doi: 10.13413/j. cnki. jdxblxb. 2024393

稀疏图的局部严格邻点可区别边染色

彭　燕，陈莉莉
(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要：用权转移法研究稀疏图的局部严格邻点可区别边染色问题，得到了最大度至多为 4 且最大平均度 $\mathrm{mad}(G)<3\frac{1}{5}$ 的图 G 的局部严格邻点可区别边色数至多为 10.

关键词：稀疏图；局部严格邻点可区别边染色；最大平均度；权转移法
中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5489(2025)04-1083-08

Local Strict Neighbor-Distinguishing Edge Coloring of Sparse Graphs

PENG Yan, CHEN Lili
(*School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou* 362021, *Fujian Province, China*)

Abstract: By using the discharging method, we study the local strict neighbor-distinguishing edge coloring problem of sparse graphs, and obtain that if G is a graph with maximum degree at most four and maximum average degree $\mathrm{mad}(G)<3\frac{1}{5}$, then the local strict neighbor-distinguishing index of G is at most 10.

Keywords: sparse graph; local strict neighbor-distinguishing edge coloring; maximum average degree; discharging method

1　引言与主要结果

本文考虑有限无向简单连通图. 对于简单图 G，用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集，$|V(G)|$ 和 $|E(G)|$ 分别表示 G 的顶点数和边数. 对任一顶点 $v\in V(G)$，与 v 关联的边数称为 v 在 G 中的度，记为 $d_G(v)$. 若 $d_G(v)\geqslant k$，则 v 称为 k^+-点. 若 $d_G(v)=k$，则 v 称为 k-点. 若 u 为 v 的邻点，且 $d_G(u)=k$，则 u 称为 v 的 k-邻点. 记 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别表示图 G 的最大度和最小度. 在不引起混淆的情况下，将 $\Delta(G)$ 简写为 Δ. 图 G 的最大平均度定义为 $\mathrm{mad}(G)=\max\left\{\frac{1}{|V(H)|}\sum_{v\in V(H)}d_H(v): H\subseteq G\right\}$. 若 G 不含 1 度点，则称 G 是正规图.

图 G 的一个正常 k-边染色是一个映射 $\varphi: E(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$，使得对任意相邻的顶点 u 和 v，有 $\varphi(u)\neq\varphi(v)$. 给定图 G 的一个正常 k-边染色 φ，用 $S_\varphi(v)$ 表示与 v 相关联的边的颜色集合. 在不引起混淆的情况下，将 $S_\varphi(v)$ 简记为 $S(v)$. 设 φ 是图 G 的一个正常 k-边染色. 若 φ 满足对任意相邻的顶点 u 和 v，有 $S(u)\nsubseteq S(v)$ 且 $S(v)\nsubseteq S(u)$，则称 φ 是严格邻点可区别的. 使得 G 有一个严格邻点可区别 k-边染色的最小整数 k 称为 G 的严格邻点可区别边色数，记为 $\chi'_{\mathrm{snd}}(G)$. 易见，G 有严格邻点可区别边

收稿日期：2024-10-12.
第一作者简介：彭　燕(1994—)，女，汉族，硕士研究生，从事图染色的研究，E-mail: 1668461606@qq.com. **通信作者简介**：陈莉莉(1986—)，女，汉族，博士，副教授，从事图染色的研究，E-mail: lily60612@126.com.
基金项目：中央高校基本科研业务经费专项基金(批准号：ZQN-903).

染色当且仅当 G 是正规图.

严格邻点可区别边染色的概念由 Gu 等[1]于 2021 年提出，同年，Przybyło 等[2]也提出了相同的概念，命名为 inclusion-free 边染色. 实际上，Zhang[3]在 2008 年就提出了该概念，将其命名为 Smarandachely 邻点边染色，并提出如下猜想.

猜想 1[3] 对每个连通正规图 G，如果 $G\neq C_5$，则 $\chi'_{\mathrm{snd}}(G)\leqslant 2\Delta$.

Gu 等[1]证明了存在 H_k 这类图不满足猜想 1，其中 H_k 为由二部图 $K_{2,k}$ 的一条边插入一个 2 度点得到的图. 于是，他们对猜想 1 做了修改：

猜想 2[1] 对每个连通正规图 G，如果 $G\neq H_k$，则 $\chi'_{\mathrm{snd}}(G)\leqslant 2\Delta$.

对于一般正规图，王鸿杰等[4]给出了严格邻点可区别边色数的一个较大上界，即 $20\Delta^2-28\Delta+12$. 刘信生等[5-6]先证明了对每个最大度 $\Delta\geqslant 16$ 的连通正规图，都有 $\chi'_{\mathrm{snd}}(G)\leqslant 16\lceil\Delta^{3/2}\rceil$，又进一步证明了存在一个常数 c，使得对每个满足最大度 $\Delta\geqslant 10^{20}$ 且围长 $g(G)\geqslant c\Delta\log\Delta$ 的正规图 G，有 $\chi'_{\mathrm{snd}}(G)\leqslant\Delta+301$. Przybyło 等[2]与井普宁等[7]改进了文献[4]的结果，分别证明了对每个正规图 G 有 $\chi'_{\mathrm{snd}}(G)\leqslant 3\Delta-1$.

对于特殊图类，Gu 等[1]和 Chen 等[8]分别证明了对每个次立方图 G，$\chi'_{\mathrm{snd}}(G)\leqslant 7$，且 $\chi'_{\mathrm{snd}}(G)=7$ 当且仅当 G 同构于 H_3. Gu 等[9]证明了最小度至少为 2 的 K_4-minor-free 图的严格邻点可区别边色数至多为 $2\Delta+1$，且严格邻点可区别边色数达到 $2\Delta+1$ 当且仅当图 G 为 H_Δ. 对于二部图，Chen 等[10]证明了对于$(2,\Delta)$-二部图 G，有 $\chi'_{\mathrm{snd}}(G)\leqslant 2\Delta$；对任意 $\delta(H)\geqslant 2$ 的$(3,\Delta)$-二部图 H，有 $\chi'_{\mathrm{snd}}(H)\leqslant 2\Delta+1$. 彭燕等[11]证明了最大度为 Δ 的 Halin 图 G，其严格邻点可区别边色数 $\chi'_{\mathrm{snd}}(G)\leqslant\Delta+2$. Huang 等[12-13]给出了一类三正则 Halin 图以及最大度至少为 4 的 Halin 图的严格邻点可区别边色数的精确值.

