

# 一类二维奇摄动反应扩散方程 空间对照结构型解

吴 潇, 郅佳音, 谢 峰

(东华大学 数学与统计学院, 上海 201620)

**摘要:** 考虑一类具有不连续反应项的二维奇异摄动反应扩散问题. 首先, 用空间对照结构理论、边界层函数法、光滑缝接法和渐近微分不等式方法等, 构造该问题具有内部层和边界层的解直到  $n$  阶的渐近展开式, 其中  $n$  为任意常数; 其次, 证明其具有内部层的解的存在性和局部渐近稳定性, 并构造解的高精度渐近展开式; 最后, 将所得理论结果应用到一个数值算例中.

**关键词:** 奇异摄动; 反应扩散方程; 空间对照结构理论; 渐近展开式

**中图分类号:** O175.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)04-0993-12

## Spatial Contrastive Structural Solutions in a Class of Two-Dimensional Singularly Perturbed Reaction-Diffusion Equations

WU Xiao, QIE Jiayin, XIE Feng

(School of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai 201620, China)

**Abstract:** We considered a class of two-dimensional singularly perturbed reaction-diffusion problems with discontinuous reaction terms. Firstly, using spatial contrastive structural theory, boundary layer function methods, smooth seaming method, and asymptotic differential inequality methods, we constructed asymptotic expansion of the problem with solutions for the internal layer and boundary layer up to the  $n$  order, where  $n$  was an arbitrary constant. Secondly, we proved the existence and local asymptotic stability of the solution with internal layer, and constructed high-precision asymptotic expansion of the solution. Finally, we applied the obtained theoretical results to a numerical example.

**Keywords:** singular perturbation; reaction-diffusion equation; spatial contrastive structural theory; asymptotic expansion

具有不连续反应项的奇摄动反应扩散方程在流体力学、化学、生物学等领域建模中应用广泛, 例如: 自动波波阵面在有障碍物的介质中的传播过程<sup>[1-2]</sup>; 温度在水和空气之间的传播过程<sup>[3]</sup>; 超导异质纳米结构中载流子波函数的模拟<sup>[4]</sup>等. 该类方程的解通常会在不连续处产生大梯度跳跃, 即内部层现象, 从而可有效反映对应的物理变量在介质界面上的变化过程. 通常将该类方程具有内部层的解称为空间对照结构型解. 因此, 关于不连续的奇摄动反应扩散问题的研究备受关注. 文献[5-8]用边界层

收稿日期: 2024-10-22.

**第一作者简介:** 吴 潇(1993—), 男, 汉族, 博士, 讲师, 从事奇异摄动理论及方法的研究, E-mail: dhuspde@163.com. **通信作者简介:** 谢 峰(1976—), 男, 汉族, 博士, 教授, 从事微分方程与动力系统的研究, E-mail: Fxie@mail.dhu.edu.cn.

**基金项目:** 国家自然科学基金面上项目(批准号: 12271088)、上海市自然科学基金面上项目(批准号: 21ZR1401000)和中央高校基本科研业务费专项基金(批准号: 2232023D-22).

函数法和渐近微分不等式方法,研究了具有不连续反应项的一维奇摄动反应扩散问题,证明了其具有内部层的解的存在性和渐近稳定性,并构造了解的渐近展开式;文献[9-10]通过引入局部坐标变换,将上述方法推广到具有不连续非线性项的二维奇摄动反应扩散问题稳态方程的研究中,证明了其空间对照结构型稳态解的存在性,构造了稳态解的渐近展开式,并证明了稳态解的局部稳定性.

本文考虑一类具有不连续反应项的二维奇摄动反应扩散方程 Newman 边值问题,其中反应项间断的位置曲线随时间周期变化.先用边界层函数法和空间对照结构理论构造边值问题具有内部层和边界层的周期解高精度渐近展开式,再用渐近微分不等式方法证明其解的存在性和局部渐近稳定性,并给出其周期解的稳定性条件.

### 1 边值问题及假设条件

考虑下列具有不连续反应项的二维奇摄动反应扩散周期边值问题:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left( \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= f(u, x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y) \in D, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial D} &= u^0(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial D, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, y, t) &= u(x, y, t + T), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  为 Laplace 算子,  $D$  为  $xOy$  平面上具有光滑边界  $\partial D$  的单连通区域,  $0 < \varepsilon \ll 1$  为小参数,  $\mathbf{n}$  是曲线  $\partial D$  关于边界区域  $D$  的外法线.

假设存在一条完全位于区域  $D$  内的简单光滑闭曲线  $C(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , 满足

$$x = \hat{x}(\theta(t)), \quad y = \hat{y}(\theta(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

其中  $\theta(t)$  是一个  $T$  周期光滑函数. 曲线  $C(t)$  将区域  $D$  分为两部分: 以曲线  $C(t)$  为边界的区域记作  $D^{(-)}$ ; 以曲线  $C(t)$  和曲线  $\partial D$  为边界的区域记作  $D^{(+)}$ . 下面给出相关的假设条件.

**假设 1** 假设函数  $f(u, x, y, t, \varepsilon)$  满足

$$f(u, x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(-)}(u, x, y, t, \varepsilon), & u \in I_u, \quad (x, y) \in \bar{D}^{(-)}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon), & u \in I_u, \quad (x, y) \in \bar{D}^{(+)}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

其中  $I_u$  为  $u$  的取值区间,  $f^{(-)}(u, x, y, t, \varepsilon)$  和  $f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon)$  为充分光滑的函数, 满足

$$f^{(-)}(u, \hat{x}(\theta(t)), \hat{y}(\theta(t)), t, \varepsilon) \neq f^{(+)}(u, \hat{x}(\theta(t)), \hat{y}(\theta(t)), t, \varepsilon), \quad u \in I_u, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**假设 2** 假设退化方程  $f^{(\mp)}(u, x, y, t, 0) = 0$  分别在区域  $D^{(\mp)}$  中有充分光滑的退化解  $\varphi^{(\mp)}(x, y, t)$ , 且函数  $\varphi^{(\mp)}(x, y, t)$  在曲线  $C(t)$  上满足下列不等式:

$$\varphi^{(-)}(\hat{x}(\theta(t)), \hat{y}(\theta(t)), t) > \varphi^{(+)}(\hat{x}(\theta(t)), \hat{y}(\theta(t)), t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**假设 3** 假设函数  $f^{(\mp)}(u, x, y, t, \varepsilon)$  满足

$$\begin{aligned} f_u^{(-)}(\varphi^{(-)}(x, y, t), x, y, t, 0) &> 0, \quad (x, y) \in D^{(-)}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ f_u^{(+)}(\varphi^{(+)}(x, y, t), x, y, t, 0) &> 0, \quad (x, y) \in D^{(+)}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

本文证明问题(1)存在一个光滑解  $u(x, y, t, \varepsilon)$ , 满足在区域  $D^{(-)}$  内趋向退化解  $u = \varphi^{(-)}(x, y, t)$ , 在区域  $D^{(+)}$  内趋向退化解  $u = \varphi^{(+)}(x, y, t)$ , 并在曲线  $C(t)$  的小邻域内从退化解  $u = \varphi^{(-)}(x, y, t)$  附近迅速变化到退化解  $u = \varphi^{(+)}(x, y, t)$  附近. 为研究曲线  $C(t)$  小邻域内解的性质, 先引入坐标变换  $(r, \alpha)$ , 满足

$$x = \hat{x}(\theta(t)) - r \sin \alpha, \quad y = \hat{y}(\theta(t)) + r \cos \alpha,$$

其中:  $\alpha(\theta)$  是曲线  $C(t)$  上的内法线与  $y$  轴之间的夹角, 满足

$$\sin \alpha = \hat{y}_\theta((\hat{x}_\theta)^2 + (\hat{y}_\theta)^2)^{-1/2}, \quad \cos \alpha = \hat{x}_\theta((\hat{x}_\theta)^2 + (\hat{y}_\theta)^2)^{-1/2};$$

$|r|$  表示曲线  $C(t)$  一个邻域内的点  $M(x, y)$  沿法线到该曲线的距离. 假设  $r$  满足:  $r > 0, M \in D^{(-)}$ ;  $r = 0, M \in C(t)$ ;  $r < 0, M \in D^{(+)}$ .

