

一类图邻接矩阵的行列式及积和式

马海成

(广东科技学院 通识教育学院, 广东 东莞 523668; 青海民族大学 数学与统计学院, 西宁 810007)

摘要: 基于图上的 Sachs 子图计算图邻接矩阵的行列式与积和式的一个公式, 分别给出计算图邻接矩阵的行列式与积和式的一个删点的递推公式, 并利用这些递推公式, 分别给出计算彩球图邻接矩阵的行列式与积和式的方法. 结果表明, 彩球图邻接矩阵的行列式等于一个具有 16 个变量的函数的全微分, 彩球图邻接矩阵的积和式等于一个具有 4 个变量的函数的全微分.

关键词: 邻接矩阵; 行列式; 积和式; 彩球图; 全微分

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)05-1348-08

Determinants and Prmanents of Adjacency Matrix for a Class of Graphs

MA Haicheng

(College of General Education, Guangdong University of Science and Technology, Dongguan 523668,
Guangdong Province, China; School of Mathematics and Statistics, Qinghai Minzu University, Xining 810007, China)

Abstract: A formula for calculating the determinant and permanent of the adjacency matrix of a graph based on Sachs subgraphs on the graph was given, the author gave a vertex-deletion recursive formula for calculating the determinant and permanent of the adjacency matrix of the graph respectively, and used these recursive formulas to provide a method for calculating the determinant and permanent of the adjacency matrix of the color-ball graph respectively. The results show that the determinant of the adjacency matrix of the color-ball graph is equal to the total differential of a function with 16 variables, and the permanent of the adjacency matrix of the color-ball graph is equal to the total differential of a function with 4 variables.

Keywords: adxjacency matrix; determinant; permanent; color-ball graph; total differential

1 引言与预备知识

本文仅考虑有限无向的简单图. 设 G 是一个 n 阶图, $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示它的点集和边集, 其邻接矩阵定义为 $\mathbf{A}(G) = (a_{ij})_{n \times n}$, 如果点 i 和 j 邻接, 则 $a_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = 0$. 矩阵 $\mathbf{A}(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ 的行列式及积和式分别由下式给出:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}, \quad \text{Per}(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)},$$

收稿日期: 2024-11-04.

作者简介: 马海成(1965—), 男, 回族, 博士, 教授, 从事代数图论的研究, E-mail: qhmymhc@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11561056)和青海省自然科学基金(批准号: 2022-ZJ-924).

这里, S_n 是集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上所有置换构成的对称群, 置换 σ 的符号 $\text{sign}(\sigma)$ 当 σ 偶置换时取值 1, 奇置换时取值 -1 .

图邻接矩阵的行列式与图谱有关, 关于图谱的研究目前已有许多成果^[1-2], 但精确计算出邻接矩阵行列式的研究报道较少. 图邻接矩阵的积和式与该图的完美匹配数有关^[3]. 许多置换计数问题也易转化为矩阵的积和式的计算问题^[3]. 因此, 对积和式的计算备受关注^[4-14]. 虽然矩阵积和式的定义与行列式的定义相似, 也有许多相似性质, 但积和式与行列式有本质不同, Valiant^[4]证明了 $(0, 1)$ -矩阵积和式的计算属于 NP-难问题中一类 #P-完全问题. 因此, 文献[5]研究了如何改变矩阵的元素, 使得积和式的计算转化为行列式. 文献[6-7]研究了 $(0, 1)$ -矩阵积和式取得极值的问题. 文献[8-9]等研究了积和式的近似计算及算法问题. 本文未定义的概念和符号参见文献[1].

图 G 的每个分支都是孤立边或圈的子图称为 G 的基本子图. 图 G 包含所有点的基本子图称为支撑基本子图或 Sachs 子图. 仅有孤立边组成的支撑基本子图称为图 G 的完美匹配. 显然, 具有完美匹配的图的点数一定是偶数. 对图邻接矩阵的行列式与积和式有如下结果.

引理 1^[1] 设 G 是有 n 个点的图, 其邻接矩阵为 $A(G)$, 则

$$\det(A(G)) = (-1)^n \sum_{H \in \mathcal{H}} (-1)^{p(H)} 2^{c(H)},$$

这里 \mathcal{H} 表示图 G 所有 Sachs 子图构成的集合, $p(H)$ 表示图 H 中分支的数目, $c(H)$ 表示图 H 中圈的数目.

引理 2^[10] 设 G 是有 n 个点的图, 其邻接矩阵为 $A(G)$, 则 $\text{Per}(A(G)) = \sum_{H \in \mathcal{H}} 2^{c(H)}$, 这里 \mathcal{H} 表示图 G 的所有 Sachs 子图构成的集合, $c(H)$ 表示图 H 中圈的数目.

