doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024396

四阶非局部微分方程结点解的全局分歧

杨 鑫 哲
(西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710126)

摘要: 利用分歧方法, 研究四阶Kirchhoff型梁方程两点边值问题

$$\begin{cases} u''''(t) - M\left(\int_0^1 |u'|^2 \mathrm{d}t\right) u''(t) = \lambda f(t, u(t)), & t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases}$$

结点解的分歧行为, 其中$\lambda \in \mathbb{R}$是参数, M: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ 和 f: $[0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是光滑函数. 当$M$和$f$满足适当条件时, 获得了其结点解的存在性结果.

关键词: 特征值; Kirchhoff型梁方程; 全局分歧; 结点解

中图分类号: O175.8　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1671-5489(2025)04-1005-06

Global Bifurcation of Nodal Solutions for Nonlocal Fourth-Order Differential Equation

YANG Xinzhe
(*School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an* 710126, *China*)

Abstract: By using the bifurcation method, the author study the bifurcation behavior of nodal solutions for two-point boundary value problems of fourth-order Kirchhoff type beam equation

$$\begin{cases} u''''(t) - M\left(\int_0^1 |u'|^2 \mathrm{d}t\right) u''(t) = \lambda f(t, u(t)), & t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0, \end{cases}$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$ is a parameter, M: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ and f: $[0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are smooth functions. When M and f satisfy suitable conditions, the author obtain the existence results of their nodal solutions.

Keywords: eigenvalue; Kirchhoff type beam equation; global bifurcation; nodal solution

1 引言与主要结果

梁是工程建筑中的基本构件, 其静态形变是由四阶微分方程刻画的. 本文考虑四阶Kirchhoff型梁方程两点边值问题

$$\begin{cases} u''''(t) - M\left(\int_0^1 |u'|^2 \mathrm{d}t\right) u''(t) = \lambda f(t, u(t)), & t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中$\lambda \in \mathbb{R}$是参数, M: $[0,\infty) \to [0,\infty)$和$f$: $[0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是光滑函数. 方程(1)与Berger板模型[1]

收稿日期: 2024-10-15.
作者简介: 杨鑫哲(2001—), 男, 汉族, 硕士研究生, 从事常微分方程边值问题的研究, E-mail: yxz15386779036@163.com.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12061064; 12361040).

$$u_{tt}+\Delta^2 u+\left(Q+\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=e(x,u,u_t)$$

相关，还与一些描述梁在外力 e 和其他弹力作用下形变平衡状态的模型[2]有关.

修正型 d'Alembert 波动方程

$$\rho u_{tt}-\left(\frac{P_0}{h}+\frac{E}{2L}\int_0^L |u'|^2\mathrm{d}x\right)u_{xx}=e(x,u)$$

是一个二阶非局部方程，其中参数 E,ρ,h,L,P_0 都是正数并具有实际物理意义. 文献[3-5]研究了与生物动力学和物理学相关的 Kirchhoff 型模型.

方程(1)的一个显著特征是含有非局部项 $\int_0^1 |u'|^2\mathrm{d}t$，因此并不是逐点恒等的方程，而是一个非局部方程，给方程的可解性研究带来困难. 当不含非局部项时，关于四阶微分方程正解和结点解(即解的每个零点都是简单的)的存在性研究已有一些结果[6-9]. 例如，Ma[6]利用分歧理论研究了四阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} u''''(t)-\beta(t)u''(t)=a(t)f(u(t)), & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 \end{cases}$$

结点解的存在性，其中：$\beta\in C[0,1]$且$\beta(t)<\pi^2$；$\forall t\in[0,1]$，$a\in C([0,1],[0,\infty))$且在$[0,1]$的任意子区间上不恒为0；$f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$且对任意 $s\neq 0$，$f(s)s>0$.

目前对四阶非局部问题解的分歧行为研究报道较少. Wang[10]证明了在 f 次线性增长，$M(t)=a+bt$的特殊情况下四阶非局部问题正解的存在性. 注意正解可视为结点个数为0的一类特殊的结点解. 由于当边界条件为简单支撑时，四阶微分方程边值问题的正解具有凸性，但对于结点解没有类似的性质，因此给结点解的研究带来了实质性困难.