考虑辅助方程

$$\frac{dz}{d\zeta} = f(w, \theta, t), \quad \frac{dw}{d\zeta} = z, \tag{2}$$

其中  $f(u, \theta, t) := f(u, \hat{x}(\theta(t)), \hat{y}(\theta(t)), t, 0)$ ,  $\theta$  和  $t$  可视为参数. 根据假设 2, 辅助方程(2) 在相平面  $(w, z)$  内有两个平衡点  $(\varphi^{(-)}(\theta, t), 0)$  和  $(\varphi^{(+)}(\theta, t), 0)$ , 这里  $\varphi^{(\mp)}(\theta, t) := \varphi^{(\mp)}(\hat{x}(\theta(t)), \hat{y}(\theta(t)), t)$ , 且两个平衡点对应的特征方程为

$$\lambda^2 - f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\theta, t), \theta, t) = 0.$$

这两个特征方程分别存在两个符号互异的特征根:

$$\lambda_1^{(\mp)} = \sqrt{f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\theta, t), \theta, t)} > 0, \quad \lambda_2^{(\mp)} = -\sqrt{f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\theta, t), \theta, t)} < 0.$$

因此平衡点  $(\varphi^{(-)}(\theta, t), 0)$  和  $(\varphi^{(+)}(\theta, t), 0)$  都是鞍点. 于是在相平面  $(z, w)$  内, 本文假设平衡点  $(\varphi^{(\mp)}(\theta, t), 0)$  的稳定流形和不稳定流形如下.

**假设 4** 假设鞍点  $(\varphi^{(-)}(\theta, t), 0)$  的不稳定流形可表示为  $z = \tilde{z}^{(-)}(\zeta, \theta, t)$ ,  $w = \tilde{w}^{(-)}(\zeta, \theta, t)$ , 并与  $w = p \in (\varphi^{(-)}(\theta, t), \varphi^{(+)}(\theta, t))$  相交. 特别地, 相交点对应于辅助系统在  $\zeta = 0$  处的值, 且鞍点对应于辅助系统在  $\zeta = -\infty$  处的值. 类似地, 鞍点  $(\varphi^{(+)}(\theta, t), 0)$  的稳定流形可表示为  $z = \tilde{z}^{(+)}(\zeta, \theta, t)$ ,  $w = \tilde{w}^{(+)}(\zeta, \theta, t)$ , 并与  $w = p \in (\varphi^{(-)}(\theta, t), \varphi^{(+)}(\theta, t))$  相交. 相交点对应于辅助系统在  $\zeta = 0$  处的值, 且鞍点对应于辅助系统在  $\zeta = +\infty$  处的值.

鞍点  $(\varphi^{(-)}(\theta, t), 0)$  的不稳定流形和鞍点  $(\varphi^{(+)}(\theta, t), 0)$  的稳定流形可分别表示为

$$\begin{aligned} \tilde{z}^{(-)}(w, \theta, t) &= \sqrt{2 \int_{\varphi^{(-)}(\theta, t)}^w f^{(-)}(\psi, \theta, t) d\psi}, \\ \tilde{z}^{(+)}(w, \theta, t) &= \sqrt{2 \int_{\varphi^{(+)}(\theta, t)}^w f^{(+)}(\psi, \theta, t) d\psi}. \end{aligned} \tag{3}$$

定义函数

$$H(p, \theta, t) = \int_{\varphi^{(-)}(\theta, t)}^p f^{(-)}(\psi, \theta, t) d\psi - \int_{\varphi^{(+)}(\theta, t)}^p f^{(+)}(\psi, \theta, t) d\psi,$$

满足下列假设:

**假设 5** 假设方程  $H(p, \theta, t) = 0$  存在唯一解  $p_0(\theta, t) \in (\varphi^{(-)}(\theta, t), \varphi^{(+)}(\theta, t))$ , 且

$$\frac{\partial H}{\partial p}(p_0(\theta, t), \theta, t) = f^{(-)}(p_0(\theta, t), \theta, t) - f^{(+)}(p_0(\theta, t), \theta, t) < 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

假设 4 和假设 5 表明在鞍点  $(\varphi^{(-)}(\theta, t), 0)$  和  $(\varphi^{(+)}(\theta, t), 0)$  之间有相连接的异宿轨, 且由该异宿轨可得下列问题的解存在:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} = f^{(\mp)}(\tilde{u}, \theta, t), \quad \tilde{u}(0, \theta, t) = p_0(\theta, t), \quad \tilde{u}(\mp \infty, \theta, t) = \varphi^{(\mp)}(\theta, t).$$

## 2 形式渐近展开式

下面用边界层函数法构造问题(1)的形式渐近展开式. 首先, 分别考虑问题(1)在区域  $D^{(-)}$  和  $D^{(+)}$  内的子问题:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left( u^{(-)} - \frac{\partial u^{(-)}}{\partial t} \right) &= f^{(-)}(u^{(-)}, x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y) \in D^{(-)}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u^{(-)}(\hat{x}(\theta), \hat{y}(\theta), t) &= p(\theta, t, \varepsilon), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u^{(-)}(x, y, t) &= u^{(-)}(x, y, t + T), \quad (x, y) \in \bar{D}^{(-)}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{5}$$

和

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left( u^{(+)} - \frac{\partial u^{(+)}}{\partial t} \right) &= f^{(+)}(u^{(+)}, x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y) \in D^{(+)}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u^{(+)}(\hat{x}(\theta), \hat{y}(\theta), t) &= p(\theta, t, \varepsilon), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u^{(+)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial D} &= u^0(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial D, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u^{(+)}(x, y, t) &= u^{(+)}(x, y, t + T), \quad (x, y) \in \bar{D}^{(+)}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{6}$$

其中  $p(\theta, t, \varepsilon)$  为待定函数, 满足

$$p(\theta, t, \epsilon) = p_0(\theta, t) + \epsilon p_1(\theta, t) + \epsilon^2 p_2(\theta, t) + \dots \tag{7}$$

分别构造问题(5)和问题(6)的形式渐近展开式为

$$U^{(-)}(x, y, t, \epsilon) = \bar{u}^{(-)}(x, y, t, \epsilon) + Q^{(-)}(\xi, \theta, t, \epsilon),$$

$$U^{(+)}(x, y, t, \epsilon) = \bar{u}^{(+)}(x, y, t, \epsilon) + Q^{(+)}(\xi, \theta, t, \epsilon) + R(\eta, \gamma, t, \epsilon),$$

其中: 函数  $\bar{u}^{(\mp)}(x, y, t, \epsilon)$  为展开式的正则项, 满足

$$\bar{u}^{(\mp)}(x, y, t, \epsilon) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x, y, t) + \epsilon \bar{u}_1^{(\mp)}(x, y, t) + \dots + \epsilon^k \bar{u}_k^{(\mp)}(x, y, t) + \dots; \tag{8}$$

函数  $Q^{(\mp)}(\xi, \theta, t, \epsilon)$  为曲线  $C(t)$  邻域内的内部层项, 满足

$$Q^{(\mp)}(\xi, \theta, t, \epsilon) = Q_0^{(\mp)}(\xi, \theta, t) + \epsilon Q_1^{(\mp)}(\xi, \theta, t) + \dots + \epsilon^k Q_k^{(\mp)}(\xi, \theta, t) + \dots, \tag{9}$$

这里  $\xi=r/\epsilon$ , 且内部层项必须满足  $Q^{(\mp)}(+\infty, \theta, t, \epsilon)=0$ ; 函数  $R(\eta, \gamma, t, \epsilon)$  为曲线  $\partial D$  邻域内的边界层项, 满足

$$R(\eta, \gamma, t, \epsilon) = R_0(\eta, \gamma, t) + \epsilon R_1(\eta, \gamma, t) + \dots + \epsilon^k R_k(\eta, \gamma, t) + \dots, \tag{10}$$

这里  $(r_1, \gamma)$  为曲线  $\partial D$  邻域内的局部坐标,  $\eta=r_1/\epsilon$ , 且边界层项必须满足  $R(+\infty, \gamma, t, \epsilon)=0$ . 结合  $U^{(-)}$  和  $U^{(+)}$ , 可得问题(1)的形式渐近展开式为

$$U(x, y, t, \epsilon) = \begin{cases} U^{(-)}(x, y, t, \epsilon), & (x, y, t) \in \bar{D}^{(-)} \times \mathbb{R}, \\ U^{(+)}(x, y, t, \epsilon), & (x, y, t) \in \bar{D}^{(+)} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

将形式渐近展开式  $U^{(\mp)}$  分别代入问题(5)和问题(6), 并根据快慢不同尺度进行分离, 可分别得确定正则项、内部层项和边界层项的方程.