井普宁等[7]在研究平面图的严格邻点可区别边染色时引入了严格邻点可区别边染色的松弛形式，即局部严格邻点可区别边染色. 对于一般图 G(不一定是正规图)，设 φ 是图 G 的一个正常 k-边染色. 若对任意相邻的 2^+-点 u 和 v，有 $S(u)\not\subseteq S(v)$ 且 $S(v)\not\subseteq S(u)$(此时称 u 和 v 互斥)，则称 φ 是 G 的局部严格邻点可区别边染色. 使得 G 有局部严格邻点可区别边染色所需的最小颜色数称为 G 的局部严格邻点可区别边色数，记为 $\chi'_{\mathrm{lnd}}(G)$. 显然，若 G 是一个正规图，则 $\chi'_{\mathrm{lnd}}(G)=\chi'_{\mathrm{snd}}(G)$.

井普宁等[7]证明了：每个 $\Delta\geqslant 2$ 的图 G，均有 $\chi'_{\mathrm{lnd}}(G)\leqslant 3\Delta=1$；对于围长至少为 5 的平面图 G，有 $\chi'_{\mathrm{lnd}}(G)\leqslant\Delta+25$. Wang 等[14]证明了：对任意的平面图 G，$\chi'_{\mathrm{lnd}}(G)\leqslant\lceil 2.8\Delta\rceil+4$；当 G 是不含 4-圈的平面图时，$\chi'_{\mathrm{lnd}}(G)\leqslant 2\Delta+10$；当 G 是 3-连通的平面图时，$\chi'_{\mathrm{lnd}}(G)\leqslant\Delta+23$；当 G 是 Hamilton 平面图时，$\chi'_{\mathrm{lnd}}(G)\leqslant\Delta+6$.

本文研究最大度 $\Delta\leqslant 4$ 的简单连通图 G 的局部严格邻点可区别边染色，得到如下结果.

定理 1 设图 G 的最大度 $\Delta\leqslant 4$ 且最大平均度 $\mathrm{mad}(G)<3\dfrac{1}{5}$，则 $\chi'_{\mathrm{lnd}}(G)\leqslant 10$.

由于当 G 是正规图时 $\chi'_{\mathrm{lnd}}(G)=\chi'_{\mathrm{snd}}(G)$，因此有如下推论.

推论 1 设图 G 是正规图，最大度 $\Delta\leqslant 4$ 且最大平均度 $\mathrm{mad}(G)<3\dfrac{1}{5}$，则 $\chi'_{\mathrm{snd}}(G)\leqslant 10$.

2 定理 1 的证明

假设图 G 是定理 1 的反例且 $|E(G)|$ 尽可能小，即 G 的最大度 $\Delta\leqslant 4$，最大平均度 $\mathrm{mad}(G)<3\dfrac{1}{5}$，且 $\chi'_{\mathrm{lnd}}(G)\geqslant 11$. 但对任意 $|E(G')|<|E(G)|$ 的图 G' 有 $\chi'_{\mathrm{lnd}}(G')\leqslant 10$. 若 φ 是 G' 的一个局部严格邻点可区别边染色，且 $\chi'_{\mathrm{lnd}}(G')\leqslant 10$，则称 φ 是 G' 的一个好的染色. 本文的目标是把 φ 拓展成 G 的一个好的染色，从而与 G 的选择矛盾.

令 $C=\{1,2,\cdots,10\}$ 表示染色所用的颜色集合. 设 φ 是 G' 的一个好的染色. 对于边 $uv\in E(G)\backslash E(G')$，用 $A(uv)$ 表示边 uv 可用的颜色集合. 在给边 uv 进行染色时，从顶点 u 来看，首先，uv 不可以染 $S_\varphi(u)$ 中的任何颜色，否则与正常边染色矛盾；其次，设 u' 为 u 除 v 外的一个邻点，

若对 uv 染颜色 $\alpha\in S_\varphi(u')\backslash S_\varphi(u)$ 会使得 $S_{\varphi'}(u)\subseteq S_{\varphi'}(u')$ 或 $S_{\varphi'}(u')\subseteq S_{\varphi'}(u)$，则 uv 不可染颜色 α，其中 φ' 为染完边 uv 后的染色. 记 $R(u)$ 为所有这样的 α 构成的集合. 将 $S_\varphi(u)\cup R(u)$ 称为边 uv 关于顶点 u 的禁用色集，记为 $F(uv,u)$. 根据定义，当 uv 不染 $F(uv,u)$ 中颜色时，u 和 u 的邻点(v 除外)是互斥的. 同理可得边 uv 关于顶点 v 的禁用色集 $F(uv,v)$. 从而边 uv 可用的颜色集合 $A(uv)\subseteq C\backslash(F(uv,u)\cup F(uv,v))$.

2.1　预备引理

引理 1　设 φ 是 G 的一个正常边染色，$v_1v_2\in E(G)$. 若 $2\leqslant d_G(v_1)\leqslant d_G(v_2)$，且存在颜色 $a\in S(v_1)\backslash S(v_2)$，则 v_1 与 v_2 互斥.

证明：由 $2\leqslant d_G(v_1)\leqslant d_G(v_2)$，有 $|S(v_1)|\leqslant|S(v_2)|$. 若 $S(v_2)\backslash S(v_1)=\varnothing$，则 $S(v_2)\subseteq S(v_1)$，即 $|S(v_2)|\leqslant|S(v_1)|$. 又 $a\in S(v_1)\backslash S(v_2)$，则有 $|S(v_2)|<|S(v_1)|$，与 $|S(v_1)|\leqslant|S(v_2)|$ 矛盾. 因而 $S(v_2)\backslash S(v_1)\neq\varnothing$，即 $|S(v_2)\backslash S(v_1)|\geqslant1$. 结合 $a\in S(v_1)\backslash S(v_2)$，即 $|S(v_1)\backslash S(v_2)|\geqslant1$，所以 v_1 与 v_2 互斥. 证毕.

对于边 uv 关于顶点 u 的禁用色集 $F(uv,u)$，有如下性质.

引理 2　设 $G'\subset G$，φ 是 G' 的一个好的染色. 令边 $uv\in E(G)\backslash E(G')$，则下列结论成立：

1) 若 $d_{G'}(u)=1$，则 $|F(uv,u)|=d_{G'}(u_1)\leqslant4$，其中 u_1 为 u 在 G' 中的邻点；

2) 若 $d_{G'}(u)=2$，则 $|F(uv,u)|=2+d_u^2\leqslant4$，其中 $d_u^2=|\{w\,|\,uw\in E(G')$ 且 $d_{G'}(w)=2\}|$；

3) 若 $d_{G'}(u)=3$，则 $|F(uv,u)|\leqslant3+d_u^3\leqslant6$，其中 $d_u^3=|\{w\,|\,uw\in E(G')$ 且 $2\leqslant d_{G'}(w)\leqslant3\}|$.

证明：由于 $\Delta(G)\leqslant4$，因此 $0\leqslant d_{G'}(u)\leqslant3$.

