doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024435

树高不为零的三圈图的 $D(2)$-点和可区别全染色

白 羽，强会英，何 静
（兰州交通大学 数理学院，兰州 730070）

摘要： 用分析法、反证法和组合零点定理，研究树高不为零的三圈图的 $D(2)$-点和可区别全染色问题，得到了该类图的 $D(2)$-点和可区别全色数的一个上界为 $\Delta(G)+3$.

关键词： 三圈图；$D(2)$-点和可区别全染色；$D(2)$-点和可区别全色数
中图分类号： O157.5 **文献标志码：** A **文章编号：** 1671-5489(2025)04-1075-08

$D(2)$-Vertex Sum Distinguishing Total Coloring of Tricyclic Graph with Non Zero Tree Height

BAI Yu, QIANG Huiying, HE Jing
(*School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: We study the $D(2)$-vertex sum distinguishing total coloring problem of a tricyclic graph with non zero tree height by using analytic method, contradiction method, and the Combinatorial Nullstellensatz, and obtain an upper bound on the $D(2)$-vertex sum distinguishing total coloring for this type of graphs is $\Delta(G)+3$.

Keywords: tricyclic graph; $D(2)$-vertex sum distinguishing total coloring; $D(2)$-vertex sum distinguishing total chromatic number

目前，关于图可区别全染色的研究已取得了许多结果. 张忠辅等[1]提出了图的 $D(\beta)$-点可区别全染色的概念，并研究了一些图的 $D(\beta)$-点可区别全色数；Pilśniak 等[2]提出了图的邻和可区别全染色的概念，并给出猜想：对 $|V(G)|\geqslant 2$ 的图 G，有 $\chi''_{\Sigma}(G)\leqslant\Delta(G)+3$；袁清厚[3]对随机图的 $D(\beta)$-点和可区别全染色算法进行了研究，并得出了路图、圈图等相关结论；谭钧铭[4]研究了三圈图的邻和可区别全染色，得到了三圈图的邻和可区别全色数；刘欢[5]研究了单圈图与双圈图的 2-距离和可区别全色数.

基于上述研究，本文讨论树高不为零的三圈图的 $D(2)$-点和可区别全色数. 本文讨论的图均为有限、无向的简单连通图，其中 $V(G)$，$E(G)$分别表示图 G 的点集和边集，$\phi(G)$表示全染色中点集与边集之间的关联函数，$d(u)$表示点 u 的度，$\Delta(G)$表示图 G 的最大度，$d(u,v)$表示 u 和 v 两点之间的距离，$d(\Delta,\Delta)$表示图中两个最大度点之间的距离，1^- 表示度为 1 的点，$|S_1|$表示色集合所含元素的个数，三圈图的树高是指三圈图中所含的树上点到根点 v_n 间最长路的长度. 其他未说明的符号参考文献[6-7].

收稿日期： 2024-10-31.
第一作者简介： 白 羽(1998—)，女，汉族，硕士研究生，从事图论及其应用的研究，E-mail：2453825105@qq.com. **通信作者简介：** 强会英(1968—)，女，汉族，硕士，教授，从事图论及其应用的研究，E-mail：qhy2005ww@126.com.
基金项目： 国家自然科学基金(批准号：61962035).

1 预备知识

定义1[3] 若图 G 的一个 k-正常全染色 ϕ 满足：$\forall u,v\in V(G)$，当 $d_G(u,v)\leqslant 2$ 时，有 $S(u)\neq S(v)$，其中 $S(u)=\phi(u)+\sum\limits_{uv\in E(G)}\phi(uv)$，则 ϕ 称为图 G 的 k-$D(2)$-点和可区别全染色，简记为 k-$D(2)$-VSDTC，G 的 $D(2)$-点和可区别的全色数记为 $\chi''_{2-\sum}(G)$，即

$$\chi''_{2-\sum}(G)=\min\{k\,|\,G\text{ 存在}k\text{-}D(2)\text{-VSDTC}\}.$$

引理1[2] 设图 K_n 是 $n\geqslant 2$ 的完全图，则

$$\chi''_{\sum}(K_n)=\chi''_{2-\sum}(K_n)=\begin{cases}n+1, & n\equiv 0(\bmod 2);\\ n+2, & n\equiv 1(\bmod 2).\end{cases}$$

引理2[2] 设 T 是阶数 $n\geqslant 3$ 的树，则其2-距离和可区别全色数 $\chi''_{2-\sum}(T)\leqslant\Delta(T)+2$，其中等号成立的条件是树 T 存在两个距离不超过2的最大度点.

引理3[6] 对于简单图 G，$\chi''_{2-\sum}(G)\geqslant\chi''_{\sum}(G)\geqslant\Delta(G)+1$. 若图 G 存在两个距离不超过2的最大度点，则 $\chi''_{2-\sum}(G)\geqslant\Delta(G)+2$，其中 $\chi''_{\sum}(G)$ 表示图 G 的邻和可区别全色数.

引理4[5] 若图 G 中存在一个圈 C_m 上只有一个3度点(圈上其余点为2度点)，如图1中 G^{**} 所示，则当 $m\equiv 2(\bmod 4)$ 时，有 $\chi''_{2-\sum}(G)\geqslant 5$.

