

基于量子点-微腔耦合系统的光子 超纠缠态并发度直接测量

刘阿鹏¹, 王睿¹, 贾慧兰¹, 于锴¹, 尹祺巍¹, 程留永²

(1. 山西工程技术学院 基础课教学部, 山西 阳泉 045000; 2. 山西师范大学 物理与信息工程学院, 太原 030031)

摘要: 提出一种基于量子点-微腔耦合系统的光子超纠缠态并发度直接测量方案。该方案利用光子的偏振和空间模自由度编码超纠缠态, 并通过量子点-微腔系统的单光子输入输出过程, 构建自避错的受控相位反转门, 分别用于偏振和空间模自由度的纠缠测量。通过将并发度转化为奇宇称态的检测概率, 实现对超纠缠态并发度的高效测量。该方案不仅能独立测量每个自由度的并发度, 还克服了传统方案中由于腔损耗和不完美耦合导致的量子操作失真。研究表明, 该方案具有较高的实验可行性和鲁棒性, 为量子信息处理中的超纠缠态测量提供了新途径。

关键词: 纠缠测量; 超纠缠; 并发度

中图分类号: O413 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)06-1751-09

Direct Measurement of Concurrence of Photonic Hyperentangled States Based on Quantum-Dot-Microcavity Coupling Systems

LIU Apeng¹, WANG Rui¹, JIA Huilan¹, YU Kai¹, YIN Qiwei¹, CHENG Liuyong²

(1. Department of Basic Courses, Shanxi Institute of Technology, Yangquan 045000, Shanxi Province, China;

2. School of Physics and Information Engineering, Shanxi Normal University, Taiyuan 030031, China)

Abstract: We proposed a direct measurement schemes for the concurrences of photonic hyperentangled states based on quantum-dot-microcavity coupling system. The hyperentangled states were encoded in the polarization and spatial mode degrees of freedom (DOF) of photons. The schemes for entanglement measurement of both DOFs were constructed by error-heralded controlled-phase-flip gates through the single-photon input-output process of the quantum-dot-microcavity system. By transforming the concurrences into the detection probabilities of odd parity state, the schemes achieved efficient measurement of the concurrences of hyperentangled states. The schemes could not only independently measure the concurrence in each DOF, but also overcome the quantum operation distortions caused by cavity loss and imperfect coupling in traditional schemes. The research results show that the schemes have high experimental feasibility and robustness, providing a new approach for measuring hyperentangled states in quantum information processing.

Keywords: entanglement measurement; hyperentanglement; concurrence

收稿日期: 2024-11-06.

第一作者简介: 刘阿鹏(1990—), 男, 汉族, 硕士, 副教授, 从事量子信息的研究, E-mail: apliu@sxit.edu.cn. **通信作者简介:** 程留永(1987—), 男, 汉族, 博士, 副教授, 从事量子信息和量子光学的研究, E-mail: lycheng@sxnu.edu.cn.

基金项目: 山西省应用基础研究计划项目(批准号: 202203021211260)、山西工程技术学院科研启动基金(批准号: 2022QD-10)、山西工程技术学院科研项目(批准号: 2022004)和山西省“1331”工程建设项目(批准号: XF2019-04).

纠缠是量子物理的一种奇异特性,其对量子信息处理具有重要用途,如量子通信和量子计算等.光子纠缠态对建立量子密钥分发^[1]、量子隐形传态^[2]、量子安全直接通信^[3]和量子秘密共享^[4]等非局域量子通信任务中的量子通道是非常优秀的量子资源.此外,当一个量子系统在多个自由度处于纠缠态,可定义为超纠缠态.超纠缠态可极大增加量子通道容量和加速量子计算速度,因此是量子信息处理任务中重要的资源^[5-8].光子的各自由度(如偏振、空间模式、时间间隔和频率等)均可用于携带信息,因此光子超纠缠态已引起人们广泛关注.由于超纠缠的高容量特性,因此它可用于执行 Bell 态分析^[9]和量子中继器^[10-12]等重要的量子信息处理任务.在一个量子信息处理任务中,相较于利用一个较少纠缠态,利用一个具有更多纠缠的纠缠态通常表明更高的成功概率或保真度.然而,超纠缠态也会受环境噪声的侵扰,最大超纠缠态可变成部分超纠缠态或混合纠缠态.因此,超纠缠纯化和浓缩是克服该问题的有效途径.与单自由度纠缠纯化相似,超纠缠纯化方案有两个弱点,即:可纯化初始态的每个自由度的保真度均需大于 1/2,并且在每轮纯化过程中均需两份超纠缠态的拷贝.因此,利用一个具体的非最大纠缠态实现量子信息处理具有重要意义.由于非最大纠缠态可作为一些量子信息处理任务的纠缠通道,不同程度的纠缠对量子信息处理可能有不同的应用,因此人们对纠缠量化理论进行了大量研究,提出了多种纠缠测量方案,如 Bennett 等^[13-14]提出了一种纠缠形成(entanglement of formation, EOF)测量方法;Wootters^[15-16]证明任意一个 2 量子比特纠缠态的 EOF 与并发度(concurrence)有关.一个 2 量子比特纠缠态的并发度可表示为

