widetilde{T}, \tag{8}$$

这里 C 表示仅依赖于 M,T、区域 Ω 和初值的常数，后面类似.

证明：由式(1)中第三式可知，当 $p\geqslant 1$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h^p)+\mathrm{div}(h^p u)+(p-1)h^p\,\mathrm{div}\,u=0.$$

关于空间变量积分，利用 Hölder 不等式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int h^p\mathrm{d}x\leqslant(p-1)\int\mathrm{div}\,u\cdot h^p\mathrm{d}x\leqslant C\|h\|_{L^p}^p\|\mathrm{div}\,u\|_{L^\infty},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|h\|_{L^P}\leqslant\frac{p-1}{P}\|\mathrm{div}\,u\|_{L^\infty}\|h\|_{L^P}.$$

联合式(7)和 Gronwall 不等式可得

$$\sup_{0<t<T}\|h\|_{L^P}\leqslant C\frac{p-1}{p},$$

进一步，取 $p\to\infty$ 有

$$\sup_{0<t<T}\|h\|_{L^\infty}\leqslant C.$$

引理3 设 (n,c,h,u) 是一个强解，若式(7)成立，则对于 $0<T<\widetilde{T}$，有

$$\sup_{0<t<T}(\|c\|_{L^2}^2+\|n\|_{L^2}^2+\|h\|_{L^2}^2+\|\sqrt{h}u\|_{L^2}^2)+\int_0^T\int(|\nabla n|^2+|\nabla c|^2+|\nabla u|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C.$$

对所有的 $p\in[2,\infty]$，有

$$\sup_{0<t<T}(\|n\|_{L^p}^p+\|c\|_{L^p}^p)\leqslant C,\qquad 0\leqslant T<T^*.$$

证明：将方程(1)中第二式乘以 c，在 Ω 上积分并用 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|c|^2\mathrm{d}x+\int|\nabla c|^2\mathrm{d}x=&-\int\mathrm{div}(cu)\cdot u\mathrm{d}x-\int nc^2\mathrm{d}x\leqslant\\&-\int\mathrm{div}(cu)\cdot u\mathrm{d}x\leqslant C\|\mathrm{div}\,u\|_{L^\infty}\|c\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

结合 Gronwall 不等式和式(7)有

$$\sup_{0<t<T}\|c\|_{L^2}^2+\int_0^T\int|\nabla c|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C. \tag{9}$$

类似式(9)的推导过程可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|n|^2\mathrm{d}x+\int|\nabla n|^2\mathrm{d}x\leqslant C\|\mathrm{div}\,u\|_{L^\infty}\|n\|_{L^2}^2+C\|n\|_{L^2}\|\nabla c\|_{L^\infty}\|\nabla n\|_{L^2}\leqslant$$

$$C\|\operatorname{div} u\|_{L^\infty}\|n\|_{L^2}^2+\varepsilon\|\nabla n\|_{L^2}^2+C(\varepsilon)\|n\|_{L^2}^2\|\nabla c\|_{L^\infty}^2,$$

所以

$$\sup_{0<t<T}\|n\|_{L^2}^2+\int_0^T\int|\nabla n|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C.\tag{10}$$

为得到(h,u)的估计，用式(1)中第三式乘以 h、式(1)中第四式乘以 u，然后分别在 Ω 上积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|h|^2\mathrm{d}x\leqslant C\|\operatorname{div} u\|_{L^\infty}\|h\|_{L^2}^2,\tag{11}$$

对式(11)用 Gronwall 不等式和式(7)，有

$$\sup_{0<t<T}\|h\|_{L^2}^2\leqslant C.\tag{12}$$

对 u 重复同样步骤，并使用 Hölder 不等式和 Young 不等式，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int h|u|^2\mathrm{d}x+\mu\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x+(\mu+\lambda)\int|\operatorname{div} u|^2\mathrm{d}x=\\&\qquad\frac{1}{2}\int h^2\operatorname{div} u\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int h^2\cdot n\cdot\operatorname{div} u\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int h^2\cdot u\cdot\nabla n\mathrm{d}x\leqslant\\&\qquad C\|\operatorname{div} u\|_{L^2}\|h\|_{L^2}\|h\|_{L^\infty}+C\|h\|_{L^\infty}^2\|n\|_{L^2}\|\operatorname{div} u\|_{L^2}+\\&\qquad C\|\nabla n\|_{L^2}\|\sqrt{h}u\|_{L^2}\|h^{3/2}\|_{L^\infty}\leqslant\\&\qquad \varepsilon\|\nabla u\|_{L^2}^2+C(\varepsilon)\|h\|_{L^\infty}^2(\|h\|_{L^2}^2+\|h\|_{L^\infty}^2\|n\|_{L^2}^2)+\\&\qquad C\|\nabla n\|_{L^2}\|\sqrt{h}u\|_{L^2}\|h^{3/2}\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