引理 3^[1] 设 $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, 这里 $G_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 是图 G 的连通分支, 则

$$\det(A(G)) = \prod_{i=1}^k \det(A(G_i)).$$

引理 4^[5] 设 $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, 这里 $G_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 是图 G 的连通分支, 则

$$\text{Per}(A(G)) = \prod_{i=1}^k \text{Per}(A(G_i)).$$

基于引理 1 和引理 2, 本文给出图邻接矩阵的行列式与积和式一个删点的递推公式, 并利用该递推公式给出一类彩球图邻接矩阵的行列式与积和式的计算公式. 用 K_n, P_n 和 C_n 分别表示 n 个点的完全图、路和圈. 圈 C_m 上的一点与路 P_n 上的一点黏结后得到的图称为 Q -图, 记为 $Q(m, n) (m \geq 3, n \geq 1)$, 如图 1 所示. 显然 $|V(Q(m, n))| = m + n - 1$. 若 $n \geq 2$, 则 $Q(m, n)$ 中存在唯一的一个 1 度点, 称为悬挂点, 若 $n = 1$, 则此时 $Q(m, n) = C_m$, 指定其上的任一点为悬挂点, 将 k 个图 $Q(m_i, n_i)$ 的悬挂点黏结成一个点后形成的图称为彩球图, 记为 $\psi(Q(m_1, n_1), Q(m_2, n_2), \dots, Q(m_k, n_k))$, 其黏结点称为中心点, 记为 W , 如图 2 所示.

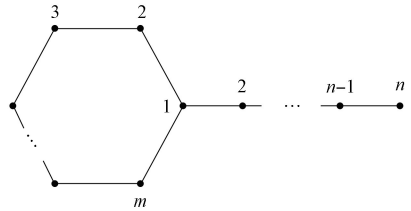


图 1 图 $Q(m, n)$

Fig. 1 Graph $Q(m, n)$

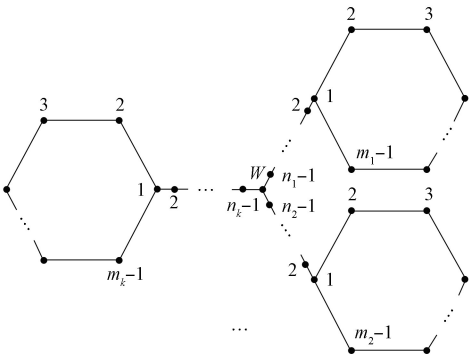


图 2 彩球图 $\psi(Q(m_1, n_1), Q(m_2, n_2), \dots, Q(m_k, n_k))$

Fig. 2 Color-ball graph $\psi(Q(m_1, n_1), Q(m_2, n_2), \dots, Q(m_k, n_k))$

将图 $Q(m, n)$ 按 m, n 被模 4 除的余数分为如下 16 类: $\Omega_{ij} = \{Q(m, n) \mid m \equiv i \pmod{4}, n \equiv j \pmod{4}\}$, $i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, 3$. 在构成彩球图 $\psi(Q(m_1, n_1), Q(m_2, n_2), \dots, Q(m_k, n_k))$ 的 k 个 $Q(m, n)$ 中, 属于 Ω_{ij} 的有 s_{ij} 个. 本文将证明 $\det(A(\psi(Q(m_1, n_1), Q(m_2, n_2), \dots, Q(m_k, n_k))))$ 等于 16 个变量的函数

$$y = x_{00}^{s_{00}} x_{10}^{s_{10}} x_{20}^{s_{20}} x_{30}^{s_{30}} x_{01}^{s_{01}} x_{11}^{s_{11}} x_{21}^{s_{21}} x_{31}^{s_{31}} x_{02}^{s_{02}} x_{12}^{s_{12}} x_{22}^{s_{22}} x_{32}^{s_{32}} x_{03}^{s_{03}} x_{13}^{s_{13}} x_{23}^{s_{23}} x_{33}^{s_{33}}$$

在 $x_{i,j} = p_{i,j-1(\text{mod } 4)}$, $dx_{i,j} = p_{i,j}$ ($i=0,1,2,3; j=0,1,2,3$) 处的全微分 dy , 其中 $p_{i,j}$ 值列于表 1.

表 1 参数 $p_{i,j}$ 的值 $\det(A(Q(m,n)))$, $m \equiv i(\text{mod } 4)$, $n \equiv j(\text{mod } 4)$

Table 1 $\det(A(Q(m,n)))$ values of parameters $p_{i,j}$, $m \equiv i(\text{mod } 4)$, $n \equiv j(\text{mod } 4)$

m	n			
	$0(\text{mod } 4)$	$1(\text{mod } 4)$	$2(\text{mod } 4)$	$3(\text{mod } 4)$
$0(\text{mod } 4)$	$p_{0,0} = 0$	$p_{0,1} = 0$	$p_{0,2} = 0$	$p_{0,3} = 0$
$1(\text{mod } 4)$	$p_{1,0} = 1$	$p_{1,1} = 2$	$p_{1,2} = -1$	$p_{1,3} = -2$
$2(\text{mod } 4)$	$p_{2,0} = 0$	$p_{2,1} = -4$	$p_{2,2} = 0$	$p_{2,3} = 4$
$3(\text{mod } 4)$	$p_{3,0} = -1$	$p_{3,1} = 2$	$p_{3,2} = 1$	$p_{3,3} = -2$

将图 $Q(m,n)$ 按 m,n 被模 2 除的余数分为如下 4 类: $\Gamma_{ij} = \{Q(m,n) \mid m \equiv i(\text{mod } 2), n \equiv j(\text{mod } 2)\}$, $i=0,1, j=0,1$. 在构成彩球图 $\psi(Q(m_1,n_1), Q(m_2,n_2), \dots, Q(m_k,n_k))$ 的 k 个 $Q(m,n)$ 中, 属于 Γ_{ij} 的有 t_{ij} 个. 本文证明 $\text{Per}(A(\psi(Q(m_1,n_1), Q(m_2,n_2), \dots, Q(m_k,n_k))))$ 等于 4 个变量的函数 $z = x_{00}^{t_{00}} x_{10}^{t_{10}} x_{01}^{t_{01}} x_{11}^{t_{11}}$ 在 $x_{i,j} = q_{i,j-1(\text{mod } 2)}$, $dx_{i,j} = q_{i,j}$ ($i=0,1; j=0,1$) 处的全微分 dz , 其中 $q_{i,j}$ 值列于表 2.

