doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024401

带粗糙核的参数型 Marcinkiewicz 积分在变指数中心 Morrey 空间上的有界性

杨沿奇，杨潞潞，陶双平
（西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070）

摘要： 用变指数中心 Morrey 空间上函数分解和分层估计方法，并借助带粗糙核的参数型 Marcinkiewicz 积分算子在变指数 Lebesgue 空间上的有界性，给出该类算子在变指数中心 Morrey 空间上的有界性.

关键词： 参数型 Marcinkiewicz 积分；变指数中心 Morrey 空间；有界性；粗糙核
中图分类号： O174.2　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671-5489(2025)04-1011-07

Boundedness of Parameterized Marcinkiewicz Integrals with Rough Kernels on Central Morrey Spaces with Variable Exponent

YANG Yanqi, YANG Lulu, TAO Shuangping
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: By using the function decomposition of the central Morrey spaces with variable exponent and hierarchical estimation methods, and with the help of the boundedness of the parameterized Marcinkiewicz integral operators with rough kernels on the Lebesgue spaces with variable exponent, we gave the boundedness on the central Morrey spaces with variable exponent.

Keywords: parameterized Marcinkiewicz integral; central Morrey spaces with variable exponent; boundedness; rough kernel

目前关于 Marcinkiewicz 积分在一些经典函数空间上的有界性研究已有很多结果. 例如：Stein[1] 首次提出了 $\mathbb{R}^n$ 上与 Littlewood-Paley g-函数相关的 Marcinkiewicz 积分，并证明了它是 (p,p) 型 $(1<p<2)$ 和弱(1,1)型；当 $\Omega\in S^{n-1}$ 且连续可微时，Benedek 等[2] 证明了 μ_Ω^ρ 是 (p,p) 型；Ding 等[3] 证明了一类具有粗糙核的 Marcinkiewicz 积分的加权 L^p 有界性；Ding 等[4] 证明了 Hardy 空间上的 Marcinkiewicz 积分的 L^p 有界性；陈冬香等[5] 证明了当 $\Omega\in \mathrm{Lip}_\beta(S^{n-1})$ $(0<\beta\leqslant 1)$ 时，由 Marcinkiewicz 积分和 Lipschitz 生成的交换子从 Lebesgue 空间到 Triebel-Lizorkin 空间是有界的；Chen 等[6] 证明了当 Ω 是粗糙核时，Marcinkiewicz 积分算子在 Herz 空间上是有界的；陆善镇等[7] 证明了当 $\Omega\in L^1(S^{n-1})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的零次齐次函数且满足 L^q-Dini 条件时，Marcinkiewicz 积分交换子是从 Lebesgue 空间到 Triebel-Lizorkin 空间有界的；王洪彬等[8] 证明了当 $\Omega\in \mathrm{Lip}_\beta(S^{n-1})$ $(0<\beta\leqslant 1)$ 是零次齐次函数且 $\int_{S^{n-1}}\Omega(x')\mathrm{d}x'=0$ 时，Marcinkiewicz 积分及其交换子在变指标 Lebesgue 空间上的有界性；

收稿日期： 2024-10-15.　**网络首发日期：** 2025-05-06.
第一作者简介： 杨沿奇(1991—)，女，汉族，博士，副教授，从事调和分析及其应用的研究，E-mail：yangyq@nwnu.edu.cn.
基金项目： 国家自然科学基金地区基金(批准号：12361018)、西北师范大学博士科研启动基金(批准号：202003101203)和西北师范大学青年教师科研能力提升计划(骨干计划)项目(批准号：NWNU-LKQN2021-03).
网络首发地址： https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20250430.1127.001.