因此，联合式(7),(8),(10),(12)，并利用 Gronwall 不等式可得

$$\sup_{0<t<T}(\|h\|_{L^2}^2+\|\sqrt{h}u\|_{L^2}^2)+\int_0^T\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C.$$

下面做第二个估计. 把式(1)中第一式乘以 n^{p-1}(其中 $p\in[2,\infty]$)，在 Ω 上积分并使用 Hölder 不等式和 Young 不等式，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int n^p\mathrm{d}x+\int(p-1)n^{p-2}|\nabla n|^2\mathrm{d}x=-\int\operatorname{div}(nu)\cdot n^{p-1}\mathrm{d}x-\int\nabla\cdot(n\cdot\nabla c)n^{p-1}\mathrm{d}x=\\&\qquad-\frac{p-1}{p}\int\operatorname{div} u\cdot n^p\mathrm{d}x+\frac{2(p-1)}{p}\int\nabla c\cdot\nabla n^{p/2}\cdot n^{p/2}\mathrm{d}x\leqslant\\&\qquad C\|\operatorname{div} u\|_{L^\infty}\|n\|_{L^p}^p+C\|\nabla c\|_{L^\infty}\|\nabla n^{p/2}\|_{L^2}\|n^{p/2}\|_{L^2}\leqslant\\&\qquad\varepsilon\|\nabla n^{p/2}\|_{L^2}^2+C(\varepsilon)(\|\nabla c\|_{L^\infty}^2\|n\|_{L^p}^p+\|\operatorname{div} u\|_{L^\infty}\|n\|_{L^p}^p),\end{aligned}$$

从而

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n\|_{L^p}^p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n\|_{L^p}\cdot\|n\|_{L^p}^{p-1}\leqslant C\|n\|_{L^p}^p(\|\operatorname{div} u\|_{L^\infty}+\|\nabla c\|_{L^\infty}^2),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|n\|_{L^p}\leqslant\frac{p-1}{p}\|n\|_{L^p}(\|\operatorname{div} u\|_{L^\infty}+\|\nabla c\|_{L^\infty}^2).$$

进一步，利用 Gronwall 不等式和式(7)，可得

$$\sup_{0<t<T}\|n\|_{L^p}\leqslant C\frac{p-1}{p}.\tag{13}$$

特别地，当 $p\to\infty$时，由式(13)有

$$\sup_{0<t<T}\|n\|_{L^\infty}\leqslant C.\tag{14}$$

此外，将式(1)中第二式乘以 c^{p-1}，并在 Ω 上积分有

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int c^p\mathrm{d}x+\int(p-1)c^{p-2}|\nabla c|^2\mathrm{d}x\leqslant C\|c\|_{L^p}^p(\|\operatorname{div} u\|_{L^\infty}+\|n\|_{L^\infty}).$$

类似于式(14)的推导过程，对所有的 $p\in[2,\infty]$，可得

$$\sup_{0<t<T}\|c\|_{L^p}\leqslant C.$$

引理4 设(n,c,h,u)是一个强解，若式(7)成立，则对于$0<T<\widetilde{T}$，有

$$\sup_{0<t<T}(\|\nabla n\|_{L^2}^2+\|\nabla c\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla h\|_{L^2}^2)+\int_0^T\int(|\nabla^2 n|^2+|\nabla^2 c|^2+|\nabla^2 u|^2+|n_t|^2+|c_t|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C.$$

证明：首先估计$(\nabla h,\nabla u)$. 对方程(1)中第三式的每一项作用∇，再将得到的方程乘以$2\nabla h$，然后在Ω上积分，并使用Hölder不等式和Young不等式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|\nabla h|^2\mathrm{d}x=-\int(\nabla(|\nabla h|^2)\cdot u+2|\nabla h|^2\operatorname{div}u+\nabla h^2\cdot\nabla\operatorname{div}u)\mathrm{d}x\leqslant \varepsilon\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2+C(\varepsilon)(\|\boldsymbol{D}(u)\|_{L^\infty}+\|h\|_{L^\infty}^2). \tag{15}$$

在式(3)或式(4)的边界条件下，不等式(15)中的$\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2$由椭圆方程标准的L^2理论可得

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2\leqslant C\|\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div}u\|_{L^2}^2+C\|\nabla u\|_{L^2}^2\leqslant C\int h^{-1}|\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div}u|^2\mathrm{d}x+C\|\nabla u\|_{L^2}^2,$$