本文研究四阶 Kirchhoff 型梁方程两点边值问题(1)结点解的分歧行为. 由于 f 在无穷远处为次线性，导致全局分歧理论不能直接使用，因此本文将利用连通分支取极限的方法处理此类情形.

若 u,v 属于 Sobolev 空间 $X:=W^{2,2}(0,1)\cap W_0^{1,2}(0,1)$，则其上内积和范数分别为

$$(u,v)=\int_0^1 u''v''\mathrm{d}t,\qquad \|u\|=\left(\int_0^1 |u''|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

令 $E=W_0^{1,2}(0,1)$，其上的范数为

$$\|u\|_E=\left(\int_0^1 |u'|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

记 S_k^+ 为 X 中满足以下条件的函数集合：在开区间(0,1)内恰有$(k-1)$个结点(即非退化的零点)，且在 $t=0$ 附近取正. 记 $S_k^-=-S_k^+$，而 $S_k=S_k^+\cup S_k^-$. 在 X 中它们是互不相交的开集. 令 $\Phi_k^{\pm}=\mathbb{R}\times S_k^{\pm}$，$\Phi_k=\mathbb{R}\times S_k$.

本文总假设：

(H_1) $f(t,0)=0$，$\forall t\in(0,1)$，$a(x):=D_u f(t,0)>0$；

(H_2) $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f(t,u)}{u}=0$；

(H_3) 存在 $\kappa>0$，使得 $f(t,u)\geqslant\kappa u$，$\forall (t,u)\in(0,1)\times(0,\infty)$；

(H_4) 存在 $m_0>0$，使得 $M(t)\geqslant m_0$，$\forall t\geqslant 0$；

(H_5) 存在 $M_\infty>0$，使得 $\lim\limits_{t\to\infty}M(t)=M_\infty$.

本文的主要结果如下：

定理1 假设条件(H_1),(H_2)和(H_4)成立. 对每个 $k\in\mathbb{N}$ 和 $v\in\{+,-\}$，考虑问题(1)从$(\lambda_{k,M(0)}[a],0)$处发出的 S_k^v 型解的分支 $C_k^v\subset\Phi_k^v$.

1) 若条件(H_3)和(H_5)也满足，则连通分支 C_k^v 连接(∞,∞)；

2) 若 $\lim\limits_{t\to\infty}M(t)=\infty$，则 $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}C_k^v=[l,+\infty)$，其中 $l\leqslant\lambda_{k,M(0)}[a]$.

推论1 假设(H_1),(H_2)和(H_4)成立. 若还满足(H_3)和(H_5)或成立 $\lim\limits_{t\to\infty}M(t)=\infty$，则对每个

$k\in\mathbb{N}$ 和 $v\in\{+,-\}$，当 $\lambda>\lambda_{k,M(0)}[a]$时，问题(1)至少有一个 S_k^v 型结点解.

注 1 四阶微分方程边值问题与二阶边值问题有本质区别. 近年来，关于二阶非局部微分方程边值问题的正解和结点解的存在性和多解性研究已取得了丰富成果[11-13]. 但关于四阶非局部问题的研究目前报道还较少，可能是二阶微分方程的解具有凸性，研究解的存在性更便利. 此外，对于四阶微分方程，由非共轭理论可知极大值原理成立的区间是有界的[14].

注 2 当 $M(t)$恒为一个常数时，问题(1)即退化为一般的四阶微分方程两点边值问题，因此定理 1 相应推广了文献[8]中的定理 3.1.

2 预备知识

定义 1[15] 令 Y 是 Banach 空间，$\{C_n\,|\,n=1,2,\cdots\}$是 Y 中的一列子集，则$\{C_n\,|\,n=1,2,\cdots\}$的上极限 $\mathscr{D}$ 定义为

$$\mathscr{D}:=\limsup_{n\to\infty} C_n=\{x\in Y\,|\,\exists\{n_i\}\subset\mathbb{N},\ x_{n_i}\in C_{n_i}\text{ 使得 }x_{n_i}\to x\}.$$

定义 2[15] 集合 M 中的最大连通子集称为M 的连通分支.