引理5[5] 设 G 是 $\Delta(G)=3$ 且树高大于0的双圈图，则

$$\chi''_{2-\sum}(G)=\begin{cases}5, & G^{**}\subseteq G\text{ 或 }\forall x,y\in V(G),\ d(x)=d(y)=\Delta\text{ 且 }d(x,y)\leqslant 2;\\ 4, & \text{其他}.\end{cases}$$

引理6[5] 若 G 是无悬挂边的双圈图 $B_i(1\leqslant i\leqslant 5)$，如图1中 $B_1\sim B_5$ 所示，则 $\chi''_{2-\sum}(B_1)=4$，$\chi''_{2-\sum}(B_i)=5(i=2,4,5)$，$\chi''_{2-\sum}(B_3)=\begin{cases}5, & \text{至少存在一个单圈的圈长为 }g\equiv 2(\bmod 4);\\ 4, & \text{其他}.\end{cases}$

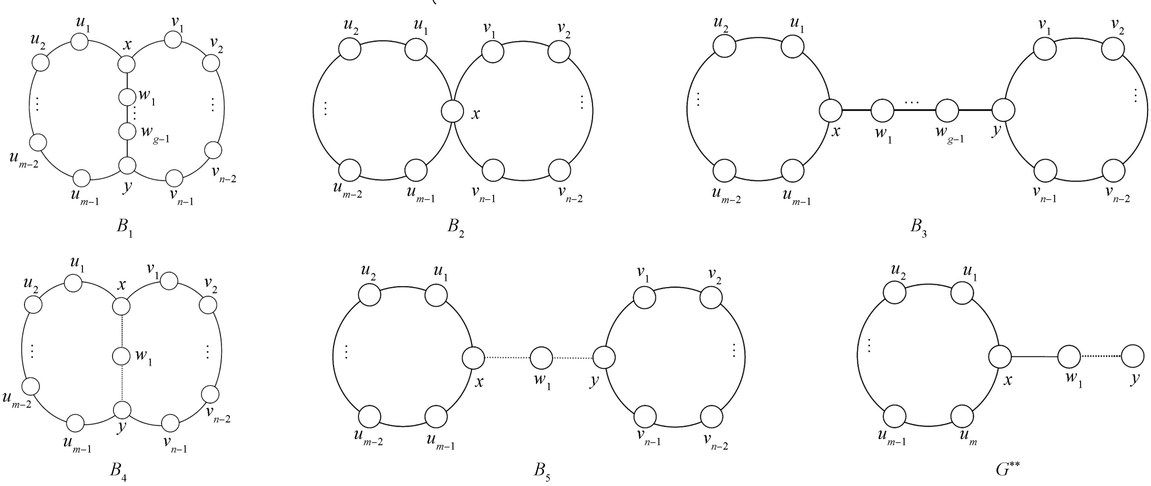

图1 双圈图及特殊子图

Fig. 1 Bicyclic graphs and special subgraphs

引理7(组合零点定理)[8] 设 F 为任一数域，$Q=Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 F 上的多项式，设 $\deg(Q)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$，其中 k_i 为非负整数，且 $C_Q(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n})\neq 0$，若 $S_1,S_2,\cdots,S_n\subseteq F$ 且 $|S_i|>k_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则存在 $s_1\in S_1$，$s_2\in S_2$，$\cdots$，$s_n\in S_n$，使得 $Q(s_1,s_2,\cdots,s_n)\neq 0$.

引理8[9] 设 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^n$ 是关于 n 个变量的多项式，其中 $n\geqslant 2$，则多项式 Q 中最高次项 $(x_1x_2x_3\cdots x_n)^n$ 的系数 $C_Q((x_1x_2x_3\cdots x_n)^n)\neq 0$.

定义2[10] 边数等于顶点数加二的简单连通图称为三圈图.

2　主要结果

将树高为 0 的三圈图记为 $H=\{H_1,H_2,\cdots,H_{15}\}$，如图 2 所示.