### 2.1 正则项

确定渐近展开式  $U^{(\mp)}(x, y, t, \epsilon)$  中正则项  $\bar{u}^{(\mp)}(x, y, t, \epsilon)$  的方程为

$$\epsilon^2 \left( \Delta \bar{u}^{(\mp)} - \frac{\partial \bar{u}^{(\mp)}}{\partial t} \right) = f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}, x, y, t, \epsilon). \tag{11}$$

先将正则项表达式(8)代入方程(11), 再将右端函数展开成关于小参数  $\epsilon$  幂级数的形式, 并比较方程两边  $\epsilon$  的各阶系数可得确定正则项系数  $\bar{u}_i^{(\mp)}(x, y, t) (i \geq 0)$  的方程. 确定正则项  $\bar{u}^{(\mp)}(x, y, t, \epsilon)$  中首次项系数  $\bar{u}_0^{(\mp)}(x, y, t)$  的方程为

$$f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}, x, y, t, 0) = 0, \quad (x, y, t) \in \bar{D}^{(\mp)} \times \mathbb{R}. \tag{12}$$

易见, 方程(12)是退化方程. 因此, 由假设 1 可得正则项的首次项系数为

$$\bar{u}_0^{(\mp)}(x, y, t) = \varphi^{(\mp)}(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \bar{D}^{(\mp)} \times \mathbb{R}.$$

同理, 确定系数  $\bar{u}_k(x, y, t) (k \geq 1)$  的方程为

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x, y, t) \bar{u}_k^{(\mp)}(x, y, t) = h_k^{(\mp)}(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \bar{D}^{(\mp)} \times \mathbb{R}, \tag{13}$$

其中:  $\bar{f}_u^{(\mp)}(x, y, t) := f^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(x, y, t), x, y, t, 0)$ , 记号  $\bar{f}^{(\mp)}, \bar{f}_\theta^{(\mp)}, \bar{f}_{u\theta}^{(\mp)}, \bar{f}_{u\epsilon}^{(\mp)}, \bar{f}_{\epsilon\epsilon}^{(\mp)}$  有类似的表达式;  $h_k^{(\mp)}(x, y, t)$  为由  $\bar{u}_i(x, y, t) (0 \leq i \leq k-1)$  构成的已知函数, 例如,

$$h_1^{(\mp)} = -\bar{f}_\epsilon^{(\mp)},$$

$$h_2^{(\mp)} = \Delta \bar{u}_0^{(\mp)} - \frac{\partial \bar{u}_0^{(\mp)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \bar{f}_{u\theta}^{(\mp)} \bar{u}_1^{(\mp)2} - \bar{f}_{u\epsilon}^{(\mp)} \bar{u}_1^{(\mp)} - \frac{1}{2} \bar{f}_{\epsilon\epsilon}^{(\mp)}.$$

由假设 3 可知方程(13)的解为

$$\bar{u}_i^{(\mp)}(x, y, t) = \frac{h_i^{(\mp)}(x, y, t)}{\bar{f}_u^{(\mp)}(x, y, t)}, \quad (x, y, t) \in \bar{D}^{(\mp)} \times \mathbb{R}.$$

### 2.2 内部层项

为便于计算, 先将问题(1)中的微分算子转化为关于变量  $(\xi, \theta, t)$  的形式:

$$\epsilon^2 \Delta - \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \epsilon \frac{\hat{x}_\theta \hat{y}_{\theta\theta} - \hat{y}_\theta \hat{x}_{\theta\theta}}{(\hat{x}_\theta^2 + \hat{y}_\theta^2)(\sqrt{\hat{x}_\theta^2 + \hat{y}_\theta^2} - \epsilon \xi \alpha_\theta)} \frac{\partial}{\partial \xi} +$$

$$\epsilon^2 \left[ \frac{\epsilon \xi \alpha_\theta \sqrt{\hat{x}_\theta^2 + \hat{y}_\theta^2} - \hat{y}_\theta \hat{y}_{\theta\theta} - \hat{x}_\theta \hat{x}_{\theta\theta}}{(\sqrt{\hat{x}_\theta^2 + \hat{y}_\theta^2} - \epsilon \xi \alpha_\theta)^3 \sqrt{\hat{x}_\theta^2 + \hat{y}_\theta^2}} - \theta_t \right] \frac{\partial}{\partial \theta} +$$

$$\epsilon^2 \frac{1}{(\sqrt{\hat{x}_\theta^2 + \hat{y}_\theta^2} - \epsilon \xi \alpha_\theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t}. \tag{14}$$

将式(14)等号右边偏导数的系数按 Taylor 级数展开, 可得

$$\epsilon^2 \Delta - \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \epsilon K(\theta, t) \frac{\partial}{\partial \xi} - \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=2}^{\infty} \epsilon^i L_i,$$

其中  $K(\theta, t) = \frac{\hat{x}_\theta \hat{y}_\theta - \hat{y}_\theta \hat{x}_\theta}{((\hat{x}_\theta)^2 + (\hat{y}_\theta)^2)^{3/2}}$ ,  $L_i$  表示变量  $\xi$  和  $\theta$  的一阶或二阶线性微分算子. 因此, 确定渐近展开式  $U^{(\mp)}(x, y, t, \epsilon)$  内部过渡层项(9)的方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q^{(\mp)}}{\partial \xi^2} - \epsilon K(\theta, t) \frac{\partial Q^{(\mp)}}{\partial \xi} - \epsilon^2 \frac{\partial Q^{(\mp)}}{\partial t} + \sum_{i=2}^{\infty} \epsilon^i L_i Q^{(\mp)} = \\ f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)} + Q^{(\mp)}, \hat{x} - \epsilon \xi \sin \alpha, \hat{y} + \epsilon \xi \cos \alpha, t, \epsilon) - \\ f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}, \hat{x} - \epsilon \xi \sin \alpha, \hat{y} + \epsilon \xi \cos \alpha, t, \epsilon), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\bar{u}^{(\mp)}(\theta, t, \epsilon) + Q^{(\mp)}(0, \theta, t, \epsilon) = p(\theta, t, \epsilon), \quad Q^{(\mp)}(\mp \infty, \theta, t, \epsilon) = 0.$$

类似地, 将内部层项(9)代入方程(15), 并将右端函数展开成关于小参数  $\epsilon$  幂级数的形式, 比较方程两边  $\epsilon$  的各阶系数可得确定内部层各阶项系数  $Q_i^{(\mp)}(x, y, t) (i \geq 0)$  的方程. 确定内部层零阶项系数函数  $Q_0^{(\mp)}(\xi, \theta, t)$  的边值问题为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_0^{(\mp)}}{\partial \xi^2} = f^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\theta, t) + Q_0^{(\mp)}, \hat{x}(\theta(t)), \hat{y}(\theta(t)), t, 0), \\ \varphi^{(\mp)}(\theta, t) + Q_0^{(\mp)}(0, \theta, t) = p_0(\theta, t), \quad Q_0^{(\mp)}(\mp \infty, \theta, t) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

引入记号

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi, \theta, t) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(\theta, t) + Q_0^{(-)}(\xi, \theta, t), & \xi \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \varphi^{(+)}(\theta, t) + Q_0^{(+)}(\xi, \theta, t), & \xi \leq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \\ \Phi^{(-)}(\xi, \theta, t) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \quad \xi \geq 0; \quad \Phi^{(+)}(\xi, \theta, t) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \quad \xi \leq 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

于是问题(16)可写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} = f^{(\mp)}(\tilde{u}, \theta, t), \\ \tilde{u}(0, \theta, t) = p_0(\theta, t), \quad \tilde{u}(\mp \infty, \theta, t) = \varphi^{(\mp)}(\theta, t). \end{aligned} \tag{17}$$

由假设 4 可知, 边值问题(17)的解  $\tilde{u}(\xi, \theta, t)$  存在, 并满足

$$|\tilde{u}(\xi, \theta, t) - \varphi^{(\mp)}(\theta, t)| < \chi \exp\{-\kappa |\xi|\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