表 2 参数 $q_{i,j}$ 的值 $\text{Per}(A(Q(m,n)))$, $m \equiv i(\text{mod } 2)$, $n \equiv j(\text{mod } 2)$

Table 2 $\text{Per}(A(Q(m,n)))$ values of parameters $q_{i,j}$, $m \equiv i(\text{mod } 2)$, $n \equiv j(\text{mod } 2)$

m	n	
	$0(\text{mod } 2)$	$1(\text{mod } 2)$
$0(\text{mod } 2)$	$q_{0,0} = 0$	$q_{0,1} = 4$
$1(\text{mod } 2)$	$q_{1,0} = 1$	$q_{1,1} = 2$

2 图邻接矩阵的行列式(积和式)删点的递推公式

定理 1 设 $u \in V(G)$, 则

$$\det(A(G)) = - \sum_{v \sim u} \det(A(G-u-v)) - 2 \sum_{C \in \mathcal{C}(u)} (-1)^{|V(C)|} \det(A(G-V(C))),$$

这里第一个和式取遍点 u 的所有邻点 v , 第二个和式取遍 $\mathcal{C}(u)$ 中的所有圈 C , 其中 $\mathcal{C}(u)$ 是图 G 中包含点 u 的所有圈的集合.

证明: 设 \mathcal{H} 是图 G 的 Sachs 子图的集合. \mathcal{H} 可分为两类: 一类是点 u 处在一个孤立边上, 这种 Sachs 子图构成的集合记为 \mathcal{H}_1 ; 另一类是点 u 处在一个孤立圈上, 这种 Sachs 子图构成的集合记为 \mathcal{H}_2 , 则 $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$.

对任意的 $H \in \mathcal{H}_1$, 点 u 处在 H 的一个分支 K_2 上, K_2 在 G 中对应的两个端点为 u, v , 令 $H' = H - V(K_2)$. 则 H' 是图 $G - u - v$ 的一个 Sachs 子图, 这里 $v \sim u$. 反之, 当 v 取遍 u 的所有邻点, $G - u - v$ 的任意 Sachs 子图 H' 并上一条孤立边, 即可得 G 的 \mathcal{H}_1 中一个 Sachs 子图. 显然 H 与 H' 是一一对应的, 且 $p(H') = p(H) - 1$, $c(H') = c(H)$.

由引理 1 知, H' 对 $\det(A(G-u-v))$ 的贡献是 $(-1)^{n-2} (-1)^{p(H')} 2^{c(H')}$, 而 H 对 $\det(A(G))$ 的贡献是 $(-1)^n (-1)^{p(H)} 2^{c(H)} = -(-1)^{n-2} (-1)^{p(H')} 2^{c(H')}$.

于是 \mathcal{H}_1 中所有 H 对 $\det(A(G))$ 的总贡献为 $-\sum_{v_i \sim u} \det(A(G-u-v_i))$.

对任意的 $H \in \mathcal{H}_2$, 点 u 处在 H 的一个圈分支 C 上, 令 $H'' = H - V(C)$. 则 H'' 是图 $G - V(C)$ 的一个 Sachs 子图. 反之, 当 $C \in \mathcal{C}(u)$ 时, $G - V(C)$ 的任意 Sachs 子图 H'' 并上圈 C , 即可得 G 的 \mathcal{H}_2 中一个 Sachs 子图. 显然 H 与 H'' 是一一对应的, 且 $p(H') = p(H) - 1$, $c(H') = c(H) - 1$.

由引理 1 知, H'' 对 $\det(A(G-V(C)))$ 的贡献是 $(-1)^{n-V(C)} (-1)^{p(H')} 2^{c(H')}$, 而 H 对 $\det(A(G))$ 的贡献是

$$(-1)^n (-1)^{p(H)} 2^{c(H)} = -2(-1)^{|V(C)|} (-1)^{n-|V(C)|} (-1)^{p(H')} 2^{c(H')}.$$

于是 \mathcal{H}_2 中所有 H 对 $\det(\mathbf{A}(G))$ 总贡献为 $-2 \sum_{C \in \mathcal{C}(u)} (-1)^{|V(C)|} \det(\mathbf{A}(G - V(C)))$. 证毕.

定理 2 设 $u \in V(G)$, 则

$$\text{Per}(\mathbf{A}(G)) = \sum_{v \sim u} \text{Per}(\mathbf{A}(G - u - v)) + 2 \sum_{C \in \mathcal{C}(u)} \text{Per}(\mathbf{A}(G - V(C))),$$

这里第一个和式取遍点 u 的所有邻点 v , 第二个和式取遍 $\mathcal{C}(u)$ 中所有圈 C .

定理 2 的证明与定理 1 类似, 故略.