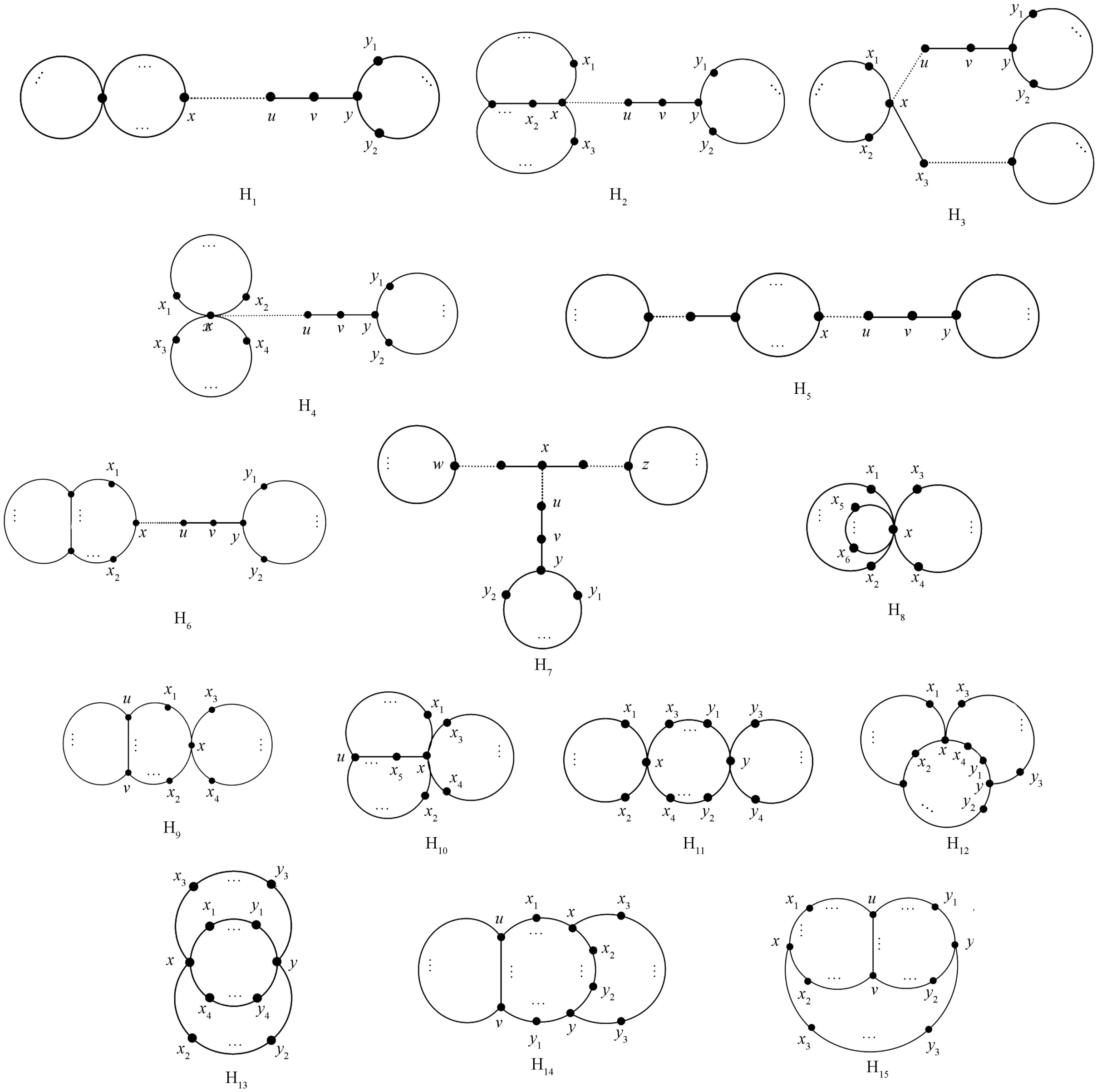

图 2　有根树树高为 0 的三圈图

Fig. 2　Tricyclic graghs with a tree height of zero

定理 1　若 $G=G_i$ 是由 $H_i(i=5,6,7,14,15)$ 连接有根树形成的三圈图，且 $\Delta(G)=3$，则

$$\chi''_{2-\Sigma}(G)=\begin{cases}5, & G^{**}\subseteq G \text{ 或 } d(\Delta,\Delta)\leqslant 2;\\ 4, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明：根据有根树的树高分两种情形讨论.

情形 1）图 G 的树高为 1，即 G 有悬挂边.

① $d(\Delta,\Delta)\geqslant 3$，且 $G^{**}\nsubseteq G$.

此时，由引理 3 得 $\chi''_{2-\Sigma}(G)\geqslant 4$，易证对图 $H_i(i=5,6,7,14,15)$，有 $\chi''_{2-\Sigma}(H_i)=4$，则在 H_i 的 4-$D(2)$-VSDTC基础上，给悬挂边进行正常全染色，即可得到 G 的一个 4-$D(2)$-VSDTC.

② $d(\Delta,\Delta)\leqslant 2$.

此时，由引理 3 得 $\chi''_{2-\Sigma}(G)\geqslant 5$，易验证 $\chi''_{2-\Sigma}(H_i)=5$. 在图 $H_i(i=5,6,7,14,15)$的 5-$D(2)$-

VSDTC 基础上，给所有悬挂边进行正常全染色，不妨令 $d(v)=3$，点 v 在 2-距离内的最大度点至多有 7 个，且这 7 个点中至少有 3 对点之间的距离超过 2，至少需要 4 种不同的和值数，而 $\binom{5}{4}=5$，5 种颜色的 4 元集合包含 5 种不同的和值数，$5>4$，最大度点之间易和可区别. 此外，由于 $\binom{5}{4}+\binom{5}{3}=15$，包含 12 种不同的和值数，3 度点与 2 度点之间易和可区别，故图 G 存在一个 5-$D(2)$-VSDTC.

③ $G^{**}\subseteq G$.

若 $G^{**}\subseteq G$，则由引理 4 得 $\chi''_{2-\Sigma}(G)\geqslant 5$. 易证图 $H_i(i=5,6,7,14,15)$ 存在 5-$D(2)$-VSDTC，在 $H_i(i=5,6,7,14,15)$ 的 5-$D(2)$-VSDTC 基础上，给 G 的悬挂边正常全染色，对于图 G 中的悬挂点，即 1^- 点，需要 2 种不同色，$\binom{5}{2}=10$，包含 7 种不同的和值数，1^- 点易与其余点和可区别，故 $\chi''_{2-\Sigma}(G)=5$.

情形 2) 有根树树高大于 1.

反证法. 假设图 G 是一个极小反例，即 $\Delta(G)=3$，且 G 是使 $|V(G)|+|E(G)|$ 最小的不存在 k-$D(2)$-VSDTC的图，G 的任何真子图 G' 有一个 k-$D(2)$-VSDTC ϕ'，其中

$$k=\begin{cases}5, & G^{**}\subseteq G \text{ 或 } d(\Delta,\Delta)\leqslant 2;\\ 4, & \text{其他}.\end{cases}$$

选择树上最长的路，其悬挂点为 v. v 的邻点 u 不在圈上，u 仅有一个非悬挂邻点 ω. 令 $G'=G-uv$，在 ϕ' 的基础上，给边 uv 及点 v 染色，将 ϕ' 拓展为 G 的 5-$D(2)$-VSDTC ϕ，其中 $2\leqslant d_G(u)\leqslant 3$.