引理 1[15] 令 Y 是 Banach 空间，$\{C_n\,|\,n=1,2,\cdots\}$是 Y 中的一列连通子集. 假设：

1) 存在 $z_n\in C_n(n=1,2,\cdots)$和 $z^*\in Y$，使得 $z_n\to z^*$；

2) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\infty$，其中 $r_n=\sup\{\,\|x\|\,|\,x\in C_n\}$；

3) 对每个 $R>0$，$(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_n)\cap B_R$ 都是 Y 中的相对紧集，其中

$$B_R=\{x\in X\,|\,\|x\|\leqslant R\}.$$

则存在一个无界连通分支 $\mathscr{C}\subset\mathscr{D}$ 且 $z^*\in\mathscr{C}$.

引理 2[6] 考虑特征值问题

$$\begin{cases} u''''(t)+\beta(t)u''(t)=\lambda\eta(t)u, & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0, \end{cases}\tag{2}$$

其中 $\beta\in C[0,1]$且 $\beta(t)<\pi^2$，$\forall t\in[0,1]$；$\eta\in C([0,1],[0,\infty))$且在$[0,1]$的任意子区间上不恒为 0. 则：

1) 问题(2)有无穷多个特征值，且

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k<\cdots\to\infty,\qquad k\to\infty;$$

2) 每个特征值 λ_k 唯一对应的特征函数 ϕ_k 在(0,1)内有$(k-1)$个简单零点，且在 0 点附近为正；

3) 给定[0,1]的任意子区间，从属于充分大特征值的特征函数在该子区间上一定改变符号；

4) 对于每个 $k\in\mathbb{N}$，λ_k 的代数重数为 1.

令

$$f(t,u)=a(t)u+\zeta_0(t,u),\qquad (t,u)\in[0,1]\times\mathbb{R},$$
$$f(t,u)=\zeta_1(t,u),\qquad (t,u)\in[0,1]\times\mathbb{R}.$$

由条件(H_1)和(H_2)计算可得

$$\lim_{\|u\|\to0}\frac{\zeta_0(t,u)}{\|u\|}=0,\qquad \lim_{\|u\|\to+\infty}\frac{\zeta_1(t,u)}{\|u\|}=0.$$

问题(1)等价于

$$\begin{cases} u''''(t)-M(0)u''=\left(M\left(\int_0^1|u'|^2\mathrm{d}t\right)-M(0)\right)u''+\lambda f(t,u), & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0. \end{cases}\tag{3}$$

考虑线性问题

$$\begin{cases} u''''(t)-Au''(t)=e(x), & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0. \end{cases}$$

对给定的 $A\in(0,\infty)$，定义线性算子 T_A：$L^2(0,1)\to X$ 为

$$T_A e = u.$$

令 $\mathscr{T}=T_A|_X$，则算子 $\mathscr{T}$: $X\to X$ 是全连续的[6]. 注意到 $u\in X$ 是方程(3)的解当且仅当 u 是下列算子方程的解：

$$u=\mathscr{T}[M(\|u\|_E^2)-M(0)]u''+\lambda\mathscr{T}_{M(0)}a(x)u+\lambda\mathscr{T}_{M(0)}(\zeta_0(\cdot,u)).$$

定义算子 F：$\mathbb{R}\times X\to X$ 为

$$F_1(\lambda,u)=[M(\|u\|_E^2)-M(0)]u''+\lambda a(x)u+\lambda(\zeta_0(\cdot,u)),$$
$$F_2(\lambda,u)=[M(\|u\|_E^2)-M_\infty]u''+\lambda(\zeta_1(\cdot,u)),$$

则成立

$$D_uF_1(\lambda,0)w=\lambda a(x)w,\qquad D_uF_2(\lambda,\infty)w=0.$$

注 3 将方程(3)在 $u=0$ 处线性化，得

$$\begin{cases} u''''-M(0)u''=\lambda a(t)u, & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0. \end{cases} \tag{4}$$

由引理2可知，问题(4)的特征值 $0<\lambda_{1,M(0)}[a]<\lambda_{2,M(0)}[a]<\cdots<\lambda_{k,M(0)}[a]<\cdots\to+\infty$，$k\to\infty$. 对每个 $k\in\mathbb{N}$，$\lambda_{k,M(0)}[a]$是简单的，对应的特征函数 ϕ_k 在$(0,1)$内恰好有$(k-1)$个简单零点，且在0点附近为正，满足 $\|\phi_k\|=1$.