这里$\|h\|_{L^\infty}^{-1}\geqslant C^{-1}>0$. 进一步，将式(1)中第四式乘以$h^{-1}[\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div}u]$并在$\Omega$上积分，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\left(\frac{\mu}{2}|\nabla u|^2+\frac{\mu+\lambda}{2}|\operatorname{div}u|^2\right)\mathrm{d}x+\int h^{-1}|\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div}u|^2\mathrm{d}x=\\&(2\mu+\lambda)\int u\cdot\nabla u\cdot\nabla(\operatorname{div}u)\mathrm{d}x-\mu\int u\cdot\nabla u\cdot\nabla\times\operatorname{curl}u\mathrm{d}x+\\&\int\frac{1+n}{2}\nabla(h^2)[\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div}u]h^{-1}\mathrm{d}x+\int h\nabla n\cdot(\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div}u)\mathrm{d}x\triangleq\sum_{i=1}^4 J_i.\end{aligned}$$

利用$\Delta u=\nabla\operatorname{div}u-\nabla\times\operatorname{curl}u$，并由$u\times\operatorname{curl}u=\frac{1}{2}\nabla(|\nabla u|^2)-u\cdot\nabla u$和$\nabla\times(a\times b)=(b\cdot\nabla)a-(a\cdot\nabla)b+(\operatorname{div}b)a-(\operatorname{div}a)b$，以及Hölder不等式和Young不等式，可得

$$\begin{aligned}|J_1|&=\left|(2\mu+\lambda)\int u\cdot\nabla u\cdot\nabla(\operatorname{div}u)\mathrm{d}x\right|=\left|(2\mu+\lambda)\int\frac{1}{2}(\operatorname{div}u)^3\mathrm{d}x+\int\nabla u:\nabla u^t\operatorname{div}u\mathrm{d}x\right|\leqslant\\&C\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\boldsymbol{D}(u)\|_{L^\infty},\\|J_2|&=\left|-\mu\int u\cdot\nabla u\cdot\nabla\times\operatorname{curl}u\mathrm{d}x\right|=\left|\int\nabla\times((u\cdot\nabla)u)\cdot\operatorname{curl}u\mathrm{d}x\right|=\\&\left|\frac{1}{2}\int|\operatorname{curl}u|^2\operatorname{div}u\mathrm{d}x-\int\operatorname{curl}u\cdot\boldsymbol{D}(u)\cdot\operatorname{curl}u\mathrm{d}x\right|\leqslant C\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\boldsymbol{D}(u)\|_{L^\infty},\\|J_3|&=\left|\int\frac{1+n}{2}\nabla(h^2)[\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div}u]h^{-1}\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon\|\nabla^2u\|_{L^2}^2+C(\varepsilon)\|1+n\|_{L^\infty}^2\|\nabla h\|_{L^2}^2,\\|J_4|&=\left|\int h\nabla n\cdot(\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div}u)\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon\|\nabla^2u\|_{L^2}^2+C(\varepsilon)\|h\|_{L^\infty}^2\|\nabla n\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

联合估计$J_1\sim J_4$，得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\left(\frac{\mu}{2}|\nabla u|^2+\frac{\mu+\lambda}{2}|\operatorname{div}u|^2\right)\mathrm{d}x+C\|\nabla^2u\|_{L^2}^2\leqslant\\&\varepsilon\|\nabla^2u\|_{L^2}^2+C(\varepsilon)\|h\|_{L^\infty}^2\|\nabla n\|_{L^2}^2+\\&C(\varepsilon)\|1+n\|_{L^\infty}^2\|\nabla h\|_{L^2}^2+C\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\boldsymbol{D}(u)\|_{L^\infty}.\end{aligned}\tag{16}$$

进一步，联合式(15)和式(16)并应用引理3和Gronwall不等式，得

$$\sup_{0<t<T}(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla h\|_{L^2}^2)+\int_0^T\int|\nabla^2u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C.\tag{17}$$

由引理1可得

$$\|u\|_{L^2}^2\leqslant C\left(\int h|u|^2\mathrm{d}x+\|\tilde{h}-h\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2\right).$$

再结合式(17)和插值得

$$\int_0^t \| u \|_{L^\infty}^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^t (\| u \|_{L^2}^2 + \| \nabla^2 u \|_{L^2}^2 \mathrm{d}t) \leqslant C.$$

下面估计$(\nabla n, \nabla c)$. 将∇运算作用到式(1)中第二式，并将得到的方程乘以∇c再在Ω上积分，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int |\nabla c|^2 \mathrm{d}x + \int |\nabla^2 c|^2 \mathrm{d}x = -\int \nabla(\mathrm{div}(cu)) \cdot \nabla c \mathrm{d}x - \int \nabla(nc) \cdot \nabla c \mathrm{d}x \triangleq I_1 + I_2.$$