① 当 $d(\Delta,\Delta)\geqslant 3$，且 $G^{**}\not\subseteq G$ 时，$\chi''_{2-\Sigma}(G)\geqslant 4$.

当 $d_G(u)=2$ 时，在 G' 染色下，擦去点 u 和边 uv 的颜色，对边 uv 和点 u 进行重新染色，有 3 种不同的和值数. 由于 G 中 $d(\Delta,\Delta)\geqslant 3$，点 u 在 2-距离以内至多有 2 个同度点，$3>2$，且 3 度点与 2 度点易和可区别. 因此至少存在一种染法使得图 G 满足 $D(2)$-点和可区别全染色的条件.

当 $d_G(u)=3$ 时，在 G' 染色下，从色集合 $\{1,2,3,4\}$ 中选取点 u 未表现的颜色染边 uv，则 $S(u)=10$，点 u 在 2-距离以内只有一个最大度点，与 2 度点之间易和可区别，即可得图 G 的一个 4-$D(2)$-VSDTC，与 G 是极小反例矛盾.

② 当 $d(\Delta,\Delta)\leqslant 2$ 或 $G^{**}\subseteq G$ 时，$\chi''_{2-\Sigma}(G)\geqslant 5$.

当 $d_G(u)=2$ 时，在 G' 染色下，擦去点 u 和边 uv 的颜色，对边 uv 和点 u 进行重新染色，有 5 种不同的和值数. 点 u 在 2-距离以内至多与 3 个点要和可区别，$5>3$. 因此存在一种染色方法使得图 G 满足 $D(2)$-点和可区别全染色的条件.

当 $d_G(u)=3$ 时，点 u 的悬挂点为 v,v_1，在 G' 染色下，擦去点 u 和边 uv,uv_1 的颜色，对边 uv,uv_1 和点 u 进行重新染色，有 4 种不同的和值数. 点 u 在 2-距离以内至多与 3 个点要和可区别，$4>3$. 因此存在一种染色方法使得图 G 满足 $D(2)$-点和可区别全染色的条件，与 G 是极小反例矛盾. 故 $\chi''_{2-\Sigma}(G)=5$.

定理 2 若图 $G=G_i$ 是由 $H_i(1\leqslant i\leqslant 15)$ 连接有根树形成的，且 $\Delta(G)\geqslant 4$，则有 $\chi''_{2-\Sigma}(G)\leqslant\Delta(G)+3$. 特别地，当图 G 中树高大于 1 时，有

$$\chi''_{2-\Sigma}(G)=\begin{cases}\Delta(G)+1, & d(\Delta,\Delta)\geqslant 3;\\ \Delta(G)+2, & d(\Delta,\Delta)\leqslant 2.\end{cases}$$

证明：根据图 G 有根树的树高分以下两种情形讨论.

情形 1) 图 G 的有根树树高为 1.

① 悬挂边不在 2 度点上.

当 $G=G_1$ 时，由引理 3 知，$\chi''_{2-\Sigma}(G)\geqslant\Delta(G)+1$；若图 G 存在两个距离不超过 2 的最大度点，则 $\chi''_{2-\Sigma}(G)\geqslant\Delta(G)+2$. 下面只需证明 G_1 有一个$(\Delta+3)$-$D(2)$-VSDTC.

若 $\Delta(H_1)=4$，且有唯一最大度点，则易知 $\chi'_{2-\Sigma}(H_1)=\Delta(H_1)+1=5$，故 H_1 有一个 5-$D(2)$-

VSDTC. 对 $\forall u,v\in V(H_1)$，若 u,v 无悬挂边，则 u,v 是 5-$D(2)$-VSDTC 的. 又由于 $\Delta(G)\geqslant\Delta(H_1)=4$，则 u,v 是 $\Delta(G)$-$D(2)$-VSDTC 的. 若 u,v 有悬挂边，则根据 $d(u),d(v)$ 的大小分类.

若 $d_G(u)=d_G(v)=\Delta(G)$，则当 $d(\Delta,\Delta)\geqslant 3$ 时，$\chi''_{2-\Sigma}(G_1)\geqslant\Delta(G_1)+1$，给 u,v 的悬挂边和悬挂点正常全染色，$\Delta(G_1)+1$ 色可染，故 u,v 是 $(\Delta(G)+1)$-$D(2)$-VSDTC 的；当 $d(\Delta,\Delta)\leqslant 2$ 时，$\chi''_{2-\Sigma}(G_1)\geqslant\Delta(G_1)+2$，在 H_1 的 $(\Delta(H_1)+1)$-$D(2)$-VSDTC 染色基础上，给 u,v 的悬挂边和悬挂点正常全染色，使得 $S_G(u)\neq S_G(v)$，可得 u,v 是 $(\Delta(G)+2)$-$D(2)$-VSDTC 的.