Wang[9]证明了当 $\Omega\in \mathrm{Lip}_\beta(S^{n-1})(0<\beta\leqslant 1)$时，Marcinkiewicz 积分算子及其交换子从变指标 Herz-Hardy空间到变指标 Herz 空间是有界的；王洪彬[10]证明了当 $\Omega\in \mathrm{Lip}_\beta(S^{n-1})(0<\beta\leqslant 1/2)$时，Marcinkiewicz 积分算子从变指标 Herz-Hardy 空间到变指标 Herz 空间是有界的；陶双平等[11]证明了当 $\Omega\in \mathrm{Lip}_\beta(S^{n-1})(0<\beta\leqslant 1)$时，Marcinkiewicz 积分算子及其交换子在变指标 Morrey 空间上是有界的；张爱翠等[12]研究了一类带粗糙核的参数型 Marcinkiewicz 积分算子与 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$函数生成的交换子 $\mu_{\Omega,b}^{\rho}$在齐次 Morrey-Herz 空间 $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$上的有界性；韦营营等[13]证明了 Marcinkiewicz 积分交换子在变指标 Herz Triebel-Lizorkin 空间上的有界性. Mizuta 等[14]引入了变指数非齐次中心 Morrey 空间；Fu 等[15]引入了变指数中心 BMO 空间和中心 Morrey 空间，并研究了某些经典算子的有界性.

受上述研究结果的启发，本文研究参数型 Marcinkiewicz 积分算子在变指数中心 Morrey 空间上的有界性. 本文 C 表示与参数无关的常数，在不同之处可取不同值. 用$|A|$和 χ_A 分别表示可测集合 $A\subset\mathbb{R}^n$ 的 Lebesgue 测度及其上的特征函数，符号 $f\approx g$ 表示存在常数 $C_1,C_2>0$，使得 $C_1 g\leqslant f\leqslant C_2 g$.

1 预备知识

空间 $L_{\mathrm{loc}}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$定义为 $L_{\mathrm{loc}}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n):=\{f: f\chi_K\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$，紧致子集 $K\subset\mathbb{R}^n\}$. 记 $p(\cdot): \mathbb{R}^n\to(0,\infty)$，则

$$p^-:=\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^n} p(x)>1,\qquad p^+:=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} p(x).$$

集合 $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$包含所有满足 $p^->1$ 和 $p^+<\infty$的 $p(\cdot)$；$\mathscr{P}_0(\mathbb{R}^n)$包含所有满足 $p^->0$ 和 $p^+<\infty$的 $p(\cdot)$. 对于 $p(\cdot)\in\mathscr{P}_0(\mathbb{R}^n)$，类似可定义空间 $p'(\cdot)$. 记 $p'(\cdot)$为 $p(\cdot)$的共轭指数，即 $1/p(\cdot)+1/p'(\cdot)=1$.

设 $L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$是$\mathbb{R}^n$ 上所有局部可积函数的集合，给定一个函数 $f\in L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$，则 Hardy-Littlewood 极大算子 M 定义为

$$Mf(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)}|f(y)|\,\mathrm{d}y,\qquad \forall x\in\mathbb{R}^n,$$

这里

$$B_r(x)=\{y\in\mathbb{R}^n: |x-y|<r\}.$$

定义 1[15] 设 $p(\cdot)$是定义在$\mathbb{R}^n$ 上取值于$[1,\infty)$内的可测函数，则变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$定义为

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n):=\left\{f\text{ 是}\mathbb{R}^n\text{ 上的可测函数}: \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x<\infty\right\}.$$

显然 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$是一个 Banach 函数空间，其中

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}:=\inf\left\{\lambda>0: \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant 1\right\}.$$

定义 2[15] 设 $q(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$，$\lambda\in\mathbb{R}$，则变指数中心 Morrey 空间定义为

$$\dot{\mathscr{B}}^{q(\cdot),\lambda}(\mathbb{R}^n)=\{f\in L_{\mathrm{loc}}^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n): \|f\|_{\dot{\mathscr{B}}^{q(\cdot),\lambda}(\mathbb{R}^n)}<\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{\dot{\mathscr{B}}^{q(\cdot),\lambda}(\mathbb{R}^n)}=\sup_{R>0}\frac{\|f\chi_{B(0,R)}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{|B(0,R)|^{\lambda}\|\chi_{B(0,R)}\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}.$$