其中  $\chi$  和  $\kappa$  为与小参数  $\epsilon$  无关的正常数. 因此, 内部层零阶项系数  $Q_0^{(\mp)}(\xi, \theta, t)$  满足指数估计

$$|Q_0^{(\mp)}(\xi, \theta, t)| < \chi \exp\{-\kappa |\xi|\}. \tag{18}$$

同理, 确定内部层项  $k$  阶函数  $Q_k^{(\mp)}(\xi, \theta, t) (k \geq 1)$  的边值问题为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_k^{(\mp)}}{\partial \xi^2} - \tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi, \theta, t) Q_k^{(\mp)} = Q_k f^{(\mp)}(\xi, \theta, t), \\ Q_k^{(\mp)}(0, \theta, t) + \bar{u}_k^{(\mp)}(\theta, t) = p_k(\theta, t), \quad Q_k^{(\mp)}(\mp \infty, \theta, t) = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

其中:

$$\tilde{f}^{(\mp)}(\xi, \theta, t) := f^{(\mp)}(\tilde{u}^{(\mp)}(\xi, \theta, t), \theta, t, 0), \quad \bar{f}^{(\mp)}(\theta, t) := f^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\theta, t), \theta, t, 0),$$

记号  $\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi, \theta, t), \tilde{f}_r^{(\mp)}(\xi, \theta, t), \tilde{f}_\epsilon^{(\mp)}(\xi, \theta, t), \bar{f}_u^{(\mp)}(\theta, t), \bar{f}_r^{(\mp)}(\theta, t)$  和  $\bar{f}_\epsilon^{(\mp)}(\theta, t)$  有类似表达式; 函数  $Q_k f^{(\mp)}(\xi, \theta, t)$  为由  $\bar{u}_i^{(\mp)}(x, y, t) (0 \leq i \leq k)$  和  $Q_j^{(\mp)}(\xi, \theta, t) (0 \leq j \leq k-1)$  构成的已知函数, 满足类似式(18)的指数估计, 例如,

$$\begin{aligned} Q_1 f^{(\mp)}(\xi, \theta, t) = K(\theta, t) \frac{\partial Q_0^{(\mp)}}{\partial \xi} + (\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi, \theta, t) - \bar{f}_u^{(\mp)}(\theta, t)) \left( \bar{u}_1^{(\mp)}(\theta, t) + \frac{\partial \varphi^{(\mp)}}{\partial r}(\theta, t) \xi \right) + \\ (\tilde{f}_r^{(\mp)}(\xi, \theta, t) - \bar{f}_r^{(\mp)}(\theta, t)) \xi + \tilde{f}_\epsilon^{(\mp)}(\xi, \theta, t) - \bar{f}_\epsilon^{(\mp)}(\theta, t). \end{aligned}$$

易见, 问题(19)是一个线性非齐次边值问题. 因此问题(19)的解为

$$Q_k^{(\mp)}(\xi, \theta, t) = (p_k(\theta, t) - \bar{u}_k^{(\mp)}(\theta, t))(\Phi^{(\mp)}(0, \theta, t))^{-1} \Phi^{(\mp)}(\xi, \theta, t) + \Phi^{(\mp)}(\xi, \theta, t) \int_0^\xi (\Phi^{(\mp)}(\eta, \theta, t))^{-2} \int_{\mp\infty}^\eta \Phi^{(\mp)}(\sigma, \theta, t) Q_k f^{(\mp)}(\sigma, \theta, t) d\sigma d\eta. \tag{20}$$

显然, 函数  $Q_k^{(\mp)}(\xi, \theta, t)$  满足指数估计  $|Q_k^{(\mp)}(\xi, \theta, t)| < \chi \exp\{-\kappa|\xi|\}$ .

为得到问题(1)光滑的形式渐近展开式, 函数  $U^{(-)}(x, y, t, \epsilon)$  和  $U^{(+)}(x, y, t, \epsilon)$  需在曲线  $C(t)$  上满足光滑缝接条件:

$$\epsilon \frac{\partial U^{(-)}}{\partial n_0} \Big|_{C(t)} = \epsilon \frac{\partial U^{(+)}}{\partial n_0} \Big|_{C(t)}. \tag{21}$$

于是, 将式(8)和式(9)代入条件(21), 可得

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \varphi^{(-)}}{\partial r}(\theta, t) + \epsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_1^{(-)}}{\partial r}(\theta, t) + \dots + \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(0, \theta, t) + \epsilon \frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial \xi}(0, \theta, t) + \dots = \\ \epsilon \frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial r}(\theta, t) + \epsilon^2 \frac{\partial \bar{u}_1^{(+)}}{\partial r}(\theta, t) + \dots + \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}(0, \theta, t) + \epsilon \frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial \xi}(0, \theta, t) + \dots. \end{aligned} \tag{22}$$

比较式(22)等号两端  $\epsilon^0$  的系数, 可得零次光滑缝接条件:

$$\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(0, \theta, t) = \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}(0, \theta, t) \Leftrightarrow \Phi^{(+)}(0, \theta, t) = \Phi^{(-)}(0, \theta, t).$$

因此, 由假设 5 可知函数  $p_0(\theta, t)$  的值唯一确定.

同理, 可得  $k$  次光滑缝接条件:

$$\frac{\partial \bar{u}_{k-1}^{(-)}}{\partial r}(\theta, t) + \frac{\partial Q_k^{(-)}}{\partial \xi}(0, \theta, t) = \frac{\partial \bar{u}_{k-1}^{(+)}}{\partial r}(\theta, t) + \frac{\partial Q_k^{(+)}}{\partial \xi}(0, \theta, t). \tag{23}$$

结合式(20)和式(23), 可得

$$p_k(\theta, t) = \left( \frac{\partial H}{\partial p}(p_0(\theta, t), \theta, t) \right)^{-1} G_k(\theta, t), \tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned} G_k(\theta, t) = & \bar{u}_k^{(-)} f^{(-)}(p_0(\theta, t), \theta, t) - \bar{u}_k^{(+)} f^{(+)}(p_0(\theta, t), \theta, t) + \\ & \int_{+\infty}^0 \Phi^{(+)}(\sigma, \theta, t) Q_k f^{(+)}(\sigma, \theta, t) d\sigma - \int_{-\infty}^0 \Phi^{(-)}(\sigma, \theta, t) Q_k f^{(-)}(\sigma, \theta, t) d\sigma + \\ & \frac{\partial \bar{u}_{k-1}^{(+)}}{\partial r}(\theta, t) \Phi^{(+)}(0, \theta, t) - \frac{\partial \bar{u}_{k-1}^{(-)}}{\partial r}(\theta, t) \Phi^{(-)}(0, \theta, t). \end{aligned}$$

显然,  $G_k(\theta, t)$  为已知函数.

### 2.3 边界层项

假设边界曲线  $\partial D$  的方程满足下列形式:

$$x = \tilde{x}(\gamma), \quad y = \tilde{y}(\gamma),$$

其中  $\gamma$  为参数. 在曲线  $\partial D$  的邻域内引入坐标变换  $(r_1, \beta)$ , 满足

$$x = \tilde{x}(\gamma) - r_1 \sin \beta, \quad y = \tilde{y}(\gamma) + r_1 \cos \beta,$$

其中:  $\beta(\gamma)$  为曲线  $\partial D$  的内法线与  $y$  轴之间的夹角, 且

$$\sin \beta = \tilde{y}_\gamma ((\tilde{y}_\gamma)^2 + (\tilde{x}_\gamma)^2)^{-1/2}, \quad \cos \beta = \tilde{x}_\gamma ((\tilde{y}_\gamma)^2 + (\tilde{x}_\gamma)^2)^{-1/2};$$

$|r_1|$  表示曲线  $\partial D$  一个邻域内的点  $M(x, y)$  沿法线到该曲线的距离. 假设  $r$  满足:  $r > 0, M \in D^{(+)}; r = 0, M \in \partial D$ .