若 $d_G(u)\neq d_G(v)$，则不妨令 $d_G(u)<d_G(v)=l$，当图中存在 $d(\Delta,\Delta)\geqslant 3$ 时，在图 H_1 的 5-$D(2)$-VSDTC 染色基础上，给 v 的悬挂边和点 v 染集合 $\{1,2,\cdots,\Delta+1\}$ 中所缺的颜色，因此必有 $S(u)\leqslant S(v)$，故 u,v 是 $(\Delta(G)+1)$-$D(2)$-VSDTC 的；当 $d(\Delta,\Delta)\leqslant 2$ 时，给 u,v 的悬挂边和点 u,v 在集合 $\{1,2,\cdots,\Delta(G)+3\}$ 中选色，进行正常全染色，使得 $S_G(u)\neq S_G(v)$，则 u,v 是 $(\Delta(G)+3)$-$D(2)$-VSDTC 的.

综上可知，当 $G=G_1$ 时结论成立. 对图 $G_i(2\leqslant i\leqslant 15)$，证明方法同 G_1，故略.

② 悬挂边在 2 度点上.

(i) 对任意满足该条件的点 z，有如图 3 所示结构，其中

$$d_G(z)=d_G(x_1)=d_G(x_2)=d_G(y_1)=d_G(y_2)=\Delta(G).$$

由于 G 在 2-距离内至少有 2 个最大度点，故 $\Delta(G)+2\leqslant\chi''_{2-\Sigma}(G)\leqslant\Delta(G)+3$. 反证法. 设图 G 是一个极小反例，即 $\Delta(G)\geqslant 4$，且 G 是使得 $|V(G)|+|E(G)|$ 最小的不存在 $(\Delta(G)+3)$-$D(2)$-VSDTC 的图，则 G 的任何真子图 G' 都有一个 $(\Delta(G)+3)$-$D(2)$-VSDTC.

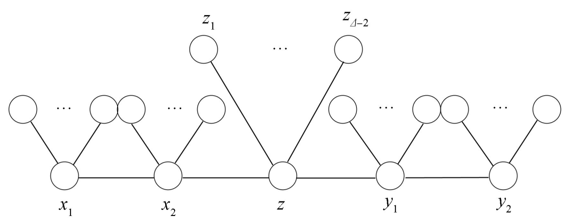

图 3　满足条件 $d_G(z)=d_G(x_1)=d_G(x_2)=d_G(y_1)=d_G(y_2)=\Delta(G)$ 的图

Fig. 3　Graph that satisfies condition $d_G(z)=d_G(x_1)=d_G(x_2)=d_G(y_1)=d_G(y_2)=\Delta(G)$

令 $G'=G-zz_1-zz_2$，图 G 中边 zz_1,zz_2 用色 x_1,x_2 进行染色，悬挂点 z_1,z_2 正常全染色，用 $S'(z)$ 表示在 G' 中点 z 色集合的所有元素的色和，边 zz_1,zz_2 可用颜色集记为 S_1,S_2. 根据正常边染色条件可知

$$|S_1|=|S_2|=(\Delta(G)+3)-(\Delta(G)-2)=5,$$

再根据染色条件可得多项式

$$\begin{aligned}Q(x_1,x_2)=&(x_1-x_2)(x_1-\phi'(z))(x_2-\phi'(z))(x_1+x_2+S'(z)-S'(x_1))\times\\&(x_1+x_2+S'(z)-S'(x_2))(x_1+x_2+S'(z)-S'(y_1))\times\\&(x_1+x_2+S'(z)-S'(y_2)).\end{aligned}$$

去掉 $Q(x_1,x_2)$ 中的常数得

$$Q'(x_1,x_2)=x_1x_2(x_1-x_2)(x_1+x_2)^4.$$

用 MATLAB 软件计算得到 $x_1^4x_2^3$ 的系数为 $2\neq 0$，$4<5$，$3<5$. 根据组合零点定理知，可在 S_1,S_2 中选取满足 $D(2)$-点和可区别全染色条件的 x_1,x_2，即可得到图 G 的一个 $(\Delta(G)+3)$-$D(2)$-VSDTC.

对图 G 中的悬挂点 z_1,z_2，需要 2 种不同色，

$$\binom{\Delta+3}{2}=\frac{(\Delta+3)(\Delta+2)}{2},$$

其中和值数最小为 3，最大为 $(2\Delta+5)$，存在 $(2\Delta+3)$ 种不同的和值数，$2\Delta+3\geqslant\Delta$，1^- 点易与其余点和可区别，故 $\chi''_{2-\Sigma}(G)\leqslant\Delta(G)+3$.

(ii) 当图 G 中的最大度点都不在图 H_i 的 2 度点上时，圈上存在一个 2 度点 z，且 $3\leqslant d(z)\leqslant\Delta-1$. 同理可得 $\chi''_{2-\Sigma}(G)\leqslant\Delta+3$.

③ 图 $H_i(1\leqslant i\leqslant 15)$ 上存在一个 2 度点 z，使得 $d_{H_i}(z)=2$ 且 $d_G(z)\geqslant 3$，且点 z 的 2-距离内仅有一个最大度点.

(i) 图 G 中 $d(\Delta,\Delta)\geqslant 3$，$\chi''_{2-\Sigma}(G)\leqslant\Delta(G)+3$. 反证法. 假设图 G 是一个极小反例，且 G 是使得 $|V(G)|+|E(G)|$ 最小的不存在 $(\Delta(G)+3)$-$D(2)$-VSDTC 的图，则 G 的任何真子图 G' 都有一个 $(\Delta(G)+3)$-$D(2)$-VSDTC.