定义 3[16] 给定函数 $p(\cdot): \Omega\to\mathbb{R}^n$，若存在常数 $C>0$，使得

$$|p(x)-p(y)|\leqslant\frac{C}{-\log(|x-y|)},\quad x,y\in\Omega,\quad |x-y|\leqslant\frac{1}{2}\tag{1}$$

成立，则称 $p(\cdot)$是局部 log-Hölder 连续的，并记 $p(\cdot)\in\mathrm{LH}_0$. 若存在 $C>0$，使得对所有的 $x\in\mathbb{R}^n$，有

$$|p(x)-p(0)|\leqslant\frac{C}{\log(\mathrm{e}+1/|x|)},\tag{2}$$

则称 $p(\cdot)$在原点处是 log-Hölder 连续的. 当集合 Ω 无界时，若存在常数 $C>0$ 和 $p_\infty\in\mathbb{R}$，使得

$$|p(x)-p_\infty|\leqslant\frac{C}{\log(\mathrm{e}+|x|)},\qquad x\in\Omega \tag{3}$$

成立，则称 $p(\cdot)$在无穷远处 log-Hölder 连续，并记 $p(\cdot)\in \mathrm{LH}_\infty$. 若 $p(\cdot)\in \mathrm{LH}_0\cap\mathrm{LH}_\infty$，则称 $p(\cdot)$是全局 log-Hölder 连续的，并记 $p(\cdot)\in\mathrm{LH}$.

下列条件与条件(3)等价：

$$|p(x)-p(y)|\leqslant\frac{C}{\log(\mathrm{e}+|x|)},\quad x,y\in\Omega,\quad |y|>|x|, \tag{4}$$

当集合 Ω 有界时，易验证条件(1)蕴含条件(4).

定义 4[12]　设 S^{n-1} 为 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$上具有标准 Lebesgue 测度的单位球面，$\Omega\in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$是零次齐次函数，且满足

$$\int_{S^{n-1}}\Omega(x')\mathrm{d}\delta(x')=0,$$

其中 $x'=\frac{x}{|x|}$，$x\neq 0$. 带粗糙核的参数型 Marcinkiewicz 积分算子定义为

$$\mu_\Omega^\rho(f)(x)=\left(\int_0^\infty |F_{\Omega,t}^\rho(x)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^{2\rho+1}}\right)^{1/2},$$

其中

$$F_{\Omega,t}^\rho(x)=\int_{|x-y|\leqslant t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}}f(y)\mathrm{d}y.$$

引理 1(**广义 Hölder 不等式**)[17]　设 $p(\cdot),p_1(\cdot),p_2(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$，则：

1) 对任意的 $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$，$g\in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$，有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant r_p\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

其中

$$r_p=1+\frac{1}{p^-}-\frac{1}{p^+};$$

2) 对任意的 $f\in L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$，$g\in L^{p'_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$，若$\frac{1}{p(x)}=\frac{1}{p_1(x)}+\frac{1}{p_2(x)}$，则

$$\|f(x)g(x)\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leqslant r_{p_1,p_2}\|f\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^{p'_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

其中

$$r_{p_1,p_2}=\left(1+\frac{1}{p^-}-\frac{1}{p^+}\right)^{1/p^-}.$$

引理 2[18]　设 $p(\cdot)\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$，则存在常数 $C>0$，使得对任意的球 $B\in\mathbb{R}^n$，有

$$C^{-1}\leqslant\frac{1}{|B|}\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C.$$

引理 3[18]　若 $p(\cdot)\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$，则存在常数 $\delta_1,\delta_2,C>0$，使得对所有的球 $B\subset\mathbb{R}^n$ 以及可测集 $S\subset B$，有

$$\frac{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_S\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\leqslant C\frac{|B|}{|S|},\quad\frac{\|\chi_S\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\leqslant C\left(\frac{|S|}{|B|}\right)^{\delta_1},\quad\frac{\|\chi_S\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\leqslant C\left(\frac{|S|}{|B|}\right)^{\delta_2}.$$