$$C = \max\{0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}, \quad (1)$$

其中 $\lambda_i (i=1,2,3,4)$ 为按降序排列算符 $\rho_{12}^y (\sigma_1^y \otimes \sigma_2^y) \rho_{12}^y (\sigma_1^y \otimes \sigma_2^y)$ 的本征值的平方根^[15-16].

研究人员提出了一系列 2 量子比特纠缠态并发度的直接测量理论和实验方案.如 Walborn 等^[17]利用偏振和动量自由度编码的超纠缠态测量 2 量子比特偏振纠缠纯态的并发度;Romero 等^[18]提出了一种原子 2 量子比特纠缠纯态的直接测量方案;Zhang 等^[19]提出了一个利用交叉 Kerr 非线性高效 2 光子偏振纠缠纯态的纠缠测量方案;Sheng 等^[20]提出了一个最优的原子纠缠测量方案;Sheng 等^[21]提出了第一个超纠缠测量方案;Cheng 等^[22]提出了针对 2 个金刚石氮空位中心非最大纠缠态的纠缠测量方案;Liu 等^[23]提出了基于腔光力系统的声子纠缠态测量方案.

大多数纠缠测量方案仅关注一个自由度的并发度直接测量,对超纠缠态的纠缠测量研究文献报道较少.考虑到超纠缠态可显著增加量子通道的容量并加速量子计算,是量子信息处理中的重要资源,对超纠缠态的直接测量研究具有重要意义.文献[17]提出了利用超纠缠测量并发度的方案,但该方案仅测量了偏振自由度的纠缠,并未描述对超纠缠态的完全测量方法.文献[21]利用交叉 Kerr 非线性实现了对光子偏振纠缠态的纠缠测量.由于实际实验中 Kerr 非线性效应通常较弱,因此在实验上实现较困难.基于此,本文提出利用量子点-微腔耦合系统的单光子输入输出过程的光子空间模-偏振自由度的超纠缠测量方案,使每个自由度的并发度均可被独立测量,从而求得未知超纠缠态的总并发度.

1 量子点-微腔耦合系统的单光子输入输出过程

量子点-微腔耦合系统的单光子输入输出过程如图 1 所示,其中(A)为两个分布式 Prague 反射镜构成的单边光学微柱腔内嵌单电荷量子点示意图,

(B)为激子 X^- 的自旋依赖跃迁相对能级和光学跃迁规则示意图.一个带电量子点嵌入在两个 Prague 反射镜构成的单边光学微柱腔,输入光子通过单边光学微腔作为介质与带电量子点相互作用.量子点的光学性质由一个带负电激子(X^-)的光学跃迁性质主导.光学跃迁规则由 Pauli 不相容原理和总自旋角动量守恒限制. $|\uparrow\rangle \rightarrow |\uparrow\downarrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle \rightarrow |\downarrow\uparrow\rangle$ 两种跃迁分别由左旋偏振光子 $|L\rangle$ 和右旋偏振光子 $|R\rangle$ 驱动.