3 彩球图邻接矩阵的行列式

引理 5 1) $\det(\mathbf{A}(P_n)) = \begin{cases} 0, & n \equiv 1 \pmod{2}, \\ 1, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ -1, & n \equiv 2 \pmod{4}; \end{cases}$

2) $\det(\mathbf{A}(C_m)) = \begin{cases} 0, & m \equiv 0 \pmod{4}, \\ -4, & m \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2, & m \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$

证明: 1) 若 n 为奇数, 则图 P_n 中不存在 Sachs 子图, $\det(\mathbf{A}(P_n)) = 0$. 若 n 为偶数, 则图 P_n 中只有一个 Sachs 子图(完美匹配) $\frac{n}{2}K_2$, 由引理 1 知,

$$\det(\mathbf{A}(P_n)) = (-1)^n (-1)^{n/2} = (-1)^{n/2} = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ -1, & n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

2) 若 m 为奇数, 则图 C_m 中只有一个 Sachs 子图 C_m , 由引理 1 知, $\det(\mathbf{A}(C_m)) = (-1)^m (-1) \times 2 = 2$. 若 m 为偶数, 则图 C_m 中有两种 Sachs 子图: 一种是圈 C_m , 另一种是两个完美匹配 $\frac{m}{2}K_2$, 由引理 1 有

$$\det(\mathbf{A}(C_m)) = (-1)^m [-2 + (-1)^{m/2} \times 2] = \begin{cases} 0, & m \equiv 0 \pmod{4}, \\ -4, & m \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

证毕.

引理 6 若 $m \equiv i \pmod{4}$, $n \equiv j \pmod{4}$, 则 $\det(\mathbf{A}(Q(m, n))) = p_{i,j}$, 其中 $p_{i,j}$ 见表 1.

证明: 若 $n = 1$, 则

$$\det(\mathbf{A}(Q(m, 1))) = \det(\mathbf{A}(C_m)) = \begin{cases} 0, & m \equiv 0 \pmod{4}, \\ -4, & m \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2, & m \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

若 $n \geq 3$ 为奇数, 则对图 $Q(m, n)$ 的 1 度点使用定理 1, 得

$$\det(\mathbf{A}(Q(m, n))) = -\det(\mathbf{A}(Q(m, n-2))) = (-1)^{(n-1)/2} \det(\mathbf{A}(Q(m, 1))) = \begin{cases} \det(\mathbf{A}(Q(m, 1))), & n \equiv 1 \pmod{4}, \\ -\det(\mathbf{A}(Q(m, 1))), & n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

若 $n \geq 2$ 为偶数, 则对图 $Q(m, n)$ 的 1 度点使用定理 1, 得

$$\det(\mathbf{A}(Q(m, n))) = -\det(\mathbf{A}(Q(m, n-2))) = (-1)^{n/2} \det(\mathbf{A}(P_{m-1})) = \begin{cases} \det(\mathbf{A}(P_{m-1})), & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ -\det(\mathbf{A}(P_{m-1})), & n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

再利用引理 5, 结论得证.

由表 1 可见, 图 $Q(m, n)$ 邻接矩阵的行列式仅与 m, n 被 4 除的余数有关, 因此, 将图 $Q(m, n)$ 按 m, n 被模 4 除的余数分为如下 16 类: $\Omega_{ij} = \{Q(m, n) \mid m \equiv i \pmod{4}, n \equiv j \pmod{4}\}$, $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 0, 1, 2, 3$. 在构成图 $\psi(Q(m_1, n_1), Q(m_2, n_2), \dots, Q(m_k, n_k))$ 的 k 个 $Q(m, n)$ 中, 属于 Ω_{ij} 的有 s_{ij} 个, 将图 $\psi(Q(m_1, n_1), Q(m_2, n_2), \dots, Q(m_k, n_k))$ 简记为

$$\psi'(s_{00}, s_{10}, s_{20}, s_{30}, s_{01}, s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{02}, s_{12}, s_{22}, s_{32}, s_{03}, s_{13}, s_{23}, s_{33}), \quad \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 s_{ij} = k.$$

根据定义, 图 $Q(m, 0)$ 和 $Q(m, -1)$ 没有实际意义, 为叙述方便需约定 $Q(m, 0)$ 和 $Q(m, -1)$ 邻接矩阵的行列式分别等于图 $Q(m, 4)$ 和 $Q(m, 3)$ 邻接矩阵的行列式, 即分别为表 1 的第 2 列和第 5 列:

$$\det(\mathbf{A}(Q(m, 0))) = \begin{cases} 0, & m \equiv 0 \pmod{4}, \\ 1, & m \equiv 1 \pmod{4}, \\ 0, & m \equiv 2 \pmod{4}, \\ -1, & m \equiv 3 \pmod{4}; \end{cases} \quad \det(\mathbf{A}(Q(m, -1))) = \begin{cases} 0, & m \equiv 0 \pmod{4}, \\ -2, & m \equiv 1 \pmod{4}, \\ 4, & m \equiv 2 \pmod{4}, \\ -2, & m \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

由引理 5 及表 1 知, 下列 3 个引理显然成立.

引理 7 $\det(\mathbf{A}(P_{m-1})) = \det(\mathbf{A}(Q(m, 0))) = p_{m \pmod{4}, 0}$.