引理 4[19]　设 $p(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)\cap\mathrm{LH}$，则对每个立方体(或球体)$Q\subset\mathbb{R}^n$，有

$$\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\approx\begin{cases}|Q|^{1/p(x)}, & |Q|\leqslant 2^n,\quad x\in Q,\\ |Q|^{1/p(\infty)}, & |Q|\geqslant 1,\end{cases}$$

其中 $p(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}p(x)$.

2　主要结果

定理 1　设 $\Omega\in L^s(S^{n-1})$，其中 $1\leqslant s<\infty$，$0<\rho<\frac{n}{3s}$，μ_Ω^ρ 是一个参数型的 Marcinkiewicz 积分算

子，假设

$$\frac{1}{p_2(\cdot)}+\frac{1}{s}=\frac{1}{p_1'(\cdot)},\qquad p_1(\cdot),p_2(\cdot),q(\cdot)\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)\cap\mathrm{LH},$$

$$\frac{1}{q(\cdot)}=\frac{1}{p_1(\cdot)}+\frac{1}{p_2(\cdot)},\qquad \lambda_1<-1,$$

则 μ_Ω^ρ 是从 $\dot{\mathscr{B}}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\dot{\mathscr{B}}^{q(\cdot),\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子.

对任意给定的 $R>0$，记 $B(0,R)$ 为 B，要证明定理1，只需证明：

$$\|\mu_\Omega^\rho(f)\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C|B|^{\lambda_1}\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{\dot{\mathscr{B}}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)},$$

其中 C 是一个与 R 无关的常数.

证明：首先，将 $f(x)$ 分解为 f_1 和 f_2 两部分：$f_1=f\chi_{2B}$，$f_2=f\chi_{(2B)^c}$. 利用 Minkowski 不等式，记

$$\|\mu_\Omega^\rho(f)\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leqslant\|\mu_\Omega^\rho(f_1)\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}+\|\mu_\Omega^\rho(f_2)\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}=I_1+I_2.$$

对于 I_1，由于 μ_Ω^ρ 是从 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 有界的[20]. 因此由 $\dfrac{1}{q(\cdot)}=\dfrac{1}{p_1(\cdot)}+\dfrac{1}{p_2(\cdot)}$ 和引理4，可得

$$\begin{aligned}I_1&\leqslant C\|\mu_\Omega^\rho(f_1)\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|f\chi_{2B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leqslant\\&C\|f\|_{\dot{\mathscr{B}}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}|2B|^{\lambda_1}\|\chi_{2B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leqslant\\&C|B|^{\lambda_1}\|f\|_{\dot{\mathscr{B}}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

其中

$$\|\chi_B\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\approx|B|^{1/p_1(\cdot)+1/p_2(\cdot)}=|B|^{1/q(\cdot)}\approx\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

下面估计 I_2，记

$$\begin{aligned}|\mu_\Omega^\rho(f\chi_{(2B)^c})(x)|&=\left(\int_0^\infty\left|\int_{|x-y|\leqslant t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}}f\chi_{(2B)^c}\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^{2\rho+1}}\right)^{1/2}\leqslant\\&\left(\int_0^{|x|+|y|}\left|\int_{|x-y|\leqslant t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}}f\chi_{(2B)^c}\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^{2\rho+1}}\right)^{1/2}+\\&\left(\int_{|x|+|y|}^\infty\left|\int_{|x-y|\leqslant t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\rho}}f\chi_{(2B)^c}\mathrm{d}y\right|^2\frac{\mathrm{d}t}{t^{2\rho+1}}\right)^{1/2}=J_1+J_2.\end{aligned}$$