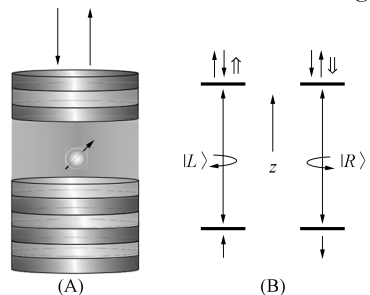


图 1 量子点-微腔耦合系统的单光子输入输出过程

Fig. 1 Single photon input-output process for quantum-dot-microcavity coupling system

系统在耦合和未耦合情况下的反射系数^[24]分别为

$$r_g(\omega) = \frac{\left[i(\omega_c - \omega) - \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa_s}{2} \right] \left[i(\omega_{X^-} - \omega) + \frac{\gamma}{2} \right] + g^2}{\left[i(\omega_c - \omega) + \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa_s}{2} \right] \left[i(\omega_{X^-} - \omega) + \frac{\gamma}{2} \right] + g^2} \quad (2)$$

和

$$r_0(\omega) = \frac{i(\omega_c - \omega) - \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa_s}{2}}{i(\omega_c - \omega) + \frac{\kappa}{2} + \frac{\kappa_s}{2}}, \quad (3)$$

其中 ω_c, ω_0 和 ω 分别为腔模、激子 X^- 和输入光子的频率, κ 和 κ_s 分别为输入输出损耗率和腔泄漏率, γ 为激子偶极衰减速率. 利用系统的自避错机制, 其输入输出过程^[25]为

$$\begin{aligned} |H\rangle |\varphi^\pm\rangle &\rightarrow r_+ |H\rangle |\varphi^\pm\rangle + r_- |V\rangle |\varphi^\mp\rangle, \\ |V\rangle |\varphi^\pm\rangle &\rightarrow r_+ |V\rangle |\varphi^\pm\rangle + r_- |H\rangle |\varphi^\mp\rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $r_- = \frac{1}{2}(r_1 - r_0)$, $r_+ = \frac{1}{2}(r_1 + r_0)$, $|H\rangle = (|R\rangle + |L\rangle)/\sqrt{2}$, $|V\rangle = (|R\rangle - |L\rangle)/\sqrt{2}$ 为线偏振态.

2 光子-量子点自旋之间的自避错受控相位反转门

图 2 为对一个未知光子超纠缠类 Bell 态的测量方案示意图. 假设光子的初始态为 $|\varphi^+\rangle^p |\varphi^+\rangle^s = \frac{1}{2}(|H\rangle + |V\rangle) \otimes (|s1\rangle + |s2\rangle)$, 其中 $|s1\rangle$ 和 $|s2\rangle$ 为两个不同的空间模. 同时电子自旋的初始态为 $|\varphi^+\rangle_e = (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$.

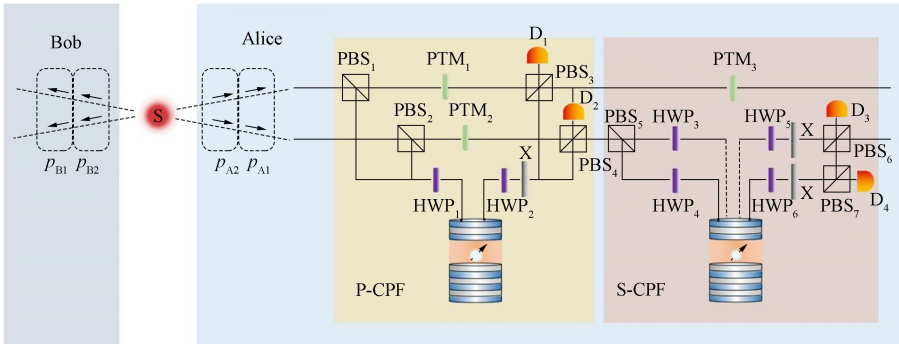


图 2 对一个未知光子超纠缠类 Bell 态的测量方案示意图

Fig. 2 Schematic diagram of measurement scheme for an unknown hyperentangled photonic Bell-like state