引理 3[16] 假设(H_1),(H_2)和(H_4)成立，则问题(1)有一个分歧点为$(\lambda_{k,M(0)}[a],0)$. 而且在 $\mathbb{R}\times X$ 中存在两个分离的集合 $C_k^+\subset\Phi_k^+$ 和 $C_k^-\subset\Phi_k^-$，组成从$(\lambda_{k,M(0)}[a],0)$处分歧产生的分支 C_k，使得对每个$k\in\mathbb{N}$和 $v\in\{+,-\}$成立

$$\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}C_k^v\subset(0,\infty).$$

令

$$c^{[n]}(t)=\frac{1}{n},\qquad f^{[n]}(t,u)=c^{[n]}u+\zeta_1(t,u), \tag{5}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$. 下面考虑辅助问题：

$$\begin{cases} u''''(t)-M\left(\int_0^1|u'|^2\mathrm{d}t\right)u''(t)=\lambda f^{[n]}(t,u(t)), & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0. \end{cases} \tag{6}$$

注 4 将方程(6)在 $u=\infty$处线性化，得

$$\begin{cases} u''''-M(0)u''=\lambda c^{[n]}(t)u, & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0. \end{cases} \tag{7}$$

由引理2可知，问题(7)的特征值 $\lambda_{k,M_\infty}[c^{[n]}]$是简单的，其对应的特征函数 ψ_k 在$(0,1)$内恰好有$(k-1)$个简单零点，且在0点附近为正，满足 $\|\psi_k\|=1$.

引理 4 假设(H_2),(H_5)成立，则 $\lambda_{k,M_\infty}[c^{[n]}]$是问题(6)在无穷远处唯一的分歧点. 进一步，从$(\lambda_{k,M_\infty}[c^{[n]}],\infty)$处发出一条问题(6)的 S_k^v 型解的分支.

证明：令 $z=u/\|u\|_E^2$，则问题(6)等价于方程

$$z''''-M\left(\frac{1}{\|z\|_E^2}\right)z''=\lambda\|z\|_E^2 f^{[n]}\left(t,\frac{z}{\|z\|_E^2}\right)=\lambda\left[c^{[n]}(t)z+\|z\|_E^2 g\left(t,\frac{z}{\|z\|_E^2}\right)\right]. \tag{8}$$

将方程(8)在 $u=0$ 处线性化，得

$$\begin{cases} v''''-M_\infty v''=\lambda c^{[n]}(t)v, & t\in(0,1),\\ v(0)=v(1)=v''(0)=v''(1)=0, \end{cases}$$

其特征值为 $\lambda_{k,M_\infty}[c^{[n]}]$$(k=1,2,\cdots)$. 因为方程(8)在平凡解处产生的分歧等价于与问题(6)在无穷远处产生的分歧，所以结论得证.

3 主要结果的证明

下面证明定理1.

1) 由引理 3 和引理 4 可知，问题(6)存在从$(\lambda_{k,M(0)}[a],0)$处分歧产生的无界分支 $C_k^{v[n]}$，也是从$(\lambda_{k,M_\infty}[c^{[n]}],\infty)$处产生的无界连通分支. 若$(\lambda,u)\in C_k^{v[n]}$，则 $\lambda>0$. 首先证明 $C_k^{v[n]}$ 连接$(\lambda_{k,M(0)}[a],0)$和$(\lambda_{k,M_\infty}[c^{[n]}],\infty)$. 为此只需证明当 λ 充分大时，S_k^v 型解的不存在性.