若 $d_{G'}(u)=0$，则 $|F(uv,u)|=\varnothing$. 若 $d_{G'}(u)=1$，则 $d_G(u)=2$. 设 u_1 为 u 在 G' 中的邻点. 此时 $S_\varphi(u)\cup R(u)$ 为 u_1 关联的所有边的颜色，即 $F(uv,u)=S_\varphi(u_1)$. 所以 $|F(uv,u)|=d_{G'}(u_1)\leqslant4$.

若 $d_{G'}(u)=2$，则 $d_G(u)=3$. 设 u_1,u_2 为 u 在 G' 中的邻点. 对于 $1\leqslant i\leqslant2$，若 $d_{G'}(u_i)=2$，设 u_i' 为 u_i 在 G 中除 u 外的另一个邻点，则 $\varphi(u_iu_i')\in R(u)$. 若 $d_{G'}(u_i)\geqslant3$，不妨设 $d_{G'}(u_1)\geqslant3$. 由于在 φ 下 u 与 u_1 互斥，故有 $\varphi(uu_2)\in S_\varphi(u)\backslash S_\varphi(u_1)$. 此时，对 uv 染 $C\backslash S_\varphi(u)$ 中的任一颜色，得到的染色是正常染色，且由于 $d_G(u)\leqslant d_G(u_1)$，根据引理 1 知，在新的染色下仍有 u 与 u_1 互斥. 所以当 $d_{G'}(u_i)\geqslant3$ 时，$S_\varphi(u_i)\backslash S_\varphi(u)$ 中的颜色均不是 uv 的禁用色. 综上，$|R(u)|$ 为 u 在 G' 中的 2-邻点的个数. 令 $d_u^2=|\{w\,|\,uw\in E(G')$ 且 $d_{G'}(w)=2\}|$，则有 $|F(uv,u)|=|S_\varphi(u)|+|R(u)|=2+d_u^2\leqslant4$.

最后假设 $d_{G'}(u)=3$. 对于 $1\leqslant i\leqslant3$，设 u_i 为 u 在 G' 中的邻点. 若 $d_{G'}(u_i)=2$，则显然有 $(S_\varphi(u_i)\backslash S_\varphi(u))\in R(u)$. 若 $d_{G'}(u_i)=3$，记 u_i',u_i'' 为 u_i 除 u 外的邻点. 若 $\varphi(u_iu_i')$ 和 $\varphi(u_iu_i'')$ 有一个在 $S_\varphi(u)$ 中，不妨设 $\varphi(u_iu_i')\in S_\varphi(u)$，则 uv 染 $\varphi(u_iu_i'')$ 会导致 $S_{\varphi'}(u_i)\subseteq S_{\varphi'}(u)$，其中 φ' 为染完边 uv 后的染色，从而 $\varphi(u_iu_i'')\in R(u)$. 若 $\varphi(u_iu_i')$ 和 $\varphi(u_iu_i'')$ 均不在 $S_\varphi(u)$ 中，则 $S_\varphi(u_i)\backslash S_\varphi(u)$ 中的颜色均不是 uv 的禁用色. 若 $d_{G'}(u_i)=4$，则由于在 φ 下，$|S_\varphi(u)\backslash S_\varphi(u_i)|\geqslant1$ 且 $d_G(u)\leqslant d_G(u_i)$，由引理 1 知，对 uv 染 $C\backslash S_\varphi(u)$ 中的任意一种颜色仍有 u 与 u_i 互斥. 因此，$S_\varphi(u_i)\backslash S_\varphi(u)$ 中的颜色不是 uv 的禁用色. 综上，只有 u_i 为 2-点或 3-点时，$S_\varphi(u_i)\backslash S_\varphi(u)$ 中可能存在一种颜色属于 $R(u)$. 因此，令 $d_u^3=|\{w\,|\,uw\in E(G')$ 且 $2\leqslant d_{G'}(w)\leqslant3\}|$，则有 $|F(uv,u)|=|S_\varphi(u)|+|R(u)|\leqslant3+d_u^3\leqslant6$. 证毕.

2.2　图 G 的结构性质

下面给出极小反例图 G 的一些结构性质. 令 $C=\{1,2,\cdots,10\}$ 表示染色所用的颜色集合.

引理 3　$\delta(G)\geqslant2$.

证明：设 $v\in V(G)$ 且 $d_G(v)=1$，u 是 v 的邻点. 令 $G'=G-v$，则 $|E(G')|<|E(G)|$，由 G 的极小性知，G' 有一个好的染色 φ. 易知 $A(uv)=C\backslash F(uv,u)$. 由引理 2 知，$|F(uv,u)|\leqslant6$，所以 $|A(uv)|\geqslant4$. 因此可将 uv 染 $A(uv)$ 中的颜色，从而得到 G 的一个好的染色，与 G 是极小反例矛盾. 证毕.

引理 4　2-点与 2-点不相邻.

证明：设 $v_1,v_2\in V(G)$，$v_1v_2\in E(G)$ 且 $d_G(v_1)=d_G(v_2)=2$. 令 v_1' 是 v_1 除 v_2 外的另一个邻点，v_2' 是 v_2 除 v_1 外的另一个邻点. 令 $G'=G-v_1$，则 $|E(G')|<|E(G)|$，因而 G' 有一个好的染色 φ.

令 $a\in C\backslash(F(v_1v_1',v_1')\cup\varphi(v_2v_2'))$，$b\in C\backslash(F(v_1v_2,v_2)\cup S_\varphi(v_1')\cup\{a\})$. 由于 $d_{G'}(v_1')\leqslant3$，

$d_{G'}(v_2)=1$，由引理2知，$|F(v_1v_1',v_1')|\leqslant 6$，$|F(v_1v_2,v_2)|\leqslant 4$，从而

$$|C\backslash(F(v_1v_1',v_1')\cup\varphi(v_2v_2'))|\geqslant 10-6-1=3,$$

$$|C\backslash(F(v_1v_2,v_2)\cup S_\varphi(v_1')\cup\{a\})|\geqslant 10-4-3-1=2,$$

所以a和b存在．将边v_1v_1'染a，边v_1v_2染b．不难验证，在新的染色下，v_1与v_1'互斥，v_1与v_2互斥，v_1'与其邻点互斥，v_2与v_2'互斥．因此该染色是G的一个好的染色，与G是极小反例矛盾．证毕．

引理5 2-点与3-点不相邻．

证明：设$v_1,v_2\in V(G)$，$v_1v_2\in E(G)$，且$d_G(v_1)=2$，$d_G(v_2)=3$．令v_1'是v_1除v_2外的另一个邻点，u_1,u_2是v_2除v_1外的另两个邻点．令$G'=G-v_1$，则G'有一个好的染色φ．