引理 8 设 $m \geq 3$ 为整数, 则 $2(\det(\mathbf{A}(P_{m-2})) + (-1)^m) = \det(\mathbf{A}(Q(m, -1))) = p_{m \pmod{4}, 3}$.

引理 9 $p_{i, j-2 \pmod{4}} = -p_{i, j} (i, j = 0, 1, 2, 3)$.

n 元函数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的全微分 $dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$, 将 $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n), (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 代入 dy 后得到的值 $dy|_{\substack{(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)}}$ 称为

函数在点 $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 处增量为 $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 的全微分.

定理 3 设彩球图 $G = \psi'(s_{00}, s_{10}, s_{20}, s_{30}, s_{01}, s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{02}, s_{12}, s_{22}, s_{32}, s_{03}, s_{13}, s_{23}, s_{33})$, 函数 $y = x_{00}^{s_{00}} x_{10}^{s_{10}} x_{20}^{s_{20}} x_{30}^{s_{30}} x_{01}^{s_{01}} x_{11}^{s_{11}} x_{21}^{s_{21}} x_{31}^{s_{31}} x_{02}^{s_{02}} x_{12}^{s_{12}} x_{22}^{s_{22}} x_{32}^{s_{32}} x_{03}^{s_{03}} x_{13}^{s_{13}} x_{23}^{s_{23}} x_{33}^{s_{33}}$ 是 16 个变量的函数, 则 $\det(\mathbf{A}(G))$ 等于函数 y 在 $x_{i,j} = p_{i, j-1 \pmod{4}}, dx_{i,j} = p_{i, j} (i, j = 0, 1, 2, 3)$ 处的全微分 dy , 其中 $p_{i, j}$ 值见表 1.

证明: 对图 G 的中心点 W 使用定理 1.

1) 若 $G = \psi(Q(m_1, n_1), Q(m_2, n_2), \dots, Q(m_k, n_k))$ 中 n_i 均大于等于 2, 则中心点 W 不在图 G 的任何圈上. 由定理 1 知, $\det(\mathbf{A}(G)) = - \sum_{v \sim W} \det(\mathbf{A}(G - W - v))$.

当中心点 W 的邻点 v 在分权 $Q(m', n')$ 上的一点, 而 $Q(m', n') \in \Omega_{i'j'}$, 即 $m' \equiv i' \pmod{4}, n' \equiv j' \pmod{4}$ 时, 由引理 3 知,

$$-\det(\mathbf{A}(G - W - v)) = -\frac{\det(\mathbf{A}(Q(m', n') - W - v))}{\det(\mathbf{A}(Q(m', n') - W))} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 \prod_{Q(m, n) \in \Omega_{ij}} \det(\mathbf{A}(Q(m, n) - W)),$$

其中

$$Q(m, n) - W = Q(m, n-1) \in \Omega_{i, j-1 \pmod{4}}, \quad \det(\mathbf{A}(Q(m, n) - W)) = \det(\mathbf{A}(Q(m, n-1))) = p_{i, j-1 \pmod{4}}.$$

① 当图 $Q(m', n')$ 中 $n' = 2$ 时, $Q(m', n') - W - v = P_{m'-1}$, 由引理 7 知

$$\det(\mathbf{A}(Q(m', n') - W - v)) = \det(\mathbf{A}(P_{m'-1})) = \det(\mathbf{A}(Q(m', 0))) = p_{i', j'-2 \pmod{4}};$$

② 当图 $Q(m', n')$ 中 $n' > 2$ 时,

$$Q(m', n') - W - v = Q(m', n' - 2),$$

$$\det(\mathbf{A}(Q(m', n') - W - v)) = \det(\mathbf{A}(Q(m', n' - 2))) = p_{i', j'-2 \pmod{4}}.$$

综合①和②知, 对于 $n' \geq 2$, 均有

$$\begin{aligned} -\det(\mathbf{A}(G - W - v)) &= -\frac{\det(\mathbf{A}(Q(m', n') - W - v))}{\det(\mathbf{A}(Q(m', n') - W))} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 \prod_{Q(m, n) \in \Omega_{ij}} \det(\mathbf{A}(Q(m, n) - W)) = \\ &= -\frac{p_{i', j'-2 \pmod{4}}}{p_{i', j'-1 \pmod{4}}} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 \prod_{Q(m, n) \in \Omega_{ij}} \det(\mathbf{A}(Q(m, n) - W)) = \\ &= -\frac{p_{i', j'-2 \pmod{4}}}{p_{i', j'-1 \pmod{4}}} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 p_{i, j-1 \pmod{4}}^{s_{ij}}, \end{aligned} \tag{1}$$

则

$$\det(\mathbf{A}(G)) = - \sum_{v \sim W} \det(\mathbf{A}(G - W - v)) = - \sum_{i'=0}^3 \sum_{j'=0}^3 s_{i'j'} \frac{p_{i', j'-2 \pmod{4}}}{p_{i', j'-1 \pmod{4}}} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 p_{i, j-1 \pmod{4}}^{s_{ij}},$$

由引理 9 知，

$$\det(\mathbf{A}(G)) = \sum_{i'=0}^3 \sum_{j'=0}^3 s_{i'j'} \frac{p_{i',j'}}{p_{i',j'-1(\bmod 4)}} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 p_{i,j-1(\bmod 4)}^{s_{ij}} = dy \Big|_{x_{ij}=p_{i,j-1(\bmod 4)}, dx_{ij}=p_{i,j}, i=0,1,2,3, j=0,1,2,3}.$$