事实上，若(λ,u)是问题(6)的解. 则

$$\begin{cases} u''''-M(\|u\|_E^2)u''=\lambda f^{[n]}(t,u(t)), & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0. \end{cases}$$

对某些 $k\in\mathbb{N}$，$\upsilon\in\{+,-\}$，反设存在序列$\{(\eta_m,u_m)\}\subset S_k^v$，$\eta_m\to\infty$，使得

$$u_m''''-M(\|u_m\|_E^2)u_m''=\eta_n\frac{f^{[n]}(t,u_m)}{u_m}u_m,\qquad t\in(0,1).$$

因为

$$\eta_m\frac{f^{[n]}(t,u_m)}{u_m}\geqslant\eta_m\kappa,\qquad m\to\infty,$$

所以当 m 充分大时，u_m 在(0,1)内必变号无数次，而这与 $u_m\in S_k^v$ 矛盾. 因此证得了当 λ 充分大时，不存在 S_k^v 型解.

在引理 1 的条件 1)中选取 $z^*=(\lambda_{k,M(0)}[a],0)$即可. 显然

$$r_n=\sup\{|\lambda|+\|y\|\mid(\lambda,y)\in C_k^{v[n]}\}=\infty$$

成立，则引理 1 中条件 2)成立. 由 Arzela-Ascoli 定理和 $f^{[n]}$ 的定义即得引理 1 中条件 3)也成立. 因此，$\{C_k^{v[n]}\}$的上极限 $\mathscr{D}$ 中包含一个无界连通分支 C_k^v，且$(\lambda_{k,M(0)}[a],0)\in C_k^v$.

下面证明 $\sup\{\lambda\mid(\lambda,y)\in C_k^v\}=\infty$. 反设若 $\sup\{\lambda\mid(\lambda,y)\in C_k^v\}<\infty$，则存在序列$\{(\mu_m,y_m)\}\subset\{C_k^v\}$，使得

$$\lim_{m\to\infty}\|y_m\|=\infty,\qquad|\mu_m|\leqslant c_0,$$

其中常数 c_0 与 k 无关. 因为$(\mu_m,y_m)\in\{C_k^v\}$，所以成立

$$\begin{cases} y_m''''-M(\|y_m\|_E^2)y_m''=\mu_m\dfrac{f(t,y_m)}{y_m}y_m, & t\in(0,1),\\ y_m(0)=y_m(1)=y_m''(0)=y_m''(1)=0. \end{cases}\tag{9}$$

令 $v_m(t)=y_m(t)/\|y_m\|$，则 $\|v_m\|=1$. 因此选取收敛子列并重新编号，存在$(\mu_*,v_*)\in[0,c_0]\times X$，且

$$\|v_*\|=1,\tag{10}$$

使得

$$\lim_{m\to\infty}(\mu_m,v_m)=(\mu_*,v_*).$$

由方程(9)和条件(H_2)可知下式成立：

$$\begin{cases} v_*''''-M(\|v_*\|_E^2)v_*''=\mu_* * 0, & t\in(0,1),\\ v_*(0)=v_*(1)=v_*''(0)=v_*''(1)=0. \end{cases}$$

则 $\forall t\in[0,1]$，v_* 恒为 0，与式(10)矛盾. 因此 $\sup\{\lambda\mid(\lambda,y)\in C_k^v\}=\infty$. 故连通分支 C_k^v 从$(\lambda_{k,M(0)}[a],0)$发出并连接(∞,∞).

2) 对给定的 $k\in\mathbb{N}$ 和 $v\in\{+,-\}$，问题(1)仍存在从$(\lambda_{k,M(0)}[a],0)$处分歧产生的无界分支 C_k^v. 但若 $\lim\limits_{t\to\infty}M(t)=\infty$，则在无穷远处是不产生分歧的. 为此，将证明问题(1)的任意 S_k^v 型解 u 都有先验估计.