令$a\in C\backslash(F(v_1v_1',v_1')\cup\{\varphi(v_2u_1),\varphi(v_2u_2)\})$，$b\in C\backslash(F(v_1v_2,v_2)\cup S_\varphi(v_1')\cup\{a\})$．由于$d_{G'}(v_1')\leqslant 3$，$d_{G'}(v_2)=2$，因此由引理2知，有$|F(v_1v_1',v_1')|\leqslant 6$，$|F(v_1v_2,v_2)|\leqslant 4$，从而

$$|C\backslash(F(v_1v_1',v_1')\cup\{\varphi(v_2u_1),\varphi(v_2u_2)\})|\geqslant 10-6-2=2,$$

$$|C\backslash(F(v_1v_2,v_2)\cup S_\varphi(v_1')\cup\{a\})|\geqslant 10-4-3-1=2,$$

所以a和b存在．将边v_1v_1'染a，边v_1v_2染b．不难验证，在新的染色下，v_1与v_1'互斥，v_1与v_2互斥，v_1'与其邻点互斥，v_2与其邻点互斥．因此该染色是G的一个好的染色，与G是极小反例矛盾．证毕．

引理6 3-点与3-点不相邻．

证明：设$v_1,v_2\in V(G)$，$v_1v_2\in E(G)$，且$d_G(v_1)=d_G(v_2)=3$．令u_1,u_2是v_1除v_2外的另两个邻点，w_1,w_2是v_2除v_1外的另两个邻点．由引理3和引理5知，对$1\leqslant i\leqslant 2$，有$d_G(u_i)\geqslant 3$，$d_G(w_i)\geqslant 3$．令$G'=G-v_1$，则G'有一个好的染色φ．

首先，令$a\in C\backslash(F(v_1u_1,u_1)\cup S_\varphi(u_2))$．由引理2知，$|F(v_1u_1,u_1)|\leqslant 6$，因此

$$|C\backslash(F(v_1u_1,u_1)\cup S_\varphi(u_2))|\geqslant 10-6-3=1,$$

所以a存在，将边v_1u_1染a．

其次，令$b\in C\backslash(F(v_1u_2,u_2)\cup S_\varphi(v_2)\cup\{a\})$．由引理2知，$|F(v_1u_2,u_2)|\leqslant 6$，因此

$$|C\backslash(F(v_1u_2,u_2)\cup S_\varphi(v_2)\cup\{a\})|\geqslant 10-6-2-1=1,$$

所以b存在，将边v_1u_2染b．

最后，令$c\in C\backslash(F(v_1v_2,v_2)\cup S_\varphi(u_1)\cup\{a,b\})$．由于$d_{G'}(v_2)=2$，且$d_G(w_1)\geqslant 3$，$d_G(w_2)\geqslant 3$，因此由引理2中2)知，有$d_{v_2}^2=0$，从而$|F(v_1v_2,v_2)|\leqslant 2$，故

$$|C\backslash(F(v_1v_2,v_2)\cup S_\varphi(u_1)\cup\{a,b\})|\geqslant 10-2-3-2=3,$$

所以c存在，将边v_1v_2染c．

记新的染色为φ'，易见在φ'下，$a\in S_{\varphi'}(v_1)\backslash S_{\varphi'}(u_2)$，$b\in S_{\varphi'}(v_1)\backslash S_{\varphi'}(v_2)$，$c\in S_{\varphi'}(v_1)\backslash S_{\varphi'}(u_1)$．又由于$d_G(v_1)\leqslant d_G(u_2)$，$d_G(v_1)\leqslant d_G(u_1)$，$d_G(v_1)=d_G(v_2)$，由引理1知，$v_1$与$u_2$互斥，$v_1$与$u_1$互斥，$v_1$与$v_2$互斥．因此该染色是$G$的一个好的染色，与$G$是极小反例矛盾．证毕．

引理7 4-点至多存在两个2-邻点．

证明：设$v\in V(G)$，且$d_G(v)=4$．令v_1,v_2,v_3,v_4为v的邻点，且v_1,v_2,v_3为2-点．由引理4知，对任意$i,j\in\{1,2,3\}$，$i\neq j$，有v_i与v_j不相邻．对于$1\leqslant i\leqslant 3$，设u_i为v_i除v外的另一个邻点，由引理3～引理5可知，$d_G(u_i)=4$．下面分3种情形证明G有一个好的染色．

情形1) $u_1=u_2=u_3$．

记u_1,u_2,u_3为u，设u除v_1,v_2,v_3外的邻点为w．令$G'=G-v_1$，则G'有一个好的染色φ．令$a\in C\backslash(F(v_1u,u)\cup S_\varphi(v))$，$b\in C\backslash(F(vv_1,v)\cup S_\varphi(u)\cup\{a\})$．由于$d_{G'}(u)=d_{G'}(v)=3$，由引理2中3)知，$|F(v_1u,u)|\leqslant 6$，$|F(vv_1,v)|\leqslant 6$，且$\{\varphi(vv_2),\varphi(vv_3)\}\subseteq F(v_1u,u)$，$\{\varphi(v_2u),\varphi(v_3u)\}\subseteq F(vv_1,v)$．所以

$$F(v_1u,u)\cup S_\varphi(v)=F(v_1u,u)\cup\{\varphi(vv_4)\},$$

$$F(vv_1,v)\cup S_\varphi(u)\cup\{a\}=F(vv_1,v)\cup\{\varphi(uw),a\}.$$

因为

$$|C\backslash(F(v_1u,u)\cup\{\varphi(vv_4)\})|\geqslant 10-6-1=3,$$
$$|C\backslash(F(vv_1,v)\cup\{\varphi(uw),a\})|\geqslant 10-6-2=2,$$

所以 a 和 b 存在. 将边 v_1u 染 a，边 vv_1 染 b. 不难验证，该染色是 G 的一个好的染色.

情形 2) u_1,u_2,u_3 中有两个顶点相同.

不妨设 $u_1=u_2$. 记 u_1,u_2 为 u，设 u 除 v_1,v_2 外的另两个邻点为 w_1,w_2. 令 $G'=G-v_1$，则 G'有一个好的染色 φ. 令 $a\in C\backslash(F(v_1u,u)\cup S_\varphi(v))$，$b\in C\backslash(F(vv_1,v)\cup S_\varphi(u)\cup\{a\})$. 由于 $d_{G'}(u)=d_{G'}(v)=3$，由引理 2 中 3)知，$|F(v_1u,u)|\leqslant 6$，$|F(vv_1,v)|\leqslant 6$，且 $\varphi(vv_2)\in F(v_1u,u)$，$\varphi(v_2u)\in F(vv_1,v)$. 所以

$$F(v_1u,u)\cup S_\varphi(v)=F(v_1u,u)\cup\{\varphi(vv_3),\varphi(vv_4)\},$$
$$F(vv_1,v)\cup S_\varphi(u)\cup\{a\}=F(vv_1,v)\cup\{\varphi(uw_1),\varphi(uw_2),a\}.$$

因为

$$|C\backslash F(v_1u,u)\cup\{\varphi(vv_3),\varphi(vv_4)\}|\geqslant 10-6-2=2,$$
$$|C\backslash F(vv_1,v)\cup\{\varphi(uw_1),\varphi(uw_2),a\}|\geqslant 10-6-3=1,$$

所以 a 和 b 存在. 将边 v_1u 染 a，边 vv_1 染 b. 不难验证，该染色是 G 的一个好的染色.