为执行自避错受控相位反转门(P-CPF)操作, 一个光子 p 被注入到图 2 中黄色内嵌小图所示的单元内, 其中每轮中光源发射出两对超纠缠光子对. P-CPF 单元可对偏振自由度执行受控相位反转操作, 自避错受控相位反转门(S-CPF)单元可对空间模自由度执行受控相位反转操作. 其中, PBS 是偏振光分束器, 可透射 H 偏振光, 反射 V 偏振光. HWP 为 $1/4$ 波片, 可对光子偏振自由度执行 Hadamard 操作 $[|H\rangle \rightarrow (|R\rangle + |L\rangle)/\sqrt{2}, |V\rangle \rightarrow (|R\rangle - |L\rangle)/\sqrt{2}]$. X 为半波片, 可执行偏振比特反转操作 $\sigma_x = |H\rangle\langle V| + |V\rangle\langle H|$. PTM 为透射率为 r_+ 的部分透射镜. 在两个空间模 $s1$ 和 $s2$ 的 V 偏振光子波包经相应的 PBS(PBS₁ 和 PBS₂) \rightarrow HWP₁ \rightarrow 量子点-腔系统 \rightarrow HWP₂ \rightarrow X, 导致光子偏振反转且反射系数为 r_+ 或光子态不变且反射系数为 r_- . 同时, $|H\rangle$ 偏振波包穿过对应的 PBS(PBS₁ 和 PBS₂) 和部分透射镜(PTM₁ 和 PTM₂), 得到反射系数 r_- . 超纠缠光子对和量子点组成整个系统的演化可描述为

$$\begin{aligned} |\varphi^+\rangle^p |\varphi^+\rangle^s |\varphi^+\rangle_e &\rightarrow \frac{r_-}{2} |s1\rangle^s |H\rangle^p |\varphi^+\rangle_e + \frac{r_-}{2} |s2\rangle^s |H\rangle^p |\varphi^+\rangle_e + \\ &\frac{r_-}{2} |s1\rangle^s |V\rangle^p |\varphi^-\rangle_e + \frac{r_-}{2} |s2\rangle^s |V\rangle^p |\varphi^-\rangle_e + \end{aligned}$$

$$\frac{r_+}{2} |s1\rangle^s |H\rangle^p |\varphi^+\rangle_e + \frac{r_+}{2} |s2\rangle^s |H\rangle^p |\varphi^+\rangle_e =$$

$$r_- |\varphi^+\rangle^s (|\uparrow\rangle |\varphi^+\rangle^p + |\downarrow\rangle |\varphi^-\rangle^p) + r_+ |\varphi^+\rangle^s |H\rangle^p |\varphi^+\rangle_e. \tag{5}$$

若内部单光子探测器 D₁ 或 D₂ 发生响应(对应下划线项), 则 P-CPF 操作失败, 概率为 r₊². 若探测器 D₁ 和 D₂ 均未发生响应, 则 H 偏振和 V 偏振的 2 个波包在空间模 s1 和 s2 对应的 PBS(PBS₃ 和 PBS₄) 处重新结合, 即 P-CPF 操作成功.

下面分析光子的空间模自由度和电子自旋之间的 S-CPF 操作, 如图 2 中粉色内嵌图所示. 假设腔内量子点初始制备在 |φ⁺⟩_e 态, 输入光子初始态为 |φ⁺⟩^p |φ⁺⟩^s = 1/2 (|R⟩ + |L⟩) ⊗ (|s1⟩ + |s2⟩). 空间模 s1 中的波包穿过 PTM₃, 其透射系数为 r₋. 空间模 s2 中的波包被 PBS₅ 分为水平偏振部分 |H⟩ 和竖直偏振部分 |V⟩ 后, 这两部分分别经 HWP₃ → 量子点-腔系统 → HWP₅ → X 和 HWP₄ → 量子点-腔系统 → HWP₆ → X, 得到反射系数为 r₋. 若 2 个内部单光子探测器 D₃ 或 D₄ 中的一个响应了, 则对空间模自由的受控相位反转操作失败. 若 2 个单光子探测器均未响应, 则水平和竖直偏振的波包将分别在 PBS₆ 和 PBS₇ 再次结合, 即空间模自由度的 CPF 操作成功. 在这种情形下, 光子和量子点组成复合系统的演化可表示为

$$|\varphi^+\rangle^p |\varphi^+\rangle^s |\varphi^+\rangle_e \rightarrow \frac{r_-}{2} |s1\rangle^s |H\rangle^p |\varphi^+\rangle_e + \frac{r_-}{2} |s1\rangle^s |V\rangle^p |\varphi^+\rangle_e +$$

$$\frac{r_+}{2} |s2\rangle^s |V\rangle^p |\varphi^+\rangle_e + \frac{r_-}{2} |s2\rangle^s |H\rangle^p |\varphi^-\rangle_e +$$

$$\frac{r_+}{2} |s2\rangle^s |H\rangle^p |\varphi^+\rangle_e + \frac{r_-}{2} |s2\rangle^s |V\rangle^p |\varphi^-\rangle_e =$$

$$r_- |\varphi^+\rangle^p (|\uparrow\rangle |\varphi^+\rangle^s + |\downarrow\rangle |\varphi^-\rangle^s) + r_+ |\varphi^+\rangle^p |s2\rangle^s |\varphi^+\rangle_e. \tag{6}$$