将问题(1)的微分算子写成关于变量  $\eta, \gamma$  和  $t$  的形式:

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \Delta - \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} = & \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \epsilon \beta_\gamma (\sqrt{\tilde{x}_\gamma^2 + \tilde{y}_\gamma^2} - \epsilon \eta \beta_\gamma)^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} + \\ & \epsilon^2 \left( \frac{\epsilon \eta \beta_\gamma (\sqrt{\tilde{x}_\gamma^2 + \tilde{y}_\gamma^2}) - \tilde{x}_\gamma \tilde{x}_{\gamma\gamma} - \tilde{y}_\gamma \tilde{y}_{\gamma\gamma}}{(\sqrt{\tilde{x}_\gamma^2 + \tilde{y}_\gamma^2} - \epsilon \eta \beta_\gamma)^3 \sqrt{\tilde{x}_\gamma^2 + \tilde{y}_\gamma^2}} \right) \frac{\partial}{\partial \gamma} + \\ & \epsilon^2 (\sqrt{\tilde{x}_\gamma^2 + \tilde{y}_\gamma^2} - \epsilon \eta \beta_\gamma)^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} = \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \epsilon K(\gamma, t) \frac{\partial}{\partial \eta} - \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=2}^{\infty} \epsilon^i L_i, \tag{25}$$

其中  $K(\gamma, t) = \frac{\tilde{x}_\gamma \tilde{y}_\eta - \tilde{y}_\gamma \tilde{x}_\eta}{((\tilde{y}_\gamma)^2 + (\tilde{x}_\gamma)^2)^{3/2}}$ ,  $L_i$  表示变量  $\eta$  和  $\gamma$  的一阶或二阶线性微分算子. 确定边界层项

$R(\eta, \gamma, t, \epsilon)$  的方程和边界条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} - \epsilon K(\gamma, t) \frac{\partial R}{\partial \eta} - \epsilon^2 \frac{\partial R}{\partial t} + \sum_{i=2}^{\infty} \epsilon^i L_i R &= f^{(+)}(\bar{u}^{(+)} + R, x, y, t, \epsilon) - f^{(+)}(\bar{u}^{(+)}, x, y, t, \epsilon), \\ \frac{\partial(\bar{u}^{(+)} + R)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial D} &= u^0(x, y, t), \quad R^{(+)}(+\infty, \gamma, t, \epsilon) = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

类似于内部层项以及文献[11]中边界层项的计算过程, 可依次得到边界层项的各阶表达式, 且满足指数估计.

### 3 解的存在性

下面用微分不等式方法<sup>[12-14]</sup>证明边值问题(1)解  $u(x, y, t, \epsilon)$  的存在性, 并给出解  $u(x, y, t, \epsilon)$  与所构造渐近展开式之间的误差估计. 根据函数  $f^{(\mp)}(u, x, y, t, \epsilon)$  的光滑性, 可得式(8)~(10)任意阶的系数, 定义前  $n$  项和的表达式为

$$U_n(x, y, t, \epsilon) = \begin{cases} U_n^{(-)}(x, y, t, \epsilon), & (x, y, t) \in \bar{D}^{(-)} \times \mathbb{R}, \\ U_n^{(+)}(x, y, t, \epsilon), & (x, y, t) \in \bar{D}^{(+)} \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

其中

$$U_n^{(-)}(x, y, t, \epsilon) = \sum_{i=0}^n \epsilon^i (\bar{u}_i^{(-)}(x, y, t) + Q_i^{(-)}(\xi, \theta, t)), \quad (x, y, t) \in \bar{D}^{(-)} \times \mathbb{R}, \quad \xi \geq 0,$$

$$U_n^{(+)}(x, y, t, \epsilon) = \sum_{i=0}^n \epsilon^i (\bar{u}_i^{(+)}(x, y, t) + Q_i^{(+)}(\xi, \theta, t) + R_i(\eta, \gamma, t)), \quad (x, y, t) \in \bar{D}^{(+)} \times \mathbb{R}, \quad \xi \leq 0.$$

从而可得下列关于问题(1)解的存在性定理.

**定理 1** 如果假设 1~假设 5 成立, 则对充分小的  $\epsilon > 0$ , 边值问题(1)存在具有内部层和边界层的解  $u(x, y, t, \epsilon)$ , 且满足

$$|u(x, y, t, \epsilon) - U_n(x, y, t, \epsilon)| < C\epsilon^{n+1}, \quad (x, y, t) \in \bar{D} \times \mathbb{R},$$

其中  $C$  为与  $\epsilon$  无关的正常数.

证明: 若存在周期连续函数  $\alpha(x, y, t, \epsilon)$  和  $\beta(x, y, t, \epsilon)$  满足下列条件:

- 1)  $\alpha(x, y, t, \epsilon) < \beta(x, y, t, \epsilon), (x, y, t) \in \bar{D} \times \mathbb{R}$ ;
- 2)  $L_\epsilon \beta := \epsilon^2 \left( \beta - \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) - f(\beta, x, y, t, \epsilon) \leq 0 \leq L_\epsilon \alpha, (x, y, t) \in D \times \mathbb{R}$ ;
- 3)  $\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial D} \leq u^0(x, y, t) \leq \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial D}, (x, y) \in \partial D, t \in \mathbb{R}$ ;
- 4)  $\frac{\partial \beta}{\partial r} \Big|_{r=0^-} \geq \frac{\partial \beta}{\partial r} \Big|_{r=0^+}, \frac{\partial \alpha}{\partial r} \Big|_{r=0^-} \leq \frac{\partial \alpha}{\partial r} \Big|_{r=0^+}, t \in \mathbb{R}$ .

则根据文献[15-16]可知, 它们分别是问题(1)的下解和上解, 且问题(1)的解  $u(x, y, t, \epsilon)$  存在, 满足

$$\alpha(x, y, t, \epsilon) \leq u(x, y, t, \epsilon) \leq \beta(x, y, t, \epsilon).$$

因此, 构造函数

$$\beta(x, y, t, \epsilon) = \begin{cases} \beta_{n+1}^{(-)}(x, y, t, \epsilon) = U_{n+1}^{(-)} + \epsilon^{n+1}(\mu + q^{(-)}(\xi, \theta, t)), & (x, y, t) \in \bar{D}^{(-)} \times \mathbb{R}, \xi \geq 0; \\ \beta_{n+1}^{(+)}(x, y, t, \epsilon) = U_{n+1}^{(+)} + \epsilon^{n+1}(\mu + q^{(+)}(\xi, \theta, t) + R_\beta(\eta, \gamma, t)), & (x, y, t) \in \bar{D}^{(+)} \times \mathbb{R}, \xi \leq 0, \eta \geq 0, \gamma \in [0, L], \end{cases} \tag{27}$$

和

$$\alpha(x, y, t, \epsilon) = \begin{cases} \alpha_{n+1}^{(-)}(x, y, t, \epsilon) = U_{n+1}^{(-)} - \epsilon^{n+1}(\mu + q^{(-)}(\xi, \theta, t)), & (x, y, t) \in \bar{D}^{(-)} \times \mathbb{R}, \xi \geq 0; \\ \alpha_{n+1}^{(+)}(x, y, t, \epsilon) = U_{n+1}^{(+)} - \epsilon^{n+1}(\mu + q^{(+)}(\xi, \theta, t) + R_a(\eta, \gamma, t)), & (x, y, t) \in \bar{D}^{(+)} \times \mathbb{R}, \xi \leq 0, \eta \geq 0, \gamma \in [0, L], \end{cases} \quad (28)$$

其中  $\mu$  为正常数, 函数  $q^{(\mp)}(\xi, \theta, t), R_\beta(\eta, \gamma, t)$  和  $R_a(\eta, \gamma, t)$  为待定函数.

函数  $q^{(\mp)}(\xi, \theta, t)$  用于消除由常数  $\mu$  导致的内部层  $(n+1)$  次项系数的变化. 因此, 确定函数  $q^{(\mp)}(\xi, \theta, t)$  的边值问题为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q^{(\mp)}}{\partial \xi^2} - \tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi, \theta, t)q^{(\mp)} &= qf^{(\mp)}(\xi, \theta, t), \\ q^{(\mp)}(0, \theta, t) + \mu &= \delta, \quad q^{(\mp)}(\mp \infty, \theta, t) = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

其中  $qf^{(\mp)}(\xi, \theta, t) = \mu(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi, \theta, t) - \bar{f}_u^{(\mp)}(\theta, t)) - d e^{-\kappa|\xi|}$ , 这里  $d$  和  $\kappa$  为待定正常数. 易见问题(29)的解为

$$\begin{aligned} q^{(\mp)}(\xi, \theta, t) &= (\delta - \mu)(\Phi(0, \theta, t))^{-1} \Phi^{(\mp)}(\xi, \theta, t) + \\ &\Phi^{(\mp)}(\xi, \theta, t) \int_0^\xi (\Phi^{(\mp)}(\eta, \theta, t))^{-2} \int_{\mp \infty}^\eta \Phi^{(\mp)}(\sigma, \theta, t) qf^{(\mp)}(\sigma, \theta, t) d\sigma d\eta. \end{aligned} \quad (30)$$

因此, 选取适当正数  $\delta, d$  和  $\kappa$ , 使得  $\delta - \mu > 0, qf^{(\mp)}(\xi, \theta, t) < 0$ , 从而可得  $q^{(\mp)}(\xi, \theta, t)$  恒为正数. 函数  $R_\beta(\eta, \gamma, t)$  和  $R_a(\eta, \gamma, t)$  用于弥补由常数  $\mu$  导致的边界层  $(n+1)$  次项系数的变化. 类似文献[11]的方法可得函数  $R_\beta(\eta, \gamma, t)$  和  $R_a(\eta, \gamma, t)$ , 并选取合适的常数使得函数  $R_\beta(\eta, \gamma, t)$  和  $R_a(\eta, \gamma, t)$  恒为正.