当 $\Delta(G)>\Delta(H_i)(1\leqslant i\leqslant 15)$，或存在图 $H_i(1\leqslant i\leqslant 15)$ 的一个 2 度点是图 G 的最大度点时，不妨设图 G 中的最大度点为点 z，点 z 的悬挂边为 $zz_i(i\geqslant 1)$. 令 $G'=G-zz_i$，则图 G' 有 $(\Delta(G)+1)$-$D(2)$-VSDTC. 增加边 zz_i 后对其进行正常全染色即可得 G 的一个 $(\Delta(G)+1)$-$D(2)$-VSDTC，$(\Delta(G)+1)$ 色即可染，与 G 不存在 $(\Delta(G)+3)$-$D(2)$-VSDTC 矛盾.

当 $\Delta(G)=\Delta(H_i)(1\leqslant i\leqslant 15)$，$d(\Delta,\Delta)\geqslant 3$ 时，对于图 $G_i(i=1,2,3,9,11,12,13)$，存在图 H_i 的一个2 度点 z 是图G 的 3 度点，经验证 $\chi''_{2-\Sigma}(H_i)=5(i=1,2,3,9,11,12,13)$. 先用色集合$\{1,2,3,4,5\}$中的颜色，对 H_i 进行 $D(2)$-点和可区别正常全染色，再对点 z 的悬挂边进行染色，从色集合$\{1,2,3,4,5,6,7\}$中选取颜色，对其进行正常全染色. 类似情形 1)中②的(ii)可知，至少存在一种染色方法，使得 G_i 是 7-$D(2)$-VSDTC.

对于图 G_4,G_{10}，$\Delta(G_i)=5$，存在图 H_i 的一个 2 度点 z 不是图G 的最大度点，故点 $d_G(z)=3$ 或 4. 当 $d_G(z)=3$ 时，令 $G'=G-zz_1$，图 G 中边 zz_1 用色 x_1 进行染色，悬挂点 z_1 的选择性较大，边 zz_1 可用颜色集为

$$|S_1|=(\Delta(G)+3)-2=\Delta(G)+1=6,$$

再根据染色条件可得多项式

$$Q(x_1)=(x_1-\phi'(z))(x_1+S'(z)-S'(x_1))(x_1+S'(z)-S'(x_2))\times\\(x_1+S'(z)-S'(y_1))(x_1+S'(z)-S'(y_2)).$$

去掉 $Q(x_1)$中的常数得 $Q'(x_1)=x_1^5$. 根据组合零点定理，可在 S_1 中选取满足 $D(2)$-点和可区别全染色条件的 x_1，即可得图 G 的一个 $(\Delta(G)+3)$-$D(2)$-VSDTC. 当 $d_G(z)=4$ 时，令 $G'=G-zz_1-zz_2$，图 G 中边 zz_1,zz_2 用色 x_1,x_2 进行染色，悬挂点 z_1,z_2 选择性较大，边 zz_1,zz_2 可用颜色集为

$$|S_1|=|S_2|=(\Delta(G)+3)-2=\Delta(G)+1=6,$$

再根据染色条件可得多项式

$$Q(x_1,x_2)=(x_1-x_2)(x_1-\phi'(z))(x_2-\phi'(z))(x_1+x_2+S'(z)-S'(x_1))\times\\(x_1+x_2+S'(z)-S'(x_2))(x_1+x_2+S'(z)-S'(y_1))\times\\(x_1+x_2+S'(z)-S'(y_2)).$$

去掉 $Q(x_1,x_2)$中的常数得

$$Q'(x_1,x_2)=x_1x_2(x_1-x_2)(x_1+x_2)^4.$$

用 MATLAB 软件计算得到 $x_1^4x_2^3$ 的系数为 $2\neq 0$，$4<6$，$3<6$. 根据组合零点定理，可在 S_1,S_2 中选取满足 $D(2)$-点和可区别全染色条件的 x_1,x_2，对于图 G 中的悬挂点，需要 2 种不同色，

$$\binom{\Delta+3}{2}=\frac{(\Delta+3)(\Delta+2)}{2},$$

存在$(2\Delta+3)$种不同的和值数，1^-点易染，故 $\chi''_{2-\Sigma}(G)\leqslant\Delta(G)+3$. 从而可得图 G 的一个$(\Delta(G)+3)$-$D(2)$-VSDTC，与 G 是极小反例矛盾.

对于图 G_8，$\Delta(G_i)=6$，存在图 H_i 的一个 2 度点 z 不是图G 的最大度点，故点 $d_G(z)=3$ 或 4 或 5. 证明过程同上.

对于图 $G_i(i=5,6,7,14,15)$，$\Delta(G_i)=3$. 因此不存在图 H_i 的一个 2 度点 z 使得 $d_{H_i}(z)=2$ 且 $d_G(z)\geqslant 3$，否则点 z 为图G 的最大度点，与假设矛盾.

(ii) 图 G 中 $d(\Delta,\Delta)\leqslant 2$，$\chi''_{2-\Sigma}(G)\leqslant\Delta(G)+3$. 反证法. 假设图 G 是一个极小反例，且 G 是使得 $|V(G)|+|E(G)|$ 最小的不存在 $(\Delta(G)+3)$-$D(2)$-VSDTC 的图，G 的任何真子图 G' 都有一个 $(\Delta(G)+3)$-$D(2)$-VSDTC.