2) 若 $G = \psi(Q(m_1, n_1), Q(m_2, n_2), \dots, Q(m_k, n_k))$ 中存在 $n_i = 1$, 则不妨设 $n_1 = 1$, 此时, $Q(m_1, n_1) = C_{m_1}$, 中心点 W 在圈 C_{m_1} 上, 设 W 在圈 C_{m_1} 上的两个邻点为 v_1, v_2 , 再假设 $Q(m_1, 1) \in \Omega_{i',1}$, 即 $m_1 \equiv i' \pmod{4}$, 使用定理 1, 在计算 $\det(\mathbf{A}(G))$ 时, 圈 C_{m_1} 上的贡献值(与圈 C_{m_1} 有关的 3 个和项)为

$$-\det(\mathbf{A}(G - W - v_1)) - \det(\mathbf{A}(G - W - v_2)) - 2(-1)^{|V(C_{m_1})|} \det(\mathbf{A}(G - V(C_{m_1}))). \tag{2}$$

式(2)的第一项

$$\det(\mathbf{A}(G - W - v_1)) = \frac{\det(\mathbf{A}(Q(m_1, n_1) - W - v_1))}{\det(\mathbf{A}(Q(m_1, n_1) - W))} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 \prod_{Q(m,n) \in \Omega_{ij}} \det(\mathbf{A}(Q(m, n) - W)),$$

其中 $\det(\mathbf{A}(Q(m_1, n_1) - W - v_1)) = \det(\mathbf{A}(P_{m_1-2}))$. 若 $n = 1$, 则由引理 7, 有

$$Q(m, n) - W = P_{m-1}, \quad \det(\mathbf{A}(Q(m, n) - W)) = \det(\mathbf{A}(P_{m-1})) = \det(\mathbf{A}(Q(m, 0))).$$

若 $n > 1$, 则

$$Q(m, n) - W = Q(m, n - 1), \quad \det(\mathbf{A}(Q(m, n) - W)) = \det(\mathbf{A}(Q(m, n - 1))).$$

于是, 对于 $n \geq 1$, 均有

$$\det(\mathbf{A}(G - W - v_1)) = \frac{\det(\mathbf{A}(P_{m_1-2}))}{p_{i',0}} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 p_{i,j-1(\bmod 4)}^{s_{ij}}.$$

同理式(2)的第二项

$$\det(\mathbf{A}(G - W - v_2)) = \frac{\det(\mathbf{A}(P_{m_1-2}))}{p_{i',0}} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 p_{i,j-1(\bmod 4)}^{s_{ij}},$$

而式(2)的第三项

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}(G - V(C_{m_1}))) &= \frac{1}{\det(\mathbf{A}(Q(m_1, n_1) - W))} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 \prod_{Q(m,n) \in \Omega_{ij}} \det(\mathbf{A}(Q(m, n) - W)) = \\ &= \frac{1}{p_{i',0}} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 p_{i,j-1(\bmod 4)}^{s_{ij}}. \end{aligned}$$

则由引理 8 知,

$$\begin{aligned} &-\det(\mathbf{A}(G - W - v_1)) - \det(\mathbf{A}(G - W - v_2)) - 2(-1)^{|V(C_{m_1})|} \det(\mathbf{A}(G - V(C_{m_1}))) = \\ &= -\frac{2\det(\mathbf{A}(P_{m_1-2})) + 2(-1)^{m_1}}{p_{i',0}} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 p_{i,j-1(\bmod 4)}^{s_{ij}} = \\ &= -\frac{\det(Q(m_1, -1))}{p_{i',0}} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 p_{i,j-1(\bmod 4)}^{s_{ij}} = \\ &= -\frac{p_{i',3}}{p_{i',0}} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 p_{i,j-1(\bmod 4)}^{s_{ij}}. \end{aligned} \tag{3}$$

比较式(1)和式(3)可见, 无论中心点 W 是否在一个分权的圈上, 使用定理 1 计算的每个分权上贡献值均为 $-\frac{p_{i',j'-2(\bmod 4)}}{p_{i',j'-1(\bmod 4)}} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 p_{i,j-1(\bmod 4)}^{s_{ij}}$, 故

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}(G)) &= -\sum_{v \sim u} \det(\mathbf{A}(G - u - v)) - 2 \sum_{C \in \mathcal{V}(u)} (-1)^{|V(C)|} \det(\mathbf{A}(G - V(C))) = \\ &= -\sum_{i'=0}^3 \sum_{j'=0}^3 s_{i'j'} \frac{p_{i',j'-2(\bmod 4)}}{p_{i',j'-1(\bmod 4)}} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 p_{i,j-1(\bmod 4)}^{s_{ij}} = \\ &= \sum_{i'=0}^3 \sum_{j'=0}^3 s_{i'j'} \frac{-p_{i',j'-2(\bmod 4)}}{p_{i',j'-1(\bmod 4)}} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 p_{i,j-1(\bmod 4)}^{s_{ij}} = \\ &= \sum_{i'=0}^3 \sum_{j'=0}^3 s_{i'j'} \frac{p_{i',j'}}{p_{i',j'-1(\bmod 4)}} \prod_{i=0}^3 \prod_{j=0}^3 p_{i,j-1(\bmod 4)}^{s_{ij}} = dy \Big|_{x_{ij}=p_{i,j-1(\bmod 4)}, dx_{ij}=p_{i,j}, i=0,1,2,3, j=0,1,2,3}. \end{aligned}$$

证毕.