下面证明函数  $\beta(x, y, t, \epsilon)$  和  $\alpha(x, y, t, \epsilon)$  分别是问题(1)的上解和下解. 在区域  $\bar{D}^{(-)}$  和  $\bar{D}^{(+)}$  内, 有

$$\beta^{(-)}(x, y, t, \epsilon) - \alpha^{(-)}(x, y, t, \epsilon) = \epsilon^{n+1}(2\mu + 2q^{(-)}(\xi, \theta, t)) + O(\epsilon^{n+2}) > 0,$$

$$\beta^{(+)}(x, y, t, \epsilon) - \alpha^{(+)}(x, y, t, \epsilon) = \epsilon^{n+1}(2\mu + 2q^{(+)}(\xi, \theta, t) + R_\beta(\eta, \gamma, t) + R_a(\eta, \gamma, t)) + O(\epsilon^{n+2}) > 0.$$

于是, 函数  $\beta(x, y, t, \epsilon)$  和  $\alpha(x, y, t, \epsilon)$  满足条件 1).

下面证明函数  $\beta(x, y, t, \epsilon)$  满足条件 2), 由函数  $\beta(x, y, t, \epsilon)$  的表达式, 有

$$L_\epsilon \beta = -\epsilon^{n+1}(\mu \bar{f}_u^{(\mp)}(\theta, t) + d e^{-\kappa|\xi|}) + O(\epsilon^{n+2}) < 0. \quad (31)$$

因此函数  $\beta(x, y, t, \epsilon)$  满足条件 2). 同理可得函数  $\alpha(x, y, t, \epsilon)$  也满足条件 2).

由函数  $\beta(x, y, t, \epsilon)$  和  $\alpha(x, y, t, \epsilon)$  的构造易知条件 3) 成立.

对于条件 4), 函数  $\beta(x, y, t, \epsilon)$  满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial r} \Big|_{r=0^-} - \frac{\partial \beta}{\partial r} \Big|_{r=0^+} &= \epsilon^n \left( \frac{\partial q^{(-)}}{\partial \xi}(0, \theta, t) - \frac{\partial q^{(+)}}{\partial \xi}(0, \theta, t) \right) + O(\epsilon^{n+1}) = \\ &\epsilon^n \Phi^{-1}(0, \theta, t) (f^{(-)}(p_0(\theta, t), \theta, t) - f^{(+)}(p_0(\theta, t), \theta, t)) \times \\ &[(\delta - \mu) + \Gamma(\theta, t)] + O(\epsilon^{n+1}), \end{aligned}$$

其中

$$\Gamma(\theta, t) = \frac{\int_{-\infty}^0 \Phi^{(-)}(\sigma, \theta, t) qf^{(-)}(\sigma, \theta, t) d\sigma - \int_{+\infty}^0 \Phi^{(+)}(\sigma, \theta, t) qf^{(+)}(\sigma, \theta, t) d\sigma}{f^{(-)}(p_0(\theta, t), \theta, t) - f^{(+)}(p_0(\theta, t), \theta, t)}.$$

由假设 5 知, 可选取  $\delta$  满足  $\delta \geq \mu + \max_{t \in \mathbb{R}} |(\theta, t)|$  使得等号右边的表达式为正. 因此, 函数  $\beta(x, y, t, \epsilon)$  满足条件 4). 同理可证函数  $\alpha(x, y, t, \epsilon)$  也满足条件 4).

综上所述, 问题(1)的解  $u(x, y, t, \epsilon)$  存在, 且满足

$$\alpha(x, y, t, \epsilon) \leq u(x, y, t, \epsilon) \leq \beta(x, y, t, \epsilon). \quad (32)$$

进一步, 由条件 1)~4) 和上下解的构造可知, 解  $u(x, y, t, \epsilon)$  与渐近展开式前  $n$  项和  $U_n(x, y, t, \epsilon)$  之间的误差估计为

$$|u(x, y, t, \epsilon) - U_n(x, y, t, \epsilon)| < C\epsilon^{n+1}, \quad (x, y, t) \in \bar{D} \times \mathbb{R}.$$

### 4 解的局部渐近稳定性

下面讨论问题(1)周期解  $u(x, y, t, \epsilon)$  的局部渐近稳定性. 先考虑下列奇摄动反应扩散方程初边值

问题:

$$\begin{aligned}
L_\epsilon v &= \epsilon^2 \left( \Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} \right) - f(v, x, y, t, \epsilon) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\
\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial D} &= u^0(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial D, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\
v(x, y, 0, \epsilon) &= v^0(x, y, \epsilon), \quad (x, y) \in D, \quad t \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned} \tag{33}$$

易见问题(1)的周期解  $u(x, y, t, \epsilon)$  是问题(33)关于初值  $v^0(x, y, \epsilon) = u(x, y, 0, \epsilon)$  的解. 因此, 可给出下列解的局部渐近稳定性定理.

**定理 2** 如果假设 1~假设 5 成立, 则对充分小的  $\epsilon$ , 问题(1)的周期解  $u(x, y, t, \epsilon)$  是局部渐近稳定的, 且吸引域为

$$\alpha_1^{(\mp)}(x, y, t, \epsilon) \leq u(x, y, t, \epsilon) \leq \beta_1^{(\mp)}(x, y, t, \epsilon),$$

其中函数  $\alpha_1^{(\mp)}(x, y, t, \epsilon)$  和  $\beta_1^{(\mp)}(x, y, t, \epsilon)$  分别为  $n=0$  情形下式(28)和式(27)的形式.

证明: 构造下列函数:

$$\begin{aligned}
\check{\alpha}(x, y, t, \epsilon) &= u(x, y, t, \epsilon) + (\alpha(x, y, t, \epsilon) - u(x, y, t, \epsilon))e^{-\rho t}, \\
\check{\beta}(x, y, t, \epsilon) &= u(x, y, t, \epsilon) + (\beta(x, y, t, \epsilon) - u(x, y, t, \epsilon))e^{-\rho t},
\end{aligned}$$

其中  $\rho > 0$ ,  $\alpha(x, y, t, \epsilon)$  和  $\beta(x, y, t, \epsilon)$  分别是边值问题(1)的下解和上解. 下面证明函数  $\check{\alpha}(x, y, t, \epsilon)$  和  $\check{\beta}(x, y, t, \epsilon)$  分别是初边值问题(33)的下解和上解.

由函数  $\check{\alpha}(x, y, t, \epsilon)$  和  $\check{\beta}(x, y, t, \epsilon)$  的构造以及函数  $\alpha(x, y, t, \epsilon)$  和  $\beta(x, y, t, \epsilon)$  的性质可知, 函数  $\check{\alpha}(x, y, t, \epsilon)$  和  $\check{\beta}(x, y, t, \epsilon)$  满足定理 1 证明中的条件 1), 3), 4).

下面证明函数  $\check{\beta}(x, y, t, \epsilon)$  满足定理 1 证明中的条件 2). 将算子  $L_\epsilon$  作用于函数  $\check{\beta}(x, y, t, \epsilon)$ , 可得

$$\begin{aligned}
L_\epsilon \check{\beta} &= \epsilon^2 \left( \Delta \check{\beta} - \frac{\partial \check{\beta}}{\partial t} \right) - f(\check{\beta}, x, y, t, \epsilon) = \\
&= L_\epsilon \beta e^{-\rho t} + \epsilon^2 \rho (\beta - u) e^{-\rho t} + f_{uu}^*(\theta_2 e^{-\rho t} - \theta_1) (\beta - u)^2 e^{-\rho t} = \\
&= -\epsilon (\mu \bar{f}_u^{(\mp)}(\theta, t) + d e^{-\kappa |\epsilon|}) e^{-\rho t} + O(\epsilon^2) e^{-\rho t} < 0,
\end{aligned}$$

其中  $f_{uu}^* = f_{uu}(u + \theta_2(\beta - u)e^{-\rho t} + \theta_3(\theta_2 e^{-\rho t} - \theta_1)(\beta - u))$ ,  $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$ . 因此可知函数  $\check{\beta}(x, y, t, \epsilon)$  满足条件 2). 同理, 可证函数  $\check{\alpha}(x, y, t, \epsilon)$  也满足条件 2).