利用 Minkowski 不等式，可得

$$\begin{aligned}J_1&\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}}|f\chi_{(2B)^c}|\left(\int_{|x-y|\leqslant t\leqslant|x|+|y|}\frac{1}{t^{2\rho+1}}\mathrm{d}t\right)^{1/2}\mathrm{d}y\leqslant\\&\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}}|f\chi_{(2B)^c}|\left|\frac{1}{|x-y|^{2\rho}}-\frac{1}{(|x|+|y|)^{2\rho}}\right|^{1/2}\mathrm{d}y=\\&\int_{(2B)^c}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}}|f(y)|\left|\frac{1}{|x-y|^{2\rho}}-\frac{1}{(|x|+|y|)^{2\rho}}\right|^{1/2}\mathrm{d}y\leqslant\\&\sum_{k=1}^\infty\int_{2^{k+1}B\backslash 2^kB}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}}|f(y)|\left|\frac{1}{|x-y|^{2\rho}}-\frac{1}{(|x|+|y|)^{2\rho}}\right|^{1/2}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

当 $x\in B$，$y\in 2^{k+1}B\backslash 2^kB$，$k\geqslant1$，$k\in N^*$ 时，有

$$\left(\frac{1}{|x-y|^{2\rho}}\right)^2+\left(\frac{1}{(|x|+|y|)^{2\rho}}\right)^2\geqslant2\left(\frac{1}{|x-y|^{2\rho}}\,\frac{1}{(|x|+|y|)^{2\rho}}\right),$$

$$\left(\frac{1}{|x-y|^{2\rho}}\right)^2+\left(\frac{1}{(|x|+|y|)^{2\rho}}\right)^2\geqslant\frac{1}{|x-y|^{2\rho}}\,\frac{1}{(|x|+|y|)^{2\rho}},$$

$$\left(\frac{1}{|x-y|^{2\rho}}\right)^2(|x|+|y|)^{2\rho}+\frac{1}{(|x|+|y|)^{2\rho}}\geqslant\frac{1}{|x-y|^{2\rho}},$$

$$\left(\frac{1}{|x-y|^{2\rho}}\right)^2(|x|+|y|)^{2\rho}\geqslant\frac{1}{|x-y|^{2\rho}}-\frac{1}{(|x|+|y|)^{2\rho}},$$

因此

$$\frac{1}{|x-y|^{2\rho}}-\frac{1}{(|x|+|y|)^{2\rho}}\leqslant\left(\frac{1}{|x-y|^{2\rho}}\right)^2(|x|+|y|)^{2\rho},$$

从而可得

$$J_1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^kB}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}}|f(y)|\frac{(|x|+|y|)^{\rho}}{|x-y|^{2\rho}}\mathrm{d}y \leqslant$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^kB}|\Omega(x-y)||f(y)|\frac{(|x|+|y|)^{\rho}}{|x-y|^{n+\rho}}\mathrm{d}y \leqslant$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}(R+2^{k+1}R)^{\rho}(2^{k-1}R)^{-n-\rho}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^kB}|\Omega(x-y)||f(y)|\mathrm{d}y,$$

其中

$$\int_{2^{k+1}B\backslash 2^kB}|\Omega(x-y)||f(y)|\mathrm{d}y \leqslant C\|\Omega(x-y)\chi_{2^{k+1}B}(y)\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|f\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$C\|\Omega(x-y)\chi_{2^{k+1}B}(y)\|_{L^{s}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{2^{k+1}B}(y)\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|f\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

对于 $x\in B$ 及 $y\in 2^{k+1}B$，$x-y\in 2^{k+2}B$. 由 Ω 是零次齐次的且 $\Omega\in L^s(S^{n-1})$，可得

$$\|\Omega(x-y)\chi_{2^{k+1}B}(y)\|_{L^{s}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{2^{k+1}B}|\Omega(x-y)|^s\mathrm{d}y\right)^{1/s} \leqslant \left(\int_{2^{k+2}B}|\Omega(z)|^s\mathrm{d}y\right)^{1/s} =$$
$$\left(\int_0^{2^{k+2}R}\int_{S^{n-1}}|\Omega(z')|^s\mathrm{d}\sigma(z')r^{n-1}\mathrm{d}r\right)^{1/s} =$$
$$C\|\Omega\|_{L^s(S^{n-1})}|2^kB|^{1/s}.$$