利用 Hölder 不等式、Young 不等式和 Gagliardo-Nirenberg 不等式，有

$$\begin{aligned}|I_1| = &\left| -\int \nabla(\mathrm{div}(cu)) \cdot \nabla c \mathrm{d}x \right| = \left| \int \nabla(cu) \cdot \nabla^2 c \mathrm{d}x \right| \leqslant \\ &C \| \nabla^2 c \|_{L^2} (\| \nabla c \|_{L^2} \| u \|_{L^\infty} + \| c \|_{L^2} \| \nabla u \|_{L^\infty}) \leqslant \\ &\varepsilon \| \nabla^2 c \|_{L^2}^2 + C(\varepsilon)(\| \nabla c \|_{L^2}^2 \| u \|_{L^\infty}^2 + \| c \|_{L^2}^2 \| \nabla u \|_{L^\infty}^2),\\ |I_2| = &\left| -\int \nabla(nc) \cdot \nabla c \mathrm{d}x \right| \leqslant \varepsilon \| \nabla^2 c \|_{L^2}^2 + C(\varepsilon) \| c \|_{L^2}^2 \| n \|_{L^\infty}^2.\end{aligned}$$

从而

$$\sup_{0<t<T} \| \nabla c \|_{L^2}^2 + \int_0^T \int |\nabla^2 c|^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}t \leqslant C. \tag{18}$$

对于∇n，按照式(18)的推导方法，只需估计$\int \nabla(\nabla \cdot (n \cdot \nabla c)) \nabla n \mathrm{d}x$即可. 利用 Hölder 不等式和 Young 不等式，得

$$\begin{aligned}\int \nabla(\nabla \cdot (n \cdot \nabla c)) \nabla n \mathrm{d}x \leqslant &C \| \nabla^2 n \|_{L^2} \| \nabla^2 c \|_{L^2} \| n \|_{L^\infty} + C \| \nabla^2 n \|_{L^2} \| \nabla n \|_{L^2} \| \nabla c \|_{L^\infty} \leqslant \\ &\varepsilon \| \nabla^2 n \|_{L^2}^2 + C(\varepsilon)(\| \nabla^2 c \|_{L^2}^2 \| n \|_{L^\infty}^2 + \| \nabla n \|_{L^2}^2 \| \nabla c \|_{L^\infty}^2).\end{aligned}$$

联合引理 3 及式(14),(18)可得

$$\sup_{0<t<T} \| \nabla n \|_{L^2}^2 + \int_0^T \int |\nabla^2 n|^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}t \leqslant C.$$

此外，由式(1)中第一式和第二式，可得

$$\begin{aligned}\| n_t \|_{L^2} \leqslant &\| \mathrm{div}(nu) \|_{L^2} + \| \Delta n \|_{L^2} + \| \nabla \cdot (n \cdot \nabla c) \|_{L^2} \leqslant \\ &\| u \|_{L^\infty} \| \nabla n \|_{L^2} + \| n \|_{L^2} \| \mathrm{div}\, u \|_{L^\infty} + \| \nabla^2 n \|_{L^2} + \\ &\| n \|_{L^\infty} \| \nabla^2 c \|_{L^2} + \| \nabla n \|_{L^2} \| \nabla c \|_{L^\infty},\\ \| c_t \|_{L^2} \leqslant &\| \mathrm{div}(cu) \|_{L^2} + \| \Delta c \|_{L^2} + \| nc \|_{L^2} \leqslant \\ &\| u \|_{L^\infty} \| \nabla c \|_{L^2} + \| c \|_{L^2} \| \mathrm{div}\, u \|_{L^\infty} + \| \nabla^2 c \|_{L^2} + \| n \|_{L^\infty} \| c \|_{L^2}.\end{aligned}$$

上述两个不等式给出了如下估计：

$$\int_0^T \int (|n_t|^2 + |c_t|^2) \mathrm{d}x \mathrm{d}t \leqslant C.$$

引理 5　设(n,c,h,u)是一个强解. 若式(7)成立，则对于$0<T<\widetilde{T}$，有

$$\sup_{0<t<T} (\| \nabla^2 n \|_{L^2}^2 + \| \nabla^2 c \|_{L^2}^2) + \int_0^T (\| \nabla n \|_{H^2}^2 + \| \nabla c \|_{H^2}^2 + \| \nabla n_t \|_{L^2}^2 + \| \nabla c_t \|_{L^2}^2) \mathrm{d}t \leqslant C.$$

证明：对方程(1)中第二式进行$\partial_i \partial_j$运算，将得到的方程乘以$\partial_i \partial_j c$，并在Ω上积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int |\nabla^2 c|^2 \mathrm{d}x + C \| \nabla c \|_{H^2}^2 = \int [-\nabla^2(\mathrm{div}(cu)) - \nabla^2(nc)] \nabla^2 c \mathrm{d}x \triangleq K_1 + K_2.$$