当 G 中存在点 z 使得 $d_G(z)=d_{H_i}(z)=\Delta(G)$时，其中点 z 为图 H_i 的 2 度点，则 G 必有图 3 中的结构；当图 G 中最大度点都不在图 H_i 的 2 度点上时，$3\leqslant d_G(z)\leqslant\Delta(G)-1$，证明方法同情形 1)中②

的(ii)．故 $\chi''_{2-\Sigma}(G)\leqslant\Delta+3$．

从而当图 G 的有根树树高为 1 时，结论成立．

情形 2）有根树树高大于 1．

$\chi''_{2-\Sigma}(G)\geqslant\Delta(G)+1$，当图 G 存在两个距离不超过 2 的最大度点时，$\chi''_{2-\Sigma}(G)\geqslant\Delta(G)+2$．选择树上最长的路，其悬挂点为 v．v 的邻点 u 不在圈上，u 仅有一个非悬挂邻点 w．令 $d(u)=k$，$k\geqslant 2$，$x_1,x_2,\cdots,x_{k-2}$ 是 u 除 w 和 v 外的邻点，则 $d(v)=d(x_1)=\cdots=d(x_{k-2})=1$，$y_1,y_2,\cdots,y_{d(w)-1}$ 是 w 除 u 外的邻点．令 $\phi'(uw)=a$，$\phi'(w)=\Delta+2$，根据 G 中最大度点间的距离分两种情形讨论．

① $d(\Delta,\Delta)\leqslant 2$．反证法．假设图 G 是一个极小反例，即图 G 是 $|V(G)|+|E(G)|$ 最小的不存在 $(\Delta+2)$-$D(2)$-VSDTC 的图，则 G 的任何真子图 G' 有一个 $(\Delta+2)$-$D(2)$-VSDTC ϕ'．下面根据 k 的大小分别讨论，将 ϕ' 拓展为 G 的 $(\Delta+2)$-$D(2)$-点和可区别全染色 ϕ．

(i) $k<\Delta$．此时在正常全染色下，点 u 与点 $w,y_1,y_2,\cdots,y_{d(w)-1}$ 要做到和可区别．若

$$d(u)=d(y_1)=\cdots=d(y_{d(w)-1})=k,$$

从色集合 $\{1,2,3,\cdots,\Delta+2\}$ 选取 $(k+1)$ 个元素，共有 $\binom{\Delta+2}{k+1}$ 种选择，和值数范围为

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}\leqslant S\leqslant\frac{(2\Delta-k+4)(k+1)}{2},$$

不同和值数为 $\Delta k-k^2+\Delta+2$．最多有不超过 Δ 个 k 度点需要达到和可区别，此时 $d(w)=\Delta$，且 $\Delta k-k^2+\Delta+2\geqslant\Delta$，否则 $\Delta<\frac{k^2-2}{k}=k-\frac{2}{k}$，与 $2\leqslant k<\Delta$ 矛盾．在染色 ϕ' 的基础上，对点 u 及其关联边重新染色，出现的不同和值数可使 u,w,y_i 中的点色和不同，满足 $(\Delta+2)$-$D(2)$-VSDTC．若点 y_i 与 u,w 度不相等，与其余点易和可区别，故 $\chi''_{2-\Sigma}(G)\leqslant\Delta(G)+2$．

(ii) $k=\Delta$．此时由假设得 $S_{G'}(w)\neq S_{G'}(y_i)$，$G'$ 存在 $(\Delta(G')+2)$-$D(2)$-点和可区别全染色 ϕ'．令 $G'=G-uv$．下面将 ϕ' 拓展为 G 的 $(\Delta+2)$-$D(2)$-点和可区别全染色 ϕ．对边 $ux_1,ux_2,\cdots,ux_{k-2},uv,uw$ 重新染色，令 $\phi(ux_i)=z_i(1\leqslant i\leqslant k-2)$，$\phi(uv)=z_{k-1}$，所得染色为正常全染色．令 S_i 表示 z_i 的可用颜色集，$i=1,2,\cdots,k-1$，则 $|S_i|=(\Delta(G)+2)-2=\Delta(1\leqslant i\leqslant k-1)$，由染色条件得多项式

$$Q(z_1,z_2,\cdots,z_{k-1})=\prod_{1\leqslant m<n\leqslant k-1}(z_m-z_n)\Big(\sum_{s=1}^{k-1}z_s+\phi'(uw)\phi'(u)-S_{G'}(w)\Big)\times$$
$$\prod_{k=1}^{d(w)-1}\Big(\sum_{s=1}^{k-1}z_s+\phi'(uw)+\phi'(u)-S_{G'}(y_k)\Big).$$

去掉 $Q(z_1,z_2,\cdots,z_{k-1})$ 中的常数得

$$\widetilde{Q}(z_1,z_2,\cdots,z_{k-1})=\prod_{1\leqslant m<n\leqslant k-1}(z_m-z_n)\Big(\sum_{s=1}^{k-1}z_s\Big)^{d(w)}.$$

令

$$\widetilde{Q}_1(z_1,z_1,\cdots,z_{k-1})=\widetilde{Q}(z_1,z_2,\cdots,z_{k-1})\prod_{1\leqslant m<n\leqslant k-1}(z_m-z_n)\Big(\sum_{s=1}^{k-1}z_s\Big)^{\theta},$$