令(λ,u)是问题(1)的 S_k^v 型解. 在问题(1)中选取 u 为试验函数，可得

$$\|u\|^2+M(\|u\|_E^2)\|u\|_E^2=\lambda\int_0^1 f(t,u)u\,\mathrm{d}t.$$

由条件(H_2)知存在 $K>0$，使得 $f(t,u)\leqslant Ku$，$\forall u\geqslant0$. 因此

$$\|u\|_E^2+M(\|u\|_E^2)\|u\|_E^2\leqslant\|u\|^2+M(\|u\|_E^2)\|u\|_E^2\leqslant\lambda K\int_0^1u^2\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{\lambda K}{\eta_1}\|u\|_E^2,\tag{11}$$

即

$$1+M(\|u\|_E^2)\leqslant\frac{\lambda K}{\eta_1},$$

其中 η_1 为以下问题的主特征值：

$$\begin{cases} -u''=\eta u, & t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=0. \end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{t\to\infty}M(t)=\infty$，所以存在 $C_\eta>0$，使得 $\|u\|_E^2\leqslant C_\eta$. 故由式(11)可知 $\|u\|^2$ 是有先验界的. 最后由于 C_k^v 是无界连通分支，故 $\mathrm{Proj}_{\mathbb{R}}C_k^v=[l,+\infty)$，其中 $l\leqslant\lambda_{k,M(0)}[a]$. 定理1证毕.

参考文献

[1] BERGER H M. A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates [J]. Journal of Applied Mechanics，1955，22(4)：465-472.

[2] AROSIO A. A Geometrical Nonlinear Correction to the Timoshenko Beam Equation [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2001，47(2)：729-740.

[3] WU X. Existence of Nontrivial Solutions and High Energy Solutions for Schrödinger-Kirchhoff-Type Equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2011，12(2)：1278-1287.

[4] ZHANG J，TANG X H，ZHANG W. Existence of Multiple Solutions of Kirchhoff Type Equation with Sign-Changing Potential [J]. Applied Mathematics and Computation，2014，242(1)：491-499.

[5] CHEN S T，TANG X H. Infinitely Many Solutions for Super-quadratic Kirchhoff-Type Equations with Sign-Changing Potential [J]. Applied Mathematics Letters，2017，67(1)：40-45.

[6] MA R Y. Nodal Solutions of Boundary Value Problems of Fourth-Order Ordinary Differential Equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2006，319(2)：424-434.

[7] ZHANG X G，LIU L S. Positive Solutions of Fourth-Order Four-Point Boundary Value Problems with p-Laplacian Operator [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2007，336(2)：1414-1423.

[8] MA R Y. Nodal Solutions for a Fourth-Order Two-Point Boundary Value Problem [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2006，314(1)：254-265.

[9] RYNNE B P. Infinitely Many Solutions of Superlinear Fourth Order Boundary Value Problems [J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis，2002，19(2)：303-312.

[10] WANG J X. Existence and Uniqueness of Positive Solutions for Kirchhoff Type Beam Equations [J/OL]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations，(2020-10-31)[2024-10-08]. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2020.1.61.

[11] AMBROSETTI A，ARCOYA D. Positive Solutions of Elliptic Kirchhoff Equations [J]. Advanced Nonlinear Studies，2017，17(1)：3-15.

[12] FIGUEIREDO G M，MORALES-RODRIGO C，SANTOS JÚNIOR J R. Study of a Nonlinear Kirchhoff Equation with Non-homogeneous Material [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2014，416(2)：597-608.

[13] LIU F，LUO H，DAI G W. Global Bifurcation and Nodal Solutions for Homogeneous Kirchhoff Type Equations [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations，2020，2020：29-1-29-13.

[14] FURTADO M F，DA SILVA J P P. Positive Solution for an Indefinite Fourth-Order Nonlocal Problem [J]. Israel Journal of Mathematics，2021，241(2)：991-1000.

[15] MA R Y，AN Y L. Global Structure of Positive Solutions for Superlinear Second Order m-Point Boundary Value Problems [J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis，2009，34(2)：279-290.

[16] MA R Y，YAN M，ZHANG T T. Nodal Solutions for a Nonlocal Fourth Order Equation of Kirchhoff Type [J]. Applied Mathematics Letters，2025，160：109292-1-109292-6.

(责任编辑：赵立芹)