情形 3) u_1,u_2,u_3 为两两不同的顶点.

令 $G'=G-\{v,v_1,v_2,v_3\}$，则 G'有一个好的染色 φ.

先对边 v_1u_1,v_2u_2,v_3u_3 进行染色. 由于 v 关联的边还未染色，因此对于 $1\leqslant i\leqslant 3$，$A(v_iu_i)=C\backslash F(v_iu_i,u_i)$. 由于 $d_{G'}(u_i)=3$，由引理 2 中 3)知，$|F(v_iu_i,u_i)|\leqslant 6$，因此 $|A(v_iu_i)|\geqslant 10-6=4$. 又因为 $|A(v_1u_1)\cup A(v_2u_2)\cup A(v_3u_3)|\leqslant|C|=10$，所以存在 $i,j\in\{1,2,3\}$，$i\neq j$，使得 $A(v_iu_i)\cap A(v_ju_j)\neq\varnothing$. 不妨设 $A(v_1u_1)\cap A(v_2u_2)\neq\varnothing$，令 $a\in A(v_1u_1)\cap A(v_2u_2)$，并用 a 给边 v_1u_1,v_2u_2 染色，再取 $b\in A(v_3u_3)\backslash\{a\}$给边 v_3u_3 染色.

下面依次对边 vv_4,vv_1,vv_2,vv_3 进行染色. 先考虑边 vv_4. 令 $c\in C\backslash(F(vv_4,v_4)\cup\{a,b\})$. 由于 $d_{G'}(v_4)\leqslant 3$，由引理 2 知，$|F(vv_4,v_4)|\leqslant 6$，所以 c 存在，将边 vv_4 染 c. 对于边 vv_1，若 v_4 为 2-点，则令 $d\in C\backslash(S_\varphi(u_1)\cup S_\varphi(v_4)\cup\{a,b,c\})$，否则，令 $d\in C\backslash(S_\varphi(u_1)\cup\{a,b,c\})$. 因为 $|S_\varphi(u_1)|=3$，且 v_4 为 2-点时 $|S_\varphi(v_4)|=1$，所以 d 存在，将边 vv_1 染 d. 对于边 vv_2，若 v_4 为 2-点，设 u_4 为 v_4 除 v 外的邻点，令 $e\in C\backslash(S_\varphi(u_2)\cup\{\varphi(v_4u_4)\}\cup\{a,b,c,d\})$. 若 v_4 为 3-点，则当 $d\in S_\varphi(v_4)$时，颜色 $\beta\in S_\varphi(v_4)\backslash\{d\}$是 vv_2 的禁用色，此时令 $e\in C\backslash(S_\varphi(u_2)\cup\{a,b,c,d,\beta\})$；否则，令 $e\in C\backslash(S_\varphi(u_2)\cup\{a,b,c,d\})$. 若 v_4 为 4-点，令 $e\in C\backslash(S_\varphi(u_2)\cup\{a,b,c,d\})$. 由于 $|S_\varphi(u_2)|=3$，所以 e 存在，将边 vv_2 染 e. 最后考虑边 vv_3. 若 v_4 为 2-点，设 u_4 为 v_4 除 v 外的邻点，令 $f\in C\backslash(S_\varphi(u_3)\cup\{\varphi(v_4u_4)\}\cup\{a,b,c,d,e\})$. 若 v_4 为 3-点，当 $S_\varphi(v_4)$含有颜色 d 或 e 时，存在颜色 $\gamma\in S_\varphi(v_4)$是 vv_3 的禁用色，此时令 $f\in C\backslash(S_\varphi(u_3)\cup\{a,b,c,d,e,\gamma\})$；否则，令 $f\in C\backslash(S_\varphi(u_3)\cup\{a,b,c,d,e\})$. 若 v_4 为 4-点，当$\{d,e\}\subseteq S_\varphi(v_4)$时，存在颜色 $\zeta\in S_\varphi(v_4)$是 vv_3 的禁用色，此时令 $f\in C\backslash(S_\varphi(u_3)\cup\{a,b,c,d,e,\zeta\})$；否则，令 $f\in C\backslash(S_\varphi(u_3)\cup\{a,b,c,d,e\})$. 由于 $|S_\varphi(u_3)|=3$，所以 f 存在，将边 vv_3 染 f. 不难验证该染色是 G 的一个好的染色.

综上可见，上述 3 种情形均可得到 G 的一个好的染色，与 G 是极小反例矛盾. 证毕.

引理 8　4-点至多存在两个 3-邻点.

证明：设 $v\in V(G)$，且 $d_G(v)=4$. 令 v_1,v_2,v_3,v_4 为 v 的邻点，且 $d_G(v_1)=d_G(v_2)=d_G(v_3)=3$. 由引理 6 知，$v_1,v_2,v_3$ 互不相邻. 由引理 3 知，$d_G(v_4)\geqslant 2$. 由引理 3、引理 5 和引理 6 可知，v_1,v_2,v_3 在 G 中的邻点均为 4-点.

令 $G'=G-v$，则 G'有一个好的染色 φ，且 $|S_\varphi(v_1)|=|S_\varphi(v_2)|=|S_\varphi(v_3)|=2$. 对于 $1\leqslant i\leqslant 3$，由于 $d_{G'}(v_i)=2$，且 v_i 除 v 外的其余邻点度数为 4. 由引理 2 中 2)知，$d_{v_i}^2=0$，从而 $|F(vv_i,v_i)|\leqslant 2$.

下面依次对边 vv_1,vv_2,vv_3,vv_4 进行染色，根据 $d_G(v_4)$的值分 3 种情形讨论.

情形 1) $d_G(v_4)=2$.

令 $a\in C\backslash(F(vv_1,v_1)\cup S_\varphi(v_2)\cup S_\varphi(v_3)\cup S_\varphi(v_4))$，$b\in C\backslash(F(vv_2,v_2)\cup S_\varphi(v_1)\cup S_\varphi(v_3)\cup S_\varphi(v_4)\cup\{a\})$，$c\in C\backslash(F(vv_3,v_3)\cup S_\varphi(v_1)\cup S_\varphi(v_2)\cup S_\varphi(v_4)\cup\{a,b\})$，$d\in C\backslash(F(vv_4,v_4)\cup\{a,b,c\})$.