由文献[16]知, 如果问题(33)的初值满足  $\check{\alpha}(x, y, 0, \epsilon) \leq v^0(x, y, \epsilon) \leq \check{\beta}(x, y, 0, \epsilon)$ , 则函数  $\check{\alpha}(x, y, t, \epsilon)$  和  $\check{\beta}(x, y, t, \epsilon)$  分别是问题(33)的下解和上解. 因此对充分小的  $\epsilon$ , 初边值问题(33)的解  $v(x, y, t, \epsilon)$  存在, 并满足

$$\begin{aligned}
|v(x, y, t, \epsilon) - u(x, y, t, \epsilon)| &\leq |\check{\beta}(x, y, t, \epsilon) - \check{\alpha}(x, y, t, \epsilon)| \leq \\
&|\beta(x, y, t, \epsilon) - \alpha(x, y, t, \epsilon)| e^{-\rho t} \leq C \epsilon^{n+1} e^{-\rho t},
\end{aligned}$$

故对固定的  $0 < \epsilon \ll 1$ , 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |v(x, y, t, \epsilon) - u(x, y, t, \epsilon)| = 0.$$

证毕.

### 5 实 例

考虑下列边值问题:

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 \left( \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= f(u, x, y, t), \quad x^2 + y^2 < 16, \quad t \in \mathbb{R}, \\
\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x^2+y^2=16} &= 0, \\
u(x, y, t) &= u(x, y, t + \pi),
\end{aligned} \tag{34}$$

其中

$$f(u, x, y, t) = \begin{cases} u - (x^2 + y^2)(\sin^2 t + 1), & x^2 + y^2 < 4(\sin^2 t + 1), \\ u - \frac{\sin^2 t + 1}{x^2 + y^2}, & 4(\sin^2 t + 1) < x^2 + y^2 < 16. \end{cases}$$

曲线  $C(t)$  的方程为  $x^2 + y^2 = 4(\sin^2 t + 1)$ , 满足  $\hat{x} = 2\sqrt{\sin^2 t + 1} \cos \theta$ ,  $\hat{y} = 2\sqrt{\sin^2 t + 1} \sin \theta$ . 通过求解  $f(u, x, y, t) = 0$ , 可得  $\varphi^{(\mp)}(x, y, t)$  的形式为

$$\begin{aligned} \varphi^{(-)}(x, y, t) &= (x^2 + y^2)(\sin^2 t + 1), & x^2 + y^2 < 4(\sin^2 t + 1), \\ \varphi^{(+)}(x, y, t) &= \frac{\sin^2 t + 1}{x^2 + y^2}, & 4(\sin^2 t + 1) < x^2 + y^2 < 16, \end{aligned}$$

并可得  $\varphi^{(\mp)}(x, y, t)$  在曲线  $C(t)$  上的值为

$$\varphi^{(-)}(t) = 4(\sin^2 t + 1)^2, \quad \varphi^{(+)}(t) = \frac{1}{4}.$$

由于  $\varphi^{(-)}(t) > \varphi^{(+)}(t)$  和  $f_u^{(\mp)} = 1 > 0$ , 所以满足假设 2 和假设 3. 易得正则项零次项系数的表达式为

$$\bar{u}_0(x, y, t) = \begin{cases} (x^2 + y^2)(\sin^2 t + 1), & x^2 + y^2 < 4(\sin^2 t + 1), \\ \frac{\sin^2 t + 1}{x^2 + y^2}, & 4(\sin^2 t + 1) < x^2 + y^2 < 16. \end{cases}$$

在曲线  $C(t)$  的一个邻域内, 将坐标  $(x, y)$  通过以下变换转化为  $(\xi, \theta)$ :

$$x = 2\sqrt{\sin^2 t + 1} \cos \theta - \varepsilon \xi \cos \theta, \quad y = 2\sqrt{\sin^2 t + 1} \sin \theta - \varepsilon \xi \sin \theta.$$

确定  $Q_0^{(\mp)}$  的方程为

$$\frac{\partial^2 Q_0^{(\mp)}}{\partial \xi^2} = Q_0^{(\mp)}, \quad Q_0^{(\mp)}(0, t) = p_0(t) - \varphi^{(\mp)}(t), \quad Q_0^{(\mp)}(\mp \infty, t) = 0. \tag{35}$$

易见方程(35)为二阶线性非齐次方程, 解得

$$Q_0^{(-)}(\xi, t) = (p_0(t) - 4(\sin^2 t + 1)^2)e^{\xi}, \quad Q_0^{(+)}(\xi, t) = \left(p_0(t) - \frac{1}{4}\right)e^{-\xi}.$$

通过匹配条件(22), 可得  $p_0(t)$  的表达式为

$$p_0(t) = 2(\sin^2 t + 1)^2 + \frac{1}{8}.$$

类似可得边界层零次项系数为  $R_0(\eta, \gamma, t) = 0$ .

综上所述, 问题(34)解的零阶渐近展开式为

$$\bar{U}_0(x, y, t) = \begin{cases} (x^2 + y^2)(\sin^2 t + 1) + \left(-2(\sin^2 t + 1)^2 + \frac{1}{8}\right)e^{\xi}, & x^2 + y^2 < 4(\sin^2 t + 1), \\ \frac{\sin^2 t + 1}{x^2 + y^2} + \left(2(\sin^2 t + 1)^2 - \frac{1}{8}\right)e^{-\xi}, & 4(\sin^2 t + 1) < x^2 + y^2 < 16, \end{cases}$$

其中  $\xi = (\sqrt{\sin^2 t + 1} - \sqrt{x^2 + y^2})/\varepsilon$ .

图 1~图 8 分别为当  $t=0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$  时问题(34)的解的零阶渐近近似图像及俯视图. 由图 1~图 8 易见, 问题(34)的解在曲线  $C(t)$  附近发生跳跃, 在区域  $D^{(-)}$  内趋向退化解  $u = \varphi^{(-)}(x, y, t)$ , 在

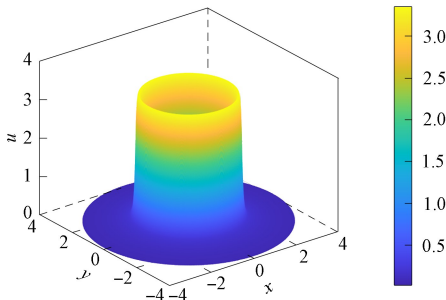


图 1  $t=0$  时问题(34)的解的零阶渐近近似图像  
Fig. 1 Picture of zero order asymptotic approximation of solution to problem (34) when  $t=0$

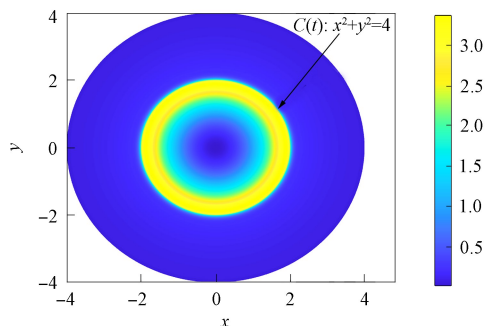


图 2  $t=0$  时问题(34)的解的零阶渐近近似俯视图  
Fig. 2 Vertical view of zero order asymptotic approximation of solution to problem (34) when  $t=0$

区域  $D^{(+)}$  内趋向退化解  $u = \varphi^{(+)}(x, y, t)$ , 且解内部层的位置随时间周期变化.