例 1 65 个点的彩球图 $G = \psi(Q(5, 1), Q(6, 12), Q(10, 8), Q(7, 9), Q(11, 5))$ 中, 由于 $Q(5, 1) \in \Omega_{1,1}, Q(6, 12), Q(10, 8) \in \Omega_{2,0}, Q(7, 9), Q(11, 5) \in \Omega_{3,1}$, 因此 $s_{1,1} = 1, s_{2,0} = 2, s_{3,1} = 2$. 图 G 对应的函数 $y = x_{1,1}x_{2,0}^2x_{3,1}^2$, 由定理 3 可得

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}(G)) &= dy \Big|_{(x_{1,1}, x_{2,0}, x_{3,1})=(p_{1,0}, p_{2,0}, p_{3,0})=(1,4,-1), (dx_{1,1}, dx_{2,0}, dx_{3,1})=(p_{1,1}, p_{2,0}, p_{3,1})=(2,0,2)} \\ &= x_{2,0}^2 x_{3,1}^2 dx_{1,1} + 2x_{1,1} x_{2,0} x_{3,1}^2 dx_{2,0} + \\ &= 2x_{1,1} x_{2,0}^2 x_{3,1} dx_{3,1} \Big|_{(x_{1,1}, x_{2,0}, x_{3,1})=(1,4,-1), (dx_{1,1}, dx_{2,0}, dx_{3,1})=(2,0,2)} \\ &= 4^2 \times (-1)^2 \times 2 + 2 \times 1 \times 4 \times (-1)^2 \times 0 + 2 \times 1 \times 4^2 \times (-1) \times 2 = -32. \end{aligned}$$

4 彩球图邻接矩阵的积和式

引理 10 1) $\text{Per}(\mathbf{A}(P_n)) = \begin{cases} 0, & n \equiv 1 \pmod{2}, \\ 1, & n \equiv 0 \pmod{2}; \end{cases}$

2) $\text{Per}(\mathbf{A}(C_m)) = \begin{cases} 2, & m \equiv 1 \pmod{2}, \\ 4, & m \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$

证明: 1) 若 n 为奇数, 则图 P_n 中不存在 Sachs 子图, $\text{Per}(\mathbf{A}(P_n)) = 0$. 若 n 为偶数, 则图 P_n 中只有一个 Sachs 子图(完美匹配) $\frac{n}{2}K_2$, 由引理 2 知, $\text{Per}(\mathbf{A}(P_n)) = 2^0 = 1$.

2) 若 m 为奇数, 则图 C_m 中只有一个 Sachs 子图 C_m , $\text{Per}(\mathbf{A}(C_m)) = 2^1 = 2$. 若 m 为偶数, 则图 C_m 中有两种 Sachs 子图: 一种是圈 C_m , 另一种是两个完美匹配 $\frac{m}{2}K_2$, 由引理 2 有 $\text{Per}(\mathbf{A}(C_m)) = 2 + 2 \times 2^0 = 4$. 证毕.

引理 11 若 $m \equiv i \pmod{2}, n \equiv j \pmod{2}$, 则 $\text{Per}(\mathbf{A}(Q(m, n))) = q_{i,j}$, 其中 $q_{i,j}$ 值见表 2.

引理 11 的证明与引理 6 类似, 故略.

由表 2 可见, 图 $Q(m, n)$ 邻接矩阵的积和式仅与 m, n 被 2 除的余数有关, 因此, 将图 $Q(m, n)$ 按 m, n 被模 2 除的余数分为如下 4 类: $\Gamma_{ij} = \{Q(m, n) \mid m \equiv i \pmod{2}, n \equiv j \pmod{2}\}, i = 0, 1, j = 0, 1$. 在构成图 $\psi(Q(m_1, n_1), Q(m_2, n_2), \dots, Q(m_k, n_k))$ 的 k 个 $Q(m, n)$ 中, 属于 Γ_{ij} 的有 t_{ij} 个, 将图 $\psi(Q(m_1, n_1), Q(m_2, n_2), \dots, Q(m_k, n_k))$ 简记为 $\psi''(t_{00}, t_{01}, t_{10}, t_{11})$, $\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 t_{ij} = k$.

同理, 图 $Q(m, 0)$ 和 $Q(m, -1)$ 没有实际意义, 为方便, 约定其邻接矩阵积和式的值分别为图 $Q(m, 2)$ 和 $Q(m, 1)$ 邻接矩阵的积和式, 即分别为表 2 的第 2 列和第 3 列:

$$\text{Per}(\mathbf{A}(Q(m, 0))) = \begin{cases} 0, & m \equiv 0 \pmod{2}, \\ 1, & m \equiv 1 \pmod{2}; \end{cases} \quad \text{Per}(\mathbf{A}(Q(m, -1))) = \begin{cases} 4, & m \equiv 0 \pmod{2}, \\ 2, & m \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

由引理 10 知, 下列引理显然成立.

引理 12 $\text{Per}(\mathbf{A}(P_{m-1})) = \text{Per}(\mathbf{A}(Q(m, 0))) = q_{m \pmod{2}, 0}$.