由于 $d_{G'}(v_4)=1$，由引理 2 中 1)知，$|F(vv_4,v_4)|\leqslant 4$. 又因为 $|S_\varphi(v_1)|=|S_\varphi(v_2)|=|S_\varphi(v_3)|=2$，$|S_\varphi(v_4)|=1$，且当 $1\leqslant i\leqslant 3$ 时，$|F(vv_i,v_i)|\leqslant 2$，而 $|C|=10$，因此 a,b,c,d 均存在. 将边 vv_1 染 a，边 vv_2 染 b，边 vv_3 染 c，边 vv_4 染 d，得到的染色记为 φ'. 此时，$S_{\varphi'}(v)=\{a,b,c,d\}$. 易见 $S_{\varphi'}(v_1)$ 中含颜色 a，但不含颜色 b,c，因此 $|S_{\varphi'}(v_1)\cap S_{\varphi'}(v)|\leqslant 2$，而 $|S_{\varphi'}(v_1)|=3$，所以 $|S_{\varphi'}(v_1)\backslash S_{\varphi'}(v)|\geqslant 1$. 又因为 $|S_{\varphi'}(v)\backslash S_{\varphi'}(v_1)|\geqslant 1$，所以 v 与 v_1 互斥. 同理，$S_{\varphi'}(v_2)$ 中含颜色 b，但不含颜色 a,c，$S_{\varphi'}(v_3)$ 中含颜色 c，但不含颜色 a,b，所以 v 与 v_2 互斥，v 与 v_3 互斥. 又由于 $S_{\varphi'}(v_4)$ 中不含颜色 a,b,c，因此 v 与 v_4 互斥. 易验证 φ' 是 G 的一个好的染色.

情形 2) $d_G(v_4)=3$.

令 $a\in C\backslash(F(vv_1,v_1)\cup S_\varphi(v_2)\cup S_\varphi(v_3)\cup S_\varphi(v_4))$，$b\in C\backslash(F(vv_2,v_2)\cup S_\varphi(v_1)\cup S_\varphi(v_3)\cup S_\varphi(v_4)\cup\{a\})$，$c\in C\backslash(F(vv_3,v_3)\cup S_\varphi(v_1)\cup S_\varphi(v_2)\cup\{a,b\})$，$d\in C\backslash(F(vv_4,v_4)\cup\{a,b,c\})$. 此时，$|S_\varphi(v_1)|=|S_\varphi(v_2)|=|S_\varphi(v_3)|=|S_\varphi(v_4)|=2$. 由于 $d_{G'}(v_4)=2$，由引理 2 中 2)知，$|F(vv_4,v_4)|\leqslant 4$，且对于 $1\leqslant i\leqslant 3$，$|F(vv_i,v_i)|\leqslant 2$，而 $|C|=10$，因此 a,b,c,d 均存在. 将边 vv_1 染 a，边 vv_2 染 b，边 vv_3 染 c，边 vv_4 染 d，得到的染色记为 φ'. 此时，$S_{\varphi'}(v)=\{a,b,c,d\}$. 由于 $S_{\varphi'}(v_1)$ 中含颜色 a，但不含颜色 b,c；$S_{\varphi'}(v_2)$ 中含颜色 b，但不含颜色 a,c；$S_{\varphi'}(v_3)$ 中含颜色 c，但不含颜色 a,b；$S_{\varphi'}(v_4)$ 中含颜色 d，但不含颜色 a,b. 所以 v 与 v_1,v_2,v_3 和 v_4 均是互斥的. 易验证 φ' 是 G 的一个好的染色.

情形 3) $d_G(v_4)=4$.

令 $a\in C\backslash(F(vv_1,v_1)\cup S_\varphi(v_2)\cup S_\varphi(v_3)\cup S_\varphi(v_4))$，$b\in C\backslash(F(vv_2,v_2)\cup S_\varphi(v_1)\cup S_\varphi(v_3)\cup\{a\})$，$c\in C\backslash(F(vv_3,v_3)\cup S_\varphi(v_1)\cup S_\varphi(v_2)\cup\{a,b\})$，$d\in C\backslash(F(vv_4,v_4)\cup\{a,b,c\})$. 此时，$|S_\varphi(v_1)|=|S_\varphi(v_2)|=|S_\varphi(v_3)|=2$，$|S_\varphi(v_4)|=3$. 由于 $d_{G'}(v_4)=3$，由引理 2 中 3)知，$|F(vv_4,v_4)|\leqslant 6$，且对于 $1\leqslant i\leqslant 3$，$|F(vv_i,v_i)|\leqslant 2$，而 $|C|=10$，因此 a,b,c,d 均存在. 将边 vv_1 染 a，边 vv_2 染 b，边 vv_3 染 c，边 vv_4 染 d，得到的染色记为 φ'. 此时，$S_{\varphi'}(v)=\{a,b,c,d\}$. 由于 $S_{\varphi'}(v_1)$ 中含颜色 a，但不含颜色 b,c；$S_{\varphi'}(v_2)$ 中含颜色 b，但不含颜色 a,c；$S_{\varphi'}(v_3)$ 中含颜色 c，但不含颜色 a,b. 所以 v 与 v_1,v_2 和 v_3 均是互斥的. 又 $S_{\varphi'}(v_4)$ 中不含颜色 a，但 $S_{\varphi'}(v)$ 中含颜色 a，且 $|S_{\varphi'}(v_4)|=|S_{\varphi'}(v)|$，所以 v 与 v_4 均互斥. 易验证 φ' 是 G 的一个好的染色.

综上可见，上述 3 种情形均可得到 G 的一个好的染色，与 G 是极小反例矛盾. 证毕.

引理 9 若 4-点有 2-邻点，则其无 3-邻点.

证明：设 $v\in V(G)$，且 $d_G(v)=4$. 令 v_1,v_2,v_3,v_4 为 v 的邻点，且 $d_G(v_1)=2$，$d_G(v_2)=3$. 令 w 为 v_1 除 v 外的另一个邻点，由引理 3～引理 6 可知 $d_G(w)=4$. 由引理 5 知，v_1 与 v_2 不相邻. 易知，v_3,v_4 可能为 2-点、3-点、4-点.

当 v 有 4-邻点时，不妨设 v_3 为 4-点. 令 $G'=G-v_1$，则 G' 有一个好的染色 φ，且 $|S_\varphi(v)|=|S_\varphi(w)|=3$. 令 $a\in C\backslash(F(v_1w,w)\cup S_\varphi(v))$，$b\in C\backslash(F(v_1v,v)\cup S_\varphi(w)\cup\{a\})$. 由于 $d_{G'}(w)=d_{G'}(v)=3$，但 $d_{G'}(v_3)=4$，由引理 2 中 3)知，$d_v^2\leqslant 2$，从而 $|F(v_1w,w)|\leqslant 6$，$|F(v_1v,v)|\leqslant 3+d_v^2\leqslant 5$. 所以 a,b 存在，将边 v_1w 染 a，边 vv_1 染 b. 不难验证，该染色是 G 的一个好的染色.