因此，有

$$J_1 \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}(R+2^{k+1}R)^{\rho}(2^{k-1}R)^{-n-\rho}\|\Omega\|_{L^s(S^{n-1})}|2^kB|^{1/s}\|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|f\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$C\sum_{k=1}^{\infty}(2^{k+2}R)^{\rho}(2^{k-1}R)^{-n-\rho}|2^kB|^{1/s}\|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\cdot$$
$$\|f\|_{\dot{\mathscr{B}}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}|2^{k+1}B|^{\lambda_1}\|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$
$$C\sum_{k=1}^{\infty}(2^{k+2}R)^{\rho}(2^{k-1}R)^{-n-\rho}|2^kB|^{1/s}\|f\|_{\dot{\mathscr{B}}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}|2^{k+1}B|^{\lambda_1}\|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\cdot$$
$$\|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}|2^{k+1}B|^{-1/s} \leqslant$$
$$C\sum_{k=1}^{\infty}(2^{k+2}R)^{\rho}(2^{k-1}R)^{-n-\rho}|2^kB|^{1/s}\|f\|_{\dot{\mathscr{B}}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}|2^{k+1}B|^{\lambda_1}|2^{k+1}B||2^{k+1}B|^{-1/s} \leqslant$$
$$C\|f\|_{\dot{\mathscr{B}}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}|B|^{\lambda_1}\sum_{k=1}^{\infty}2^{-(n+\rho)(k-1)+n(\lambda_1+1)(k+1)-(n/s)(k+1)+nk/s+(k+2)\rho} \leqslant$$
$$C\|f\|_{\dot{\mathscr{B}}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}|B|^{\lambda_1}\sum_{k=1}^{\infty}2^{-n(k-1)+n(\lambda_1+1)(k+1)-n/s+3\rho} \leqslant C|B|^{\lambda_1}\|f\|_{\dot{\mathscr{B}}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}.$$

当 $|2^{k+1}B|\leqslant 2^n$，$x\in 2^{k+1}B$ 时，由引理 4 和 $\frac{1}{p_2(\cdot)}+\frac{1}{s}=\frac{1}{p_1'(\cdot)}$，有

$$\|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx |2^{k+1}B|^{1/p_2(x)} \approx \|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}|2^{k+1}B|^{-1/s},$$

当 $|2^{k+1}B|\geqslant 1$ 时，有

$$\|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx |2^{k+1}B|^{1/p_2(\infty)} \approx \|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}|2^{k+1}B|^{-1/s},$$

因此

$$\|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx \|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}|2^{k+1}B|^{-1/s}.$$

下面估计 J_2. 利用 Minkowski 不等式，有

$$J_2 \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}}|f\chi_{(2B)^c}|\left(\int_{|x|+|y|}^{\infty}\frac{1}{t^{2\rho+1}}\mathrm{d}t\right)^{1/2}\mathrm{d}y \leqslant$$
$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}}|f\chi_{(2B)^c}|\frac{1}{|x-y|^{\rho}}\mathrm{d}y = \int_{(2B)^c}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}}|f(y)|\frac{1}{|x-y|^{\rho}}\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^kB}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\rho}}|f(y)|\frac{1}{|x-y|^{\rho}}\mathrm{d}y\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^kB}|\Omega(x-y)||f(y)|\frac{1}{|x-y|^{n}}\mathrm{d}y\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(2^{k-1}R)^{-n}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^kB}|\Omega(x-y)||f(y)|\mathrm{d}y\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}(2^{k-1}R)^{-n}\|\Omega\|_{L^s(S^{n-1})}|2^kB|^{1/s}\|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|f\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}(2^{k-1}R)^{-n}|2^kB|^{1/s}\|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\cdot\|f\|_{\mathscr{B}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}|2^{k+1}B|^{\lambda_1}\|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}(2^{k-1}R)^{-n}|2^kB|^{1/s}\|f\|_{\mathscr{B}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}|2^{k+1}B|^{\lambda_1}\|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\cdot$$
$$\|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}|2^{k+1}B|^{-1/s}\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}(2^{k-1}R)^{-n}|2^kB|^{1/s}\|f\|_{\mathscr{B}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}|2^{k+1}B|^{\lambda_1}|2^{k+1}B||2^{k+1}B|^{-1/s}\leqslant$$