在光子空间模自由度和量子点自旋之间的 S-CPF 操作成功情形下, 最终态包含一个整体系数 r₋. 由于量子点自旋态不变项(即失败情形)可被对应的内部单光子探测器探测到, 错误项被投影到预告性的单光子探测, 因此这些操作是错误可预告的, 并且对系统损失是鲁棒的.

3 测量一个未知超纠缠 Bell 类态的并发度

下面先描述测量一个光子超纠缠态并发度的方法. 假设有两对光子超纠缠态

$$|\psi\rangle_{A1B1} = (\alpha |HH\rangle_{A1B1} + \beta |VV\rangle_{A1B1}) \otimes (\mu |s1s1\rangle_{A1B1} + \nu |s2s2\rangle_{A1B1}),$$

$$|\psi\rangle_{A2B2} = (\alpha |HH\rangle_{A2B2} + \beta |VV\rangle_{A2B2}) \otimes (\mu |s1s1\rangle_{A2B2} + \nu |s2s2\rangle_{A2B2}). \tag{7}$$

对每个超纠缠对, 2 个光子分别分发给 Alice 和 Bob, 这里 |α|² + |β|² = |μ|² + |ν|² = 1. s1 和 s2 是如图 2 所示的 2 个不同空间模. 这样的超纠缠态可通过自发参量下转换光源得到. 文献[26]研究表明, 紫外光的泵浦脉冲穿过一个 β 硼酸钡晶体(BBO), 一对在空间模 s1 和 s2 的关联光子对将以概率 p 制备. 文献[17]提供了另一种高效制备超纠缠态的方法.

由图 2 可见, 每轮分别选择一对超纠缠光子对 A1B1 和 A2B2. 光子 A1 和 A2 依次穿过 P-CPF 单元, 并与量子点自旋 QD1 相互作用. 光子 A1B1A2B2 以及两个量子点共同组成的复合系统态演化为

$$|\psi\rangle_{A1B1} \otimes |\psi\rangle_{A2B2} \otimes |\varphi^+\rangle_{e1} \otimes |\varphi^+\rangle_{e2} = (\alpha |HH\rangle_{A1B1} + \beta |VV\rangle_{A1B1}) (\mu |a1b1\rangle_{A1B1} + \nu |a2b2\rangle_{A1B1}) \otimes$$

$$(\alpha |HH\rangle_{A2B2} + \beta |VV\rangle_{A2B2}) (\mu |a1b1\rangle_{A2B2} + \nu |a2b2\rangle_{A2B2}) \otimes |\varphi^+\rangle_{e1} \otimes |\varphi^+\rangle_{e2} \rightarrow$$

$$(\alpha^2 |HHHH\rangle_{A1B1A2B2} + \beta^2 |VVVV\rangle_{A1B1A2B2}) \otimes |\varphi^+\rangle_{e1} +$$

$$(\alpha\beta |HHVV\rangle_{A1B1A2B2} + \alpha\beta |VVHH\rangle_{A1B1A2B2}) \otimes |\varphi^-\rangle_{e1} \otimes$$

$$(\mu |a1b1\rangle_{A1B1} + \nu |a2b2\rangle_{A1B1}) \otimes (\mu |a1b1\rangle_{A2B2} + \nu |a2b2\rangle_{A2B2}) \otimes |\varphi^+\rangle_{e2}. \tag{8}$$

利用一束 π/2 激光对原子执行 Hadamard 操作, 该操作可表示为

$$|\uparrow\rangle \rightarrow (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) / \sqrt{2} \quad (|\uparrow\rangle \rightarrow (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) / \sqrt{2}).$$