利用 Hölder 不等式、Young 不等式和 Gagliardo-Nirenberg 不等式，可得

$$\begin{aligned}|K_1| = &\left| -\int \nabla^2(\mathrm{div}(cu)) \cdot \nabla^2 c \mathrm{d}x \right| = \left| \int \nabla(\mathrm{div}(cu)) \cdot \nabla^3 c \mathrm{d}x \right| \leqslant \\ &\varepsilon \| \nabla c \|_{H^2}^2 + C(\varepsilon) \| \nabla^2 c \|_{L^2}^2 (\| \nabla c \|_{L^2}^2 + \| u \|_{L^\infty}^2 + \| \nabla^2 u \|_{L^2}^2) + \\ &C(\varepsilon) \| \nabla^2 u \|_{L^2}^2 (\| c \|_{L^2}^2 + \| \nabla u \|_{L^2}^2),\\ |K_2| = &\left| -\int \nabla^2(nc) \cdot \nabla^2 c \mathrm{d}x \right| = \left| \int \nabla(nc) \cdot \nabla^3 c \mathrm{d}x \right| \leqslant\end{aligned}$$

$$\varepsilon\|\nabla c\|_{H^2}^2+C(\varepsilon)(\|\nabla^2 n\|_{L^2}^2\|c\|_{L^2}^2+\|n\|_{L^\infty}^2\|\nabla c\|_{L^2}^2).$$

利用引理3和Gronwall不等式可推出

$$\sup_{0<t<T}\|\nabla^2 c\|_{L^2}^2+\int_0^T\|\nabla c\|_{H^2}^2\mathrm{d}t\leqslant C.$$

对方程(1)中第一式同理可得

$$\sup_{0<t<T}\|\nabla^2 n\|_{L^2}^2+\int_0^T\|\nabla n\|_{H^2}^2\mathrm{d}t\leqslant C.$$

最后，先将∇作用方程(1)中第一式，再将得到的方程乘以∇n_t，在Ω上积分. 利用Hölder不等式、Young不等式和Gagliardo-Nirenberg不等式，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|\Delta n|^2\mathrm{d}x+\int|\nabla n_t|^2\mathrm{d}x\leqslant{}&\varepsilon\|\nabla n_t\|_{L^2}^2+C(\varepsilon)\|\nabla^2 n\|_{L^2}^2(\|u\|_{L^\infty}^2+\|\nabla c\|_{L^\infty}^2)+\\&C(\varepsilon)\|\nabla n\|_{L^2}(\|\nabla n\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^\infty}^2+\|\nabla^2 n\|_{L^2}\|\nabla^2 c\|_{L^2}^2\|\nabla c\|_{H^2})+\\&C(\varepsilon)\|n\|_{L^\infty}^2(\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2+\|\nabla c\|_{H^2}^2).\end{aligned}$$

从而利用Gronwall不等式可得$\int_0^T\|\nabla n_t\|_{L^2}^2\mathrm{d}t\leqslant C$. 同理可得$\int_0^T\|\nabla c_t\|_{L^2}^2\mathrm{d}t\leqslant C$.

引理6 设(n,c,h,u)是一个强解. 若式(7)成立，则对于$0<T<\widetilde{T}$和$q>2$，有

$$\sup_{0<t<T}(\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2+\|\nabla h\|_{L^q}^2)+\int_0^T(\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+\|\nabla^2 u\|_{L^q}^2)\mathrm{d}t\leqslant C.$$

证明：先对方程(1)中第四式关于t求导，将得到的方程乘以u_t，再在Ω上积分，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int h|u_t|^2\mathrm{d}x+\int(\mu|\nabla u_t|^2+(\mu+\lambda)|\mathrm{div}\,u_t|^2)\mathrm{d}x={}&-\int h(u_t\cdot\nabla u)\cdot u_t\mathrm{d}x-\\&\int hu\cdot\nabla((u\cdot\nabla u)u_t)\mathrm{d}x-\int(h^2)_t\nabla n\cdot u_t\mathrm{d}x-\int h^2(\nabla n_t)\cdot u_t\mathrm{d}x-\\&\int\frac{1}{2}n_t(\nabla h^2)\cdot u_t\mathrm{d}x-\int\frac{1+n}{2}(\nabla(h^2))_t\cdot u_t\mathrm{d}x\triangleq\sum_{i=1}^6 L_i.\end{aligned}$$