引理 13 设 $m \geq 3$ 为整数, 则 $2(\text{Per}(\mathbf{A}(P_{m-2})) + 1) = \text{Per}(\mathbf{A}(Q(m, -1))) = q_{m \pmod{2}, 1}$.

定理 4 设彩球图 $G = \psi''(t_{00}, t_{10}, t_{01}, t_{11})$, 函数 $z = x_{00}^{t_{00}} x_{10}^{t_{10}} x_{01}^{t_{01}} x_{11}^{t_{11}}$ 是 4 个变量的函数, 则 $\text{Per}(\mathbf{A}(G))$ 为函数 z 在 $x_{i,j} = q_{i,j-1 \pmod{2}}, dx_{i,j} = q_{i,j} (i, j = 0, 1)$ 处的全微分 dz , 其中 $q_{i,j}$ 值见表 2.

定理 4 的证明与定理 3 类似, 故略.

注 1 若彩球图仅由一个 $Q(m, n) (\in \Omega_{i,j})$ 构成, 即 $G = \psi(Q(m, n)) = Q(m, n)$, 则利用引理 6, 有 $\det(\mathbf{A}(Q(m, n))) = p_{i,j}$; 利用定理 3, 此时图 G 对应的函数 $y = x_{i,j}, dy = dx_{i,j} \Big|_{dx_{i,j} = p_{i,j}} = p_{i,j}$. 引理 6 和定理 3 计算的结果一致. 同理, 利用引理 11 和定理 4 计算的积和式 $\text{Per}(\mathbf{A}(Q(m, n)))$ 值也一致.

例 2 65 个点的彩球图 $G = \psi(Q(5, 1), Q(6, 12), Q(10, 8), Q(7, 9), Q(11, 5))$ 中, 由于 $Q(6, 12), Q(10, 8) \in \Gamma_{0,0}, Q(5, 1), Q(7, 9), Q(11, 5) \in \Gamma_{1,1}$, 因此 $t_{0,0} = 2, t_{1,1} = 3$. 图 G 对应的函数 $z = x_{0,0}^2 x_{1,1}^3$, 由定理 4 知,

$$\begin{aligned} \text{Per}(\mathbf{A}(G)) &= dz \Big|_{(x_{0,0}, x_{1,1})=(q_{0,1}, q_{1,0})=(4,1), (dx_{0,0}, dx_{1,1})=(q_{0,0}, q_{1,1})=(0,2)} \\ &= 2x_{0,0}x_{1,1}^3 dx_{0,0} + 3x_{0,0}^2x_{1,1}^2 dx_{1,1} \Big|_{(x_{0,0}, x_{1,1})=(4,1), (dx_{0,0}, dx_{1,1})=(0,2)} \\ &= 2 \times 4 \times 1^3 \times 0 + 3 \times 4^2 \times 1^1 \times 2 = 96. \end{aligned}$$

参 考 文 献

[1] CVETKOVIĆ D, DOOB M, SACHS H. Spectra of Graphs [M]. New York: Academic Press, 1980: 1-368.

[2] BROUWER A E, HAEMERS W H. Spectra of Graphs [M]. Amsterdam: Springer, 2010: 1-245.

[3] GODSIL C D. Algebraic Combinatorics [M]. New York: Chapman & Hall Press, 1993: 112-125.

[4] VALIANT L G. The Complexity of Computing the Permanent [J]. Theoretical Computer Science, 1979, 8(2): 189-201.

[5] ROBERTSON N, SEYMOUR P D, THOMAS R. Permanents, Pfaffian Orientations, and Even Directed Circuits [J]. Annals of Mathematics, 1999, 150: 929-975.

[6] BRUALDI R A, GOLDWASSER J L, MICHAEL T S. Maximum Permanents of Matrices of Zeros and Ones [J]. Journal of Combinatorial Theory Series A, 1988, 47(2): 207-245.

[7] SONGS Z, WANG S G, RIM S H, et al. Extremes of Permanents of (0,1)-Matrices [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2003, 373(1): 197-210.

[8] SINGH R. Permanent, Determinant, and Rank of Bi-block Graphs [J]. Aequationes Mathematicae, 2020, 94: 1-12.

[9] DYER M, JERRUM M, MÜLLER H, et al. Counting Weighted Independent Sets beyond the Permanent [J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2021, 35(2): 1503-1524.

[10] 扈生彪. (0,1)-矩阵的积和式的图表示及其相关性质 [J]. 数学进展, 2005, 34(2): 160-166. (HU S B. The Graph Theory Expression of Permanent of (0,1)-Matrices and Its Relative Properties [J]. Advances in Mathematics, 2005, 34(2): 160-166.)

[11] CHEON G S, WANLESS I M. An Update on Minc’s Survey of Open Problems Involving Permanents [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2005, 403: 314-342.

[12] BRUALDI R A, RRSER H J. Combinatorial Matrix Theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991: 198-249.

[13] 孙智伟. 关于一些行列式与积和式 [J]. 数学学报(中文版), 2024, 67(2): 286-295. (SUN Z W. On Some Determinants and Permanents [J]. Acta Mathematica Sinica (Chinese Series), 2024, 67(2): 286-295.)

[14] SUN Z W. On Some Determinants with Legendre Symbol Entries [J]. Finite Fields and Their Applications, 2019, 56: 285-307.

(责任编辑: 李 琦)