可得

$$\widetilde{Q}'_1(z_1,z_2,\cdots,z_{k-1})=\prod_{1\leqslant m<n\leqslant k-1}(z_m-z_n)^2\Big(\sum_{s=1}^{k-1}z_s\Big)^{k-1}.$$

由引理 8 有

$$C_{\widetilde{Q}_1}((z_1z_2\cdots z_{k-1})^{k-1})=C_{\widetilde{Q}'_1}((z_1z_2\cdots z_{k-1})^{k-1})\neq 0.$$

根据组合零点定理知，$\exists\, s_1\in S_1$，$s_2\in S_2$，$\cdots$，$s_{k-1}\in S_{k-1}$ 满足 $\widetilde{Q}_1(s_1,s_2,\cdots,s_{k-1})\neq 0$，$\widetilde{Q}$ 是 $\widetilde{Q}_1$ 的一个因式，因此 $\widetilde{Q}(z_1,z_2,\cdots,z_{k-1})\neq 0$，即 $\chi''_{2-\Sigma}(G)\leqslant\Delta(G)+2$．

图 G 中的 1^- 点易染，又由引理 3 知，$\chi''_{2-\Sigma}(G)\geqslant\Delta(G)+2$，故 $\chi''_{2-\Sigma}(G)=\Delta(G)+2$．

② $d(\Delta,\Delta)\geqslant 3$．由引理 3 知，$\chi''_{2-\Sigma}(G)\geqslant\Delta(G)+1$．假设图 G 是一个极小反例，即图 G 是 $|V(G)|+|E(G)|$ 最小的不存在 $(\Delta+1)$-$D(2)$-VSDTC 的图，则 G 的任何真子图 G' 有一个 $(\Delta+1)$-

$D(2)$-VSDTC ϕ'. 下面根据 k 的大小分别讨论，将 ϕ' 拓展为 G 的 $(\Delta+1)$-$D(2)$-点和可区别全染色 ϕ.

(i) $k=\Delta$. 此时，显然 u,w,y_i 中只有 u 是最大度点，故

$$S(u)=\frac{(1+\Delta)\Delta}{2},\quad S(u)>S(w),\quad S(u)>S(y_i),$$

在染色 ϕ' 下，$S(w)\neq S(y_i)$，从而 $\chi''_{2-\Sigma}(G)=\Delta(G)+1$.

(ii) 当 $2\leqslant k\leqslant\Delta-1$ 时，分析同情形 2)中①的(i).

综上所述，对树高不为零的三圈图 G，有 $\chi''_{2-\Sigma}(G)\leqslant\Delta(G)+3$.

参考文献

[1] 张忠辅，李敬文，陈祥恩，等. 图的距离不大于 β 的点可区别的全染色[J]. 中国科学(数学)，2006，36(10)：1119-1130.（ZHANG Z F，LI J W，CHEN X E，et al. Vertex-Distinguishing Total Coloring of Graphs with Distance No Greater than β [J]. Scientia Sinica (Mathematica)，2006，36(10)：1119-1130.）

[2] PILŚNIAK M，WOŹNIAK M. On the Total-Neighbor-Distinguishing Index by Sums [J]. Graphs and Combinatorics，2015，31(3)：771-782.

[3] 袁清厚. 随机图的 $D(\beta)$-点和可区别全染色算法的研究[D]. 兰州：兰州交通大学，2021.（YUAN Q H. Researh on $D(\beta)$-Vertex-Sum-Distinguishing Total Coloring Algorithms of Random Graphs [D]. Lanzhou：Lanzhou Jiaotong University，2021.）

[4] 谭钧铭. 几类圈图的邻和可区别染色[D]. 兰州：兰州交通大学，2022.（TAN J M. Neighbor Sum Distinguishing Coloring of Some Classes of Cycle Graphs [D]. Lanzhou：Lanzhou Jiaotong University，2022.）

[5] 刘欢. 若干图类的2-距离和可区别染色问题研究[D]. 兰州：兰州交通大学，2023.（LIU H. 2-Distance Sum Distinguishing Coloring of Some Classes of Graphs [D]. Lanzhou：Lanzhou Jiaotong University，2023.）

[6] 刘欢，强会英，王洪申. 树图的2-距离和可区别染色[J]. 山东大学学报(理学版)，2024，59(2)：47-52.（LIU H，QIANG H Y，WANG H S. 2-Distance Sum Distinguishing Coloring of Trees [J]. Journal of Shandong University (Natural Science)，2024，59(2)：47-52.）

[7] 刘欢，强会英，王洪申. 单圈图的 $D(2)$-点和可区别边染色[J]. 南开大学学报(自然科学版)，2024，57(1)：91-97.（LIU H，QIANG H Y，WANG H S. $D(2)$-Vertex Sum Distinguishing Edge Coloring of Unicyclic Graphs [J]. Journal of Nankai University (Natural Science)，2024，57(1)：91-97.）

[8] WANG W F，WANG Y Q. Adjacent Vertex-Distinguishing Edge Colorings of K_4-Minor Free Graphs [J]. Applied Mathematics Letters，2011，24(12)：2034-2037.

[9] CHENG X H，DING L H，WANG G H，et al. Improved Bounds for Neighbor Sum (Set) Distinguishing Choosability of Planar Graphs [J]. Discrete Mathematics，2020，343(7)：111856-1-111856-19.

[10] CAI G X，XING B H，YU G D. The Harary Index of Tricyclic Graphs [J]. Operations Research Transactions，2015，19(2)：45-53.

（责任编辑：李　琦）