下面分别估计$L_i(i=1,2,\cdots,6)$. 利用Hölder不等式、Young不等式和Gagliardo-Nirenberg不等式，可得

$$|L_1|=\left|-\int h(u_t\cdot\nabla u)\cdot u_t\mathrm{d}x\right|\leqslant C\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^\infty},$$

$$\begin{aligned}|L_2|=\left|-\int hu\cdot\nabla((u\cdot\nabla u)u_t)\mathrm{d}x\right|\leqslant{}&C\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}\||\nabla u|^2\|_{L^2}+\\&C\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}^2\|\nabla^2 u\|_{L^2}+C\|h\|_{L^\infty}\|u\|_{L^\infty}^2\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla u_t\|_{L^2}\leqslant\\&\varepsilon\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+C\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2}^2\|\nabla^2 u\|_{L^2}^2+\\&C(\varepsilon)\|u\|_{L^\infty}^2(\|u\|_{L^\infty}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|h\|_{L^\infty}^2\|u\|_{L^\infty}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|L_3|=\left|-\int(h^2)_t\nabla n\cdot u_t\mathrm{d}x\right|\leqslant{}&C\|h^{3/2}\|_{L^\infty}\|\mathrm{div}\,u\|_{L^2}\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2}\|\nabla n\|_{L^\infty}+\\&C\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla h\|_{L^2}\|\nabla n\|_{L^\infty}\leqslant\\&C\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2}^2\|\nabla n\|_{H^2}^2+C\|h^{3/2}\|_{L^\infty}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2+C\|u\|_{L^\infty}^2\|\nabla h\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|L_4|=\left|-\int h^2(\nabla n_t)\cdot u_t\mathrm{d}x\right|\leqslant{}&C\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2}\|h^{3/2}\|_{L^\infty}\|\nabla n_t\|_{L^2}\leqslant\\&\varepsilon\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+C\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2}^2\|h^{3/2}\|_{L^\infty}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|L_5|=\left|-\int\frac{1}{2}n_t(\nabla h^2)\cdot u_t\mathrm{d}x\right|={}&\left|\int\frac{1}{2}\nabla n_t\cdot h^2\cdot u_t\mathrm{d}x+\int\frac{1}{2}n_t\cdot h^2\cdot\nabla u_t\mathrm{d}x\right|\leqslant\\&C\|\nabla n_t\|_{L^2}\|h^{3/2}\|_{L^\infty}\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2}+C\|n_t\|_{L^2}\|h\|_{L^\infty}^2\|\nabla u_t\|_{L^2}\leqslant\\&\varepsilon\|\nabla u_t\|_{L^2}^2+C(\varepsilon)\|n_t\|_{L^2}^2\|h\|_{L^\infty}^4+C\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2}^2+C\|\nabla n_t\|_{L^2}^2\|h^{3/2}\|_{L^\infty}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|L_6| = & \left| -\int \frac{1+n}{2}(\nabla(h^2))_t \cdot u_t \mathrm{d}x \right| = \left| \int \nabla n (h^2)_t \cdot u_t \mathrm{d}x + \int \frac{1+n}{2}(h^2)_t \cdot \nabla u_t \mathrm{d}x \right| = \\ & \left| 2\int \nabla n \cdot h_t \cdot h \cdot u_t \mathrm{d}x + \int (1+n) h_t \cdot h \cdot \nabla u_t \mathrm{d}x \right| \leqslant \\ & C\|\nabla n\|_{L^\infty}\|h^{3/2}\|_{L^\infty}\|\mathrm{div}\, u\|_{L^2}\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2} + C\|\nabla n\|_{L^\infty}\|\nabla h\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2} + \\ & C\|1+n\|_{L^\infty}\|h\|_{L^\infty}^2\|\mathrm{div}\, u\|_{L^2}\|\nabla u_t\|_{L^2} + \\ & C\|1+n\|_{L^\infty}\|h\|_{L^\infty}\|\nabla h\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla u_t\|_{L^2} \leqslant \\ & \varepsilon\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 + C\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2}^2\|\nabla n\|_{H^2}^2 + \\ & C\|\nabla h\|_{L^2}^2(\|u\|_{L^\infty}^2 + \|u\|_{L^\infty}^2\|n\|_{L^\infty}^2\|h\|_{L^\infty}^2) + \\ & C\|\nabla u\|_{L^2}^2(\|h^{3/2}\|_{L^\infty}^2 + \|h\|_{L^\infty}^4\|1+n\|_{L^\infty}^2).\end{aligned}$$

联合 $L_i(i=1,2,\cdots,6)$ 及 Gronwall 不等式，可推出

$$\sup_{0<t<T}\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\nabla u_t\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t \leqslant C. \tag{19}$$