当 v 无 4-邻点时，由引理 7 和引理 8 知，v_3,v_4 中一个是 3-点、一个是 2-点，不妨设 v_3 为 3-点，v_4 为 2-点. 由引理 3～引理 6 知，v_3,v_4 的邻点均为 4-点. 令 $G'=G-v$，则 G' 有一个好的染色 φ. 令 $a\in C\backslash(F(vv_1,v_1)\cup S_\varphi(v_2)\cup S_\varphi(v_3)\cup S_\varphi(v_4))$，$b\in C\backslash(F(vv_4,v_4)\cup S_\varphi(v_1)\cup S_\varphi(v_2)\cup\{a\})$，$c\in C\backslash(F(vv_2,v_2)\cup S_\varphi(v_1)\cup S_\varphi(v_3)\cup S_\varphi(v_4)\cup\{a,b\})$，$d\in C\backslash(F(vv_3,v_3)\cup S_\varphi(v_1)\cup S_\varphi(v_4)\cup\{a,b,c\})$. 由于 $d_{G'}(v_1)=d_{G'}(v_4)=1$，因此由引理 2 中 1)知，$|F(vv_1,v_1)|\leqslant 4$，$|F(vv_4,v_4)|\leqslant 4$. 对于 $i\in\{2,3\}$，由于 $d_{G'}(v_i)=2$，且 v_i 除 v 外的其余邻点均为 4-点，因此 $d_{v_i}^2=0$，由引理 2 中 2)知，$|F(vv_i,v_i)|\leqslant 2$. 又因为 $|S_\varphi(v_1)|=|S_\varphi(v_4)|=1$，$|S_\varphi(v_2)|=|S_\varphi(v_3)|=2$，而 $|C|=10$，因此 a,b,c,d 均存在. 将边 vv_1 染 a，边 vv_4 染 b，边 vv_2 染 c，边 vv_3 染 d，得到的染色记为 φ'. 此时 $S_{\varphi'}(v)=\{a,b,c,d\}$. 由于 $S_{\varphi'}(v_2)$ 中含颜色 c，但不含颜色 a,b，$S_{\varphi'}(v_3)$ 中含颜色 d，但不含颜色 a,c，所以 v 与 v_2 和 v_3 互斥. 对于顶点 v_1,v_4，$S_{\varphi'}(v_1)\cap S_{\varphi'}(v)=\{a\}$，$S_{\varphi'}(v_4)\cap S_{\varphi'}(v)=\{b\}$，而 $|S_{\varphi'}(v_1)|=|S_{\varphi'}(v_4)|=2$，$|S_{\varphi'}(v)|=4$，所以 v 与 v_1 和 v_4 互斥. 因此该染色是 G 的一个好的染色.

上述两种情形均可得到 G 的一个好的染色，与 G 是极小反例矛盾. 证毕.

记有 i 个 2-邻点的 4-点为 4_i-点，其中 $i\in\{1,2\}$. 由引理 3～引理 5 可知，2-点的邻点均为 4-点. 下面分析 2-点的邻点的结构性质.

引理 10　2-点的两个 4-邻点至少有一个是 4_1-点.

证明：设 $v\in V(G)$ 且 $d_G(v)=2$. 令 u,w 为 v 的邻点，且 $d_G(u)=d_G(w)=4$. 令 u_1,u_2,u_3 为 u 除 v 外的其余 3 个邻点，w_1,w_2,w_3 为 w 除 v 外的其余 3 个邻点. 设 u,w 均不是 4_1-点，则 u,w 除 v 外至少还有一个 2-邻点. 不妨设 $d_G(u_1)=d_G(w_1)=2$，由引理 4 知，u_1 与 w_1 不相邻. 由引理 7 和引理 9 知，u_2,u_3,w_2,w_3 均为 4-点. 下面分两种情形讨论.

情形 1）$u_1=w_1$.

记 u_1,w_1 为 z. 令 $G'=G-z$，则 G' 有一个好的染色 φ，且 $|S_\varphi(w)|=|S_\varphi(u)|=3$. 令 $a\in C\setminus(F(uz,u)\cup S_\varphi(w))$，$b\in C\setminus(F(wz,w)\cup S_\varphi(u)\cup\{a\})$. 由于 $d_{G'}(u)=3$，则由引理 2 中 3)知，$|F(uz,u)|\leqslant 6$. 又由于 $d_{G'}(w)=3$，$d_{G'}(w_2)=d_{G'}(w_3)=4$，因此由引理 2 中 3)知，$d_w^3\leqslant 1$，从而 $|F(wz,w)|\leqslant 3+1\leqslant 4$. 因此，$a,b$ 存在，将边 uz 染 a，边 wz 染 b. 易验证 u,w,z 分别与其邻点互斥. 因此该染色是 G 的一个好的染色.

情形 2）$u_1\neq w_1$.

设 u_1 除 u 外的另一个邻点为 u_1'，w_1 除 w 外的另一个邻点为 w_1'. 由引理 3～引理 5 可知，u_1',w_1' 均为 4-点. 令 $G'=G-\{v,u_1,w_1\}$，则 G' 有一个好的染色 φ，且 $|S_\varphi(u)|=|S_\varphi(w)|=2$，$|S_\varphi(u_1')|=|S_\varphi(w_1')|=3$. 令 $a\in C\setminus(F(u_1u_1',u_1')\cup S_\varphi(u))$，$b\in C\setminus(F(w_1w_1',w_1')\cup S_\varphi(w))$，$c\in C\setminus(F(u_1u,u)\cup S_\varphi(u_1')\cup\{a\})$，$d\in C\setminus(F(w_1w,w)\cup S_\varphi(w_1')\cup\{b\})$，$e\in C\setminus(F(uv,u)\cup S_\varphi(w)\cup\{a,c,d\})$，$f\in C\setminus(F(wv,w)\cup S_\varphi(u)\cup\{b,c,d,e\})$. 由于 $d_{G'}(u_1')=d_{G'}(w_1')=3$，因此由引理 2 中 3)可知，有 $|F(u_1u_1',u_1')|\leqslant 6$，$|F((w_1w_1',w_1'))|\leqslant 6$. 又由于 $d_{G'}(u)=d_{G'}(w)=2$，而 $d_{G'}(u_2)=d_{G'}(u_3)=d_{G'}(w_2)=d_{G'}(w_3)=4$，因此由引理 2 中 2)可知，$d_u^2=d_w^2=0$，从而 $|F(u_1u,u)|\leqslant 2$，$|F(w_1w,w)|\leqslant 2$，$|F(uv,u)|\leqslant 2$，$|F(wv,w)|\leqslant 2$. 故 a,b,c,d,e,f 均存在. 将边 u_1u_1' 染 a，边 w_1w_1' 染 b，边 u_1u 染 c，边 w_1w 染 d，边 uv 染 e，边 wv 染 f. 易验证 u,v,w,u_1,w_1,u_1',w_1' 与其邻点均互斥. 因此该染色是 G 的一个好的染色.