$$C\|f\|_{\mathscr{B}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}|B|^{\lambda_1}\sum_{k=1}^{\infty}2^{-n(k-1)+n(\lambda_1+1)(k+1)-(n/s)(k+1)+nk/s}\leqslant$$

$$C\|f\|_{\mathscr{B}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}|B|^{\lambda_1}\sum_{k=1}^{\infty}2^{-n(k-1)+n(\lambda_1+1)(k+1)-n/s}\leqslant C|B|^{\lambda_1}\|f\|_{\mathscr{B}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)},$$

因此

$$|\mu_\Omega^\rho(f\chi_{(2B)^c}(x))|\leqslant C|B|^{\lambda_1}\|f\|_{\mathscr{B}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}.$$

于是有

$$I_2=\|(\mu_\Omega^\rho(f\chi_{(2B)^c}))\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C|B|^{\lambda_1}\|f\|_{\mathscr{B}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

结合 I_1 和 I_2 的估计，有

$$\|\mu_\Omega^\rho(f)\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C|B|^{\lambda_1}\|\chi_B\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{\mathscr{B}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)},$$

则

$$\|\mu_\Omega^\rho(f)\|_{\mathscr{B}^{q(\cdot),\lambda}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|f\|_{\mathscr{B}^{p_1(\cdot),\lambda_1}(\mathbb{R}^n)}.$$

证毕.

参 考 文 献

[1] STEIN E M. On the Functions of Littlewood-Plaey, Lusin and Marcinkiewicz [J]. Trans Amer Math Soc, 1958, 88(2): 430-466.

[2] BENEDEK A, CALDERÓN A P, PANZONE R. Convolution Operators on Banach Space Valued Functions [J]. Proc Nat Acad Sci, 1962, 48(3): 356-365.

[3] DING Y, FAN D S, PAN Y B. Weighted Boundedness for a Class of Rough Marcinkiewicz Integrals [J]. Indiana Univ Math J, 1999, 48(3): 1037-1055.

[4] DING Y, FAN D S, PAN Y B. L^p Boundedness of Marcinkiewicz Integrals with Hardy Space Kernel [J]. Acta Math Sin (Eng Ser), 2000, 16(4): 593-600.

[5] 陈冬香，王娅昕. Marcinkiewicz 交换子在 Triebel-Lizorkin 空间中的有界性 [J]. 浙江大学学报(理学版)，2003，30(5)：481-484. (CHEN D X, WANG Y X. Boundedness of the Commutators for the Marcinkiewicz Integral in Triebel-Lizorkin Space [J]. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2003, 30(5): 481-484.)

[6] CHEN D X, CHEN J C. Boundedness of Marcinkiewicz Integrals with Rough Kernel on Herz Space [J]. Adv Math (China), 2005, 34(5): 591-599.

[7] 陆善镇，默会霞. Marcinkiewicz 积分交换子的有界性 [J]. 数学学报(中文版)，2006，49(3)：481-490. (LU S Z, MO H X. The Boundedness of Commutators for the Marcinkiewicz Integrals [J]. Acta Mathematica Sinca (Chinese Series), 2006, 49(3): 481-490.)