此外，利用椭圆方程正则性理论和 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}\|\nabla^2 u\|_{L^2} \leqslant & C(\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2} + \|hu\cdot\nabla u\|_{L^2} + \|h\nabla(hn)\|_{L^2} + \|\nabla h^2\|_{L^2}) \leqslant \\ & C(\|\sqrt{h}u_t\|_{L^2} + \|h\|_{L^\infty}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2} + \|h\|_{L^\infty}^2\|\nabla n\|_{L^2} + \\ & \|\nabla h\|_{L^2}\|h\|_{L^\infty}\|n\|_{L^\infty} + \|\nabla h\|_{L^2}\|h\|_{L^\infty}),\end{aligned}$$

联合引理 4 可得

$$\sup_{0<t<T}\|\nabla^2 u\|_{L^2} \leqslant C, \tag{20}$$

联合式(20)与估计 $\sup\limits_{0<t<T}\|u\|_{L^2}\leqslant C$ 可得 $\sup\limits_{0<t<T}\|u\|_{L^\infty}\leqslant C$.

因此，利用 Hölder 不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式以及引理 1～引理 5 和式(19),(20)，对于任意的 $q>2$，可推出

$$\begin{aligned}\|\nabla^2 u\|_{L^q} \leqslant & C(\|h\|_{L^\infty}\|u_t\|_{L^q} + \|hu\cdot\nabla u\|_{L^q} + \|h\nabla(hn)\|_{L^q} + \|\nabla h^2\|_{L^q}) \leqslant \\ & C\|u_t\|_{L^2}^{2/q}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{(q-3)/q} + C\|h\|_{L^\infty}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^q} + C\|h\|_{L^\infty}^2\|\nabla n\|_{L^q} + \\ & C\|\nabla h\|_{L^q}\|h\|_{L^\infty}\|n\|_{L^\infty} + C\|\nabla h\|_{L^q}\|h\|_{L^\infty} \leqslant \\ & C\|u_t\|_{L^2}^{2/q}\|\nabla u_t\|_{L^2}^{(q-3)/q} + C\|h\|_{L^\infty}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2}^{2/q}\|\nabla^2 u\|_{L^2}^{(q-3)/q} + \\ & C\|h\|_{L^\infty}^2\|\nabla n\|_{L^2}^{2/q}\|\nabla^2 n\|_{L^2}^{(q-3)/q} + \\ & C\|\nabla h\|_{L^q}\|h\|_{L^\infty}\|n\|_{L^\infty} + C\|\nabla h\|_{L^q}\|h\|_{L^\infty} \leqslant \\ & C(\|\nabla u_t\|_{L^2}\|\nabla h\|_{L^q} + 1).\end{aligned} \tag{21}$$

对方程(1)中第三式进行 ∇ 运算，将得到的方程再乘以 $q|\nabla h|^{q-1}$，可得

$$\begin{aligned}&((\nabla h)^q)_t + \mathrm{div}(|\nabla h|^q \cdot u) + (q-1)|\nabla h|^q \mathrm{div}\, u + \\ &\qquad q|\nabla h|^{q-2}(\nabla h)^t \cdot \boldsymbol{D}(u)\cdot(\nabla h) + qh|\nabla h|^{q-2}\cdot\nabla h\cdot\nabla \mathrm{div}\, u = 0,\end{aligned}$$

在 Ω 上积分并利用 Hölder 不等式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|\nabla h|^q \mathrm{d}x \leqslant C\|\nabla h\|_{L^q}^q\|\mathrm{div}\, u\|_{L^\infty} + C\|h\|_{L^\infty}\|\nabla h\|_{L^q}^{q-1}\|\nabla^2 u\|_{L^q},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla h\|_{L^q} \leqslant C\|\nabla h\|_{L^q}\|\boldsymbol{D}(u)\|_{L^\infty} + C\|h\|_{L^\infty}\|\nabla^2 u\|_{L^q}.$$

联合式(7),(8),(21)，利用 Gronwall 不等式可推出 $\sup\limits_{0<t<T}\|\nabla h\|_{L^q}\leqslant C$.

最后通过反证法构造矛盾，假设式(6)不真，即式(7)成立. 基于引理 2～引理 6，可推出强解 (n,c,h,u) 能延拓 $t\geqslant\widetilde{T}$. 事实上，基于定理 1，利用引理 2～引理 6 中的先验估计，有

$$(n,c,h,u)|_{t=\widetilde{T}} = \lim_{t\to\widetilde{T}}(n,c,h,u)$$

满足 $t=\widetilde{T}$ 时刻的初始条件(5). 此外在 $g|_{t=\widetilde{T}}\in L^2$ 中, 有

$$-\mu\Delta u-(\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div} u+h^2\nabla n+\frac{1}{2}(1+n)\nabla h^2|_{t=\widetilde{T}}=\lim_{t\to\widetilde{T}}(hu_t+hu\cdot\nabla u)=\sqrt{h}g|_{t=\widetilde{T}},$$

因此 $(n,c,h,u)|_{t=\widetilde{T}}$ 也满足相容性条件(2). 故可取 $(n,c,h,u)|_{t=\widetilde{T}}$ 作为初值, 且将局部强解 (n,c,h,u) 延拓到 $\widetilde{T}$ 之外. 这与 $\widetilde{T}$ 的定义矛盾. 从而完成定理 2 的证明.