上述两种情形均可得到 G 的一个好的染色，与 G 是极小反例矛盾. 证毕.

2.3　权转移

为完成定理的证明，在图 G 上进行权转移分析.

令 $|V(G)|=n$. 对每个顶点 $v\in V(G)$，定义 v 的初始权值 $\omega(v)=d(v)$，则初始权值之和为 $\sum_{v\in V(G)}w(v)=\sum_{v\in V(G)}d(v)<3\frac{1}{5}\times n$. 然后制定权转移规则，对权进行重新分配，在该过程中保持权值的总和不变. 设 ω'表示调整后的权函数. 将证明对任意顶点 $v\in V(G)$有 $\omega'(v)\geqslant 3\frac{1}{5}$，从而推出下列矛盾：

$$3\frac{1}{5}\times n>\sum_{v\in V(G)}\omega(v)=\sum_{v\in V(G)}\omega'(v)\geqslant 3\frac{1}{5}\times n. \tag{1}$$

权转移规则定义如下：

1）2-点从相邻的 4_1-点得到$\frac{4}{5}$；2）2-点从相邻的 4_2-点得到$\frac{2}{5}$；3）3-点从相邻的 4-点得到$\frac{1}{5}$.

权转移后，每个顶点的终权如下：若 v 是 2-点，则由引理 10 知，v 至少有一个 4_1-邻点. 根据权转移规则 1)和 2)，v 的终权 $\omega'(v)\geqslant 2+\frac{4}{5}+\frac{2}{5}=3\frac{1}{5}$. 若 v 是 3-点，则由引理 3、引理 5 和引理 6 知，v 的邻点均为 4-点. 根据权转移规则 3)，v 的终权 $\omega'(v)\geqslant 3+\frac{1}{5}\times 3=3\frac{3}{5}>3\frac{1}{5}$.

若 v 是 4-点，考虑 v 是 4_1-点、4_2-点及 v 不含 2-邻点 3 种情形.

(i) 若 v 是 4_1-点，则由引理 9 知，v 的其余 3 个邻点均为 4-点. 根据权转移规则 1)，v 的终权 $\omega'(v)\geqslant 4-\frac{4}{5}=3\frac{1}{5}$.

(ii) 若 v 是 4_2-点，则由引理 9 知，v 的其余两个邻点均为 4-点. 根据权转移规则 2)，v 的终权 $\omega'(v)\geqslant 4-\frac{2}{5}\times 2=3\frac{1}{5}$.

(iii) 若 v 不含 2-邻点，则由引理 8 知，v 至多含有两个 3-邻点. 根据权转移规则 3)，v 的终权 $\omega'(v)\geqslant 4-\frac{1}{5}\times 2=3\frac{3}{5}>3\frac{1}{5}$.

因此，任意顶点 $v\in V(G)$ 均有 $\omega'(v)\geqslant 3\frac{1}{5}$. 证毕.

参考文献

[1] GU J，WANG W F，WANG Y Q，et al. Strict Neighbor-Distinguishing Index of Subcubic Graphs [J]. Graphs and Combinatorics，2021，37(1)：355-368.

[2] PRZYBYŁO J，KWAŚNY J. On the Inclusion Chromatic Index of a Graph [J]. Journal of Graph Theory，2021，97(1)：5-20.

[3] ZHANG Z. The Smarandachely Adjacent Vertex Edge Coloring of Graphs [R]. Lanzhou：Lanzhou Jiaotong University，2008.

[4] 王鸿杰，朱恩强，李敬文. 图的Smarandachely邻点边色数的界 [J]. 数学的实践与认识，2017，47(1)：151-155. (WANG H J，ZHU E Q，LI J W. Bounds of Smarandachely Adjacent Vertex Edge Coloring of Graphs [J]. J Mathematics in Practice and Theory，2017，47(1)：151-155.)

[5] 刘信生，刘旺发，王志强. 图的Smarandachely邻点星边染色 [J]. 兰州大学学报(自然科学版)，2012，48(5)：94-97. (LIU X S，LIU W F，WANG Z Q. Smarandachely-Adjacent-Vertex Star Edge Coloring of Graphs [J]. Journal of Lanzhou University (Natural Science)，2012，48(5)：94-97.)

[6] 刘信生，刘旺发. 图的Smarandachely邻点无圈边色数的一个上界 [J]. 系统科学与数学，2013，33(5)：550-554. (LIU X S，LIU W F. An Upper Bound on the Smarandachely Adjacent-Vertex Acyclic Edge Coloring of Graphs [J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences，2013，33(5)：550-554.)

[7] 井普宁，王维凡，王艺桥，等. 平面图的严格邻点可区别染色 [J]. 中国科学：数学，2023，53(3)：523-542. (JING P N，WANG W F，WANG Y Q，et al. Strict Neighbor-Distinguishing Edge Coloring of Planar Graphs [J]. Scientia Sinica：Mathematica，2023，53(3)：523-542.)

[8] CHEN L L，LI Y Y. A New Proof for a Result on the Inclusion Chromatic Index of Subcubic Graphs [J]. Axioms，2022，11(1)：33-1-33-8.

[9] GU J，WANG Y Q，WANG W F，et al. Strict Neighbor-Distinguishing Index of K_4-Minor-Free Graphs [J]. Discrete Applied Mathematics，2023，329：87-95.

[10] CHEN L L，LI Y Y，ZHOU X Q. The Inclusion-Free Edge-Colorings of $(3,\Delta)$-Bipartite Graphs [J]. Discrete Applied Mathematics，2022，321：159-164.

[11] 彭燕，谈漪，陈莉莉. Halin图的无包含边染色 [J]. 华侨大学学报(自然科学版)，2024，45(6)：812-815. (PENG Y，TAN Y，CHEN L L. Inclusion-Free Edge Colorings of Halin Graph [J]. Journal of Huaqiao University (Natural Science)，2024，45(6)：812-815.)

[12] HUANG N G，CHEN L L. AVD Edge-Colorings of Cubic Halin Graphs [J]. AIMS Mathematics，2023，8(11)：27820-27839.

[13] HUANG N G，TAN Y，CHEN L L. On the Inclusion Chromatic Index of a Halin Graph [J]. Discrete Mathematics，2025，348(2)：114266-1-114266-9.

[14] WANG W F，JING P N，GU J，et al. Local Neighbor-Distinguishing Index of Graphs [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society，2023，46(2)：83-1-83-16.

(责任编辑：赵立芹)