[8] 王洪彬，傅尊伟，刘宗光. 变指标 Lebesgue 空间上的 Marcinkiewicz 积分高阶交换子 [J]. 数学物理学报，2012，32A(6)：1092-1101.（WANG H B，FU Z W，LIU Z G. Higher-Order Commutators of Marcinkiewicz Integral on Variable Lebesgue Spaces [J]. Acta Mathematica Scientia，2012，32A(6)：1092-1101.）

[9] WANG L W. Marcinkiewicz Integrals Operators and Commutators on Herz Spaces with Variable Exponents [J]. J Funct Spaces，2014，2014：430365-1-430365-9.

[10] 王洪彬. 变指标 Herz 型 Hardy 空间上的 Marcinkiewicz 积分[J]. 山东理工大学学报(自然科学版)，2015，29(4)：16-20.（WANG H B. Marcinkiewicz Integrals on Herz-Type Hardy Spaces with Variable Exponent [J]. Journal of Shandong University of Technology (Natural Science Edition)，2015，29(4)：16-20.）

[11] 陶双平，李露露. 变指标 Morrey 空间上的 Marcinkiewicz 积分及交换子的有界性 [J]. 数学年刊(A 辑)，2016，37(1)：55-70.（TAO S P，LI L L. Boundedness of Marcinkiewicz Integrals and Commutators on Morrey Spaces with Variable Exponents [J]. Chinese Annals of Mathematics (Series A)，2016，37(1)：55-70.）

[12] 张爱翠，陈金阳，王松柏，等. 带粗糙核的参数型 Marcinkiewicz 积分交换子在齐次 Morrey-Herz 空间上的有界性 [J]. 应用数学，2018，31(1)：141-147.（ZHANG A C，CHEN J Y，WANG S B，et al. Boundedness of Commutators of the Parametric Marcinkiewicz Integral with Rough Kernels on the Homogeneous Morrey-Herz Spaces [J]. Mathematica Applicata，2018，31(1)：141-147.）

[13] 韦营营，张婧. Marcinkiewicz 积分交换子在变指标 Herz Triebel-Lizorkin 空间的有界性 [J]. 山东大学学报(理学版)，2022，57(12)：55-63.（WEI Y Y，ZHANG J. Boundedness of Commutators for the Marcinkiewicz Integral Operators on Herz Triebel-Lizorkin Spaces with Variable Exponent [J]. Journal of Shandong University (Natural Science)，2022，57(12)：55-63.）

[14] MIZUTA Y，OHNO T，SHIMOMURA T. Boundedness of Maximal Operators and Sobolev's Theorem for Non-homogeneous Central Morrey Spaces of Variable Exponent [J]. Hokkaido Math J，2015，44(2)：185-201.

[15] FU Z W，LU S Z，WANG H B，et al. Singular Integral Operators with Rough Kernels on Central Morrey Spaces with Variable Exponent [J]. Ann Acad Sci Fenn Math，2019，44(1)：505-522.

[16] NEKVINDA A. Hardy-Littlewood Maximal Operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R})$ [J]. Math Inequal Appl，2004，7(2)：255-266.

[17] KOVÁČIK O，RÁKOSNÍK J. On Spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ [J]. Czechoslovak Math J，1991，41(4)：592-618.

[18] IZUKI M. Boundedness of Sublinear Operators on Herz Spaces with Variable Exponent and Application to Wavelet Characterization [J]. Anal Math，2010，36(1)：33-50.

[19] WANG H B，XU J S，TAN J. Boundedness of Multilinear Singular Integrals on Central Morrey Spaces with Variable Exponents [J]. Front Math China，2020，15(5)：1011-1034.

[20] WANG H B，YAN D Y. Higher-Order Commutators of Parametric Marcinkiewicz Integrals on Herz Spaces with Variable Exponent [J]. J Func Spaces，2018，2018(1)：7319093-1-7319093-11.

（责任编辑：赵立芹）