参考文献

[1] KELLER E, SEGEL L A. Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed as an Instability [J]. J Theoret Biol, 1970, 26(3): 399-415.

[2] KELLER E F, SEGEL L A. Model for Chemotaxis [J]. J Theoret Biol, 1971, 30(2): 225-234.

[3] PATLAK C S. Random Walk with Persistence and External Bias [J]. Bull Math Biophys, 1953, 15(3): 311-338.

[4] DUAN R J, LORZ A, MARKOWICH P. Global Solutions to the Coupled Chemotaxis-Fluid Equations [J]. Comm Partial Differential Equations, 2010, 35(9): 1635-1673.

[5] LORZ A. Coupled Chemotaxis Fluid Model [J]. Math Models Methods Appl Sci, 2010, 20(6): 987-1004.

[6] WINKLER M. Global Weak Solutions in a Three-Dimensional Chemotaxis-Navier-Stokes System [J]. Ann Inst H Poincaré C Anal Non Linéaire, 2016, 33(5): 1329-1352.

[7] WANG W K, WANG Y C. Global Existence and Large Time Behavior for the Chemotaxis-Shallow Water System in a Bounded Domain [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2020, 40(11): 6379-6409.

[8] YANG Y. Global Classical Solutions to Two-Dimensional Chemotaxis-Shallow Water System [J]. Discrete Contin Dyn Syst (Ser B), 2021, 26(5): 2625-2643.

[9] BRESCH D, DESJARDINS B. On the Construction of Approximate Solutions for the 2D Viscous Shallow Water Model and for Compressible Navier-Stokes Models [J]. J Math Pures Appl, 2006, 86(4): 362-368.

[10] DUAN B, LUO Z, ZHENG Y X. Local Existence of Classical Solutions to Shallow Water Equations with Cauchy Data Containing Vacuum [J]. SIAM J Math Anal, 2012, 44(2): 541-567.

[11] GUO Z H, JIU Q S, XIN Z P. Spherically Symmetric Isentropic Compressible Flows with Density-Dependent Viscosity Coefficients [J]. SIAM J Math Anal, 2008, 39(5): 1402-1427.

[12] HAO C C, HSIAO L, LI H L. Cauchy Problem for Viscous Rotating Shallow Water Equations [J]. J Differential Equations, 2009, 247(15): 3234-3257.

[13] LI Y C, PAN R H, ZHU S G. On Classical Solutions to 2D Shallow Water Equations with Degenerate Viscosities [J]. J Math Fluid Mech, 2017, 19(1): 151-190.

[14] WANG W K, XU C J. The Cauchy Problem for Viscous Shallow Water Equations [J]. Rev Mat Iberoam, 2005, 21(1): 1-24.

[15] TUVAL I, CISNEROS L, DOMBROWSKI C, et al. Bacterial Swimming and Oxygen Transport Near Contact Lines [J]. Proc Natl Acad Sci USA, 2005, 102(7): 2277-2282.

[16] CHE J H, CHEN L, DUAN B, et al. On the Existence of Local Strong Solutions to Chemotaxis-Shallow Water System with Large Data and Vacuum [J]. J Differential Equations, 2016, 261(12): 6758-6789.

[17] WINKLER M. Global Large-Data Solutions in a Chemotaxis-(Navier-) Stokes System Modeling Cellular Swimming in Fluid Drops [J]. Comm Partial Differential Equations, 2012, 37(2): 319-351.

[18] TAO Q, YAO Z A. Global Existence and Large Time Behavior for a Two-Dimensional Chemotaxis-Shallow Water System [J]. J Differential Equations, 2018, 265(7): 3092-3129.

[19] FAN J S, LI F C, NAKAMURA G. The Local Well-Posedness of a Chemotaxis-Shallow Water System with Vacuum [J]. Acta Math Sci Ser B (Engl Ed), 2021, 41(1): 231-240.

[20] ZHAI X P, CHEN Y R. Global Solutions and Large Time Behavior for the Chemotaxis-Shallow Water System [J]. J Differential Equations, 2021, 275: 332-358.

[21] WANG W K, WANG Y C. Global Existence of Strong Solution to the Chemotaxis-Shallow Water System with Vacuum in a Bounded Domain [J]. J Differential Equations, 2022, 307: 517-555.

(责任编辑: 赵立芹)