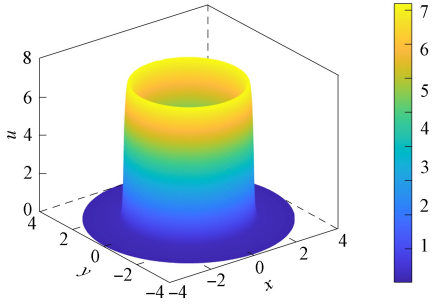


图 3  $t = \pi/4$  时问题 (34) 的解的零阶渐近近似图像

Fig. 3 Picture of zero order asymptotic approximation of solution to problem (34) when  $t = \pi/4$

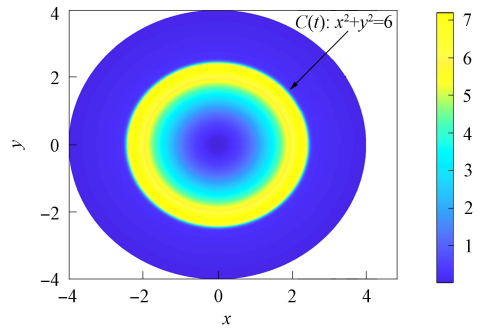


图 4  $t = \pi/4$  时问题 (34) 的解的零阶渐近近似俯视图

Fig. 4 Vertical view of zero order asymptotic approximation of solution to problem (34) when  $t = \pi/4$

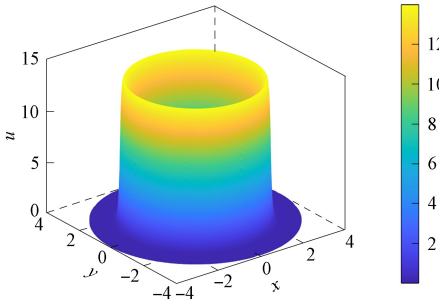


图 5  $t = \pi/2$  时问题 (34) 的解的零阶渐近近似图像

Fig. 5 Picture of zero order asymptotic approximation of solution to problem (34) when  $t = \pi/2$

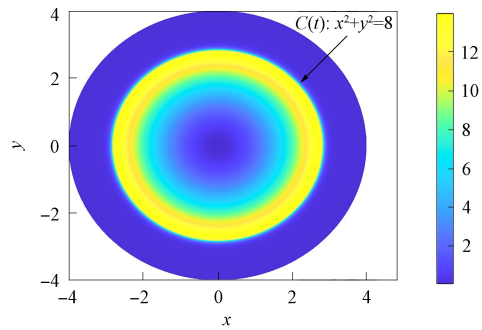


图 6  $t = \pi/2$  时问题 (34) 的解的零阶渐近近似俯视图

Fig. 6 Vertical view of zero order asymptotic approximation of solution to problem (34) when  $t = \pi/2$

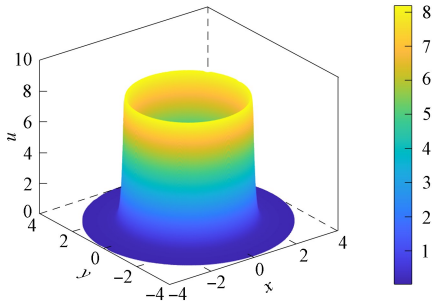


图 7  $t = 3\pi/4$  时问题 (34) 的解的零阶渐近近似图像

Fig. 7 Picture of zero order asymptotic approximation of solution to problem (34) when  $t = 3\pi/4$

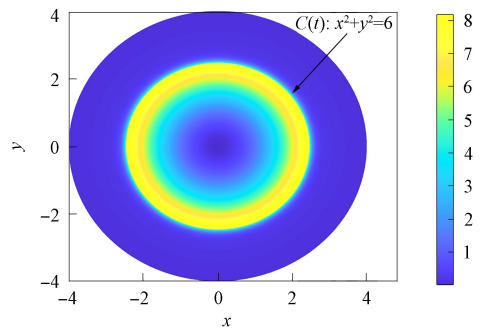


图 8  $t = 3\pi/4$  时问题 (34) 的解的零阶渐近近似俯视图

Fig. 8 Vertical view of zero order asymptotic approximation of solution to problem (34) when  $t = 3\pi/4$

综上所述, 本文研究了一类具有不连续反应项的二维奇异摄动反应扩散方程的空间对照结构型解. 首先, 用空间对照结构理论和边界层函数法, 结合渐近微分不等式方法和光滑缝接法, 构造了边值问题具有内部层和边界层的解直到  $n$  阶的渐近展开式, 其中  $n$  为任意常数; 其次, 证明了边值问题空间对照结构型解的存在性和局部渐近稳定性, 并给出了稳定性条件; 最后, 给出一个实例, 由图像清晰可见解在曲线  $C(t)$  处发生了跳跃, 表明这类应用问题可使用本文算法构造的渐近解进行分析, 加强了具有二维奇摄动反应扩散方程的数学模型问题在多领域中的作用.

### 参 考 文 献

[ 1 ] SIDOROVA A E, LEVASHOVA N T, MELNIKOVA A A, et al. Autowave Self-organization in Heterogeneous Natural-Anthropogenic Ecosystems [J]. Moscow Univ Phys Bull, 2016, 71(6): 562-568.

- [ 2 ] LEVASHOVA N T, MELNIKOVA A A, LUK'YANENKO D V, et al. Modeling of Ecosystems as a Process of Self-organization [J]. *Mat Model*, 2017, 29(11): 40-52.
- [ 3 ] LEVASHOVA N T, NIKOLAEVA O A, PASHKIN A D. Simulation of the Temperature Distribution at the Water-Air Interface by Using the Theory of Contrast Structures [J]. *Moscow Univ Phys Bull*, 2015, 70(5): 341-345.
- [ 4 ] ORLOV A O, LEVASHOVA N, BURBAEV T. The Use of Asymptotic Methods for Modelling of the Carriers Wave Functions in the Si/SiGe Heterostructures with Quantum-Confined Layers [J]. *J Phys Conf Ser*, 2015, 586: 012003-1-012003-5.
- [ 5 ] NEFEDOV N N, NI M K. Internal Layers in the One-Dimensional Reaction-Diffusion Equation with a Discontinuous Reactive Term [J]. *Comput Math Math Phys*, 2015, 55(12): 2001-2007.
- [ 6 ] LEVASHOVA N T, NIKOLAEVA O A. Asymptotic Study of the Solution to the Heat Equation near the Interface between Two Media [J]. *Model Anal Inf Syst*, 2017, 24(3): 339-352.
- [ 7 ] NI M K, PANG Y F, LEVASHOVA N T, et al. Internal Layers for a Singularly Perturbed Second-Order Quasilinear Differential Equation with Discontinuous Right-Hand Side [J]. *Differ Equat*, 2017, 53(12): 1567-1577.
- [ 8 ] LEVASHOVA N T, NEFEDOV N N, NIKOLAEVA O A, et al. The Solution with Internal Transition Layer of the Reaction-Diffusion Equation in Case of Discontinuous Reactive and Diffusive Terms [J]. *Math Methods Appl Sci*, 2018, 41(18): 9203-9217.
- [ 9 ] LEVASHOVA N T, NEFEDOV N N, ORLOV A O. Time-Independent Reaction-Diffusion Equation with a Discontinuous Reactive Term [J]. *Comput Math Math Phys*, 2017, 57(5): 854-866.
- [10] LEVASHOVA N T, NEFEDOV N N, ORLOV A O. Asymptotic Stability of a Stationary Solution of a Multidimensional Reaction-Diffusion Equation with a Discontinuous Source [J]. *Comput Math Math Phys*, 2019, 59(4): 573-582.
- [11] VASILEVA A B, BUTUZOV V F. Asymptotic Methods in Singular Perturbation Theory [M]. Moscow: Vysshaya Shkola, 1990: 6-28.
- [12] NEFEDOV N N. The Method of Differential Inequalities for Some Singularly Perturbed Partial Differential Equations [J]. *Differ Uravn*, 1995, 31(4): 719-722.
- [13] NEFEDOV N N. An Asymptotic Method of Differential Inequalities for the Investigation of Periodic Contrast Structures; Existence, Asymptotics, and Stability [J]. *Differ Equat*, 2000, 36(2): 298-305.
- [14] PAO C V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations [M]. New York: Springer, 1992: 56-64.
- [15] SATTINGER D H. Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems [J]. *Indiana U Math J*, 1972, 21(11): 979-1000.
- [16] DE COSTER C, OBERSNEL F, OMARI P. A Qualitative Analysis, via Lower and Upper Solutions of First Order Periodic Evolutionary Equations with Lack of Uniqueness [M]//Handbook of Differential Equations, Vol. III. Amsterdam: Elsevier, 2006: 203-339.

(责任编辑: 李琦)