复合系统态变为

$$\begin{aligned}
 & (\alpha^2 |HHHH\rangle_{A_1B_1A_2B_2} + \beta^2 |VVVV\rangle_{A_1B_1A_2B_2}) \otimes |\varphi^+\rangle_{e_1} + \\
 & (\alpha\beta |HHVV\rangle_{A_1B_1A_2B_2} + \alpha\beta |VVHH\rangle_{A_1B_1A_2B_2}) \otimes |\varphi^-\rangle_{e_1}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

首先, Alice 探测第一个量子点的自旋态. 若探测结果为 $|\varphi^-\rangle_{e_1}$, 远程参与者之间的 4 个光子坍缩为一个 4 量子比特 Greenberger-Horne-Zeilinger(GHZ)态:

$$|\varphi\rangle^p = (\alpha\beta |HHVV\rangle_{A_1B_1A_2B_2} + \alpha\beta |VVHH\rangle_{A_1B_1A_2B_2}), \tag{10}$$

其概率为 $P(|\varphi\rangle^p) = 2|\alpha\beta|^2$, 则初始光子偏振态的并发度可表示为

$$C^p = \sqrt{2P(|\varphi\rangle^p)}. \tag{11}$$

其次, 光子 A1A2 穿过 S-CPF 单元, 并与 QD2 依次相互作用. 光子 A1B1A2B2 以及 2 个量子点共同组成的复合系统态演化过程为

$$\begin{aligned}
 & (\mu |s1s1\rangle_{A_1B_1} + \nu |s2s2\rangle_{A_1B_1}) \otimes (\mu |s1s1\rangle_{A_2B_2} + \nu |s2s2\rangle_{A_2B_2}) \otimes |\varphi^+\rangle_{e_2} \rightarrow \\
 & (\mu^2 |s1s1s1s1\rangle_{A_1B_1A_2B_2} + \nu^2 |s2s2s2s2\rangle_{A_1B_1A_2B_2}) \otimes |\varphi^+\rangle_{e_2} + \\
 & (\mu\nu |s1s1s2s2\rangle_{A_1B_1A_2B_2} + \mu\nu |s2s2s1s1\rangle_{A_1B_1A_2B_2}) \otimes |\varphi^-\rangle_{e_2}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

最后, Alice 探测第二个量子点自旋的态. 若探测结果为 $|\varphi^-\rangle_{e_2}$, 远程参与者之间的 4 个光子坍缩为一个 4 量子比特 Greenberger-Horne-Zeilinger(GHZ)态:

$$|\varphi\rangle^s = \mu\nu |s1s1s2s2\rangle_{A_1B_1A_2B_2} + \mu\nu |s2s2s1s1\rangle_{A_1B_1A_2B_2}. \tag{13}$$

其概率为 $P(|\varphi\rangle^s) = 2|\mu\nu|^2$, 则初始光子偏振态的并发度可表示为

$$C^s = \sqrt{2P(|\varphi\rangle^s)}. \tag{14}$$

总并发度可表示为两个自由度的并发度之和^[21]

$$C_{\text{hyper}} = C^p + C^s = \sqrt{2P(|\varphi\rangle^p)} + \sqrt{2P(|\varphi\rangle^s)}. \tag{15}$$

至此, 完全描述了对部分超纠缠类 Bell 态的纠缠测量方案. 整个方案可分成两步: 第一步是测量偏振纠缠态, 第二步是测量空间模纠缠态. 在该方案中, 并发度可转化为挑选到光子奇宇称态的成功概率. 包括偏振模的 $|HV\rangle_{A_1A_2}$, $|VH\rangle_{A_1A_2}$ 态以及在空间模的 $|s1s2\rangle_{A_1A_2}$ 和 $|s2s1\rangle_{A_1A_2}$ 态. 为完成准确的并发度测量, 应对上述过程重复执行多次, 并消耗很多如式(7)形式的超纠缠光子对.

4 测量任意 2 量子比特超纠缠态的并发度

将超纠缠 Bell 类态的纠缠测量方法拓展, 测量任意 2 量子比特超纠缠态的并发度, 其过程示意图如图 3 所示. 其中 BS 为一个光分束片, 它对光子空间模自由度执行 Hadamard 操作 $[|s1\rangle \rightarrow (|s1\rangle + |s2\rangle)/\sqrt{2}, |s2\rangle \rightarrow (|s1\rangle - |s2\rangle)/\sqrt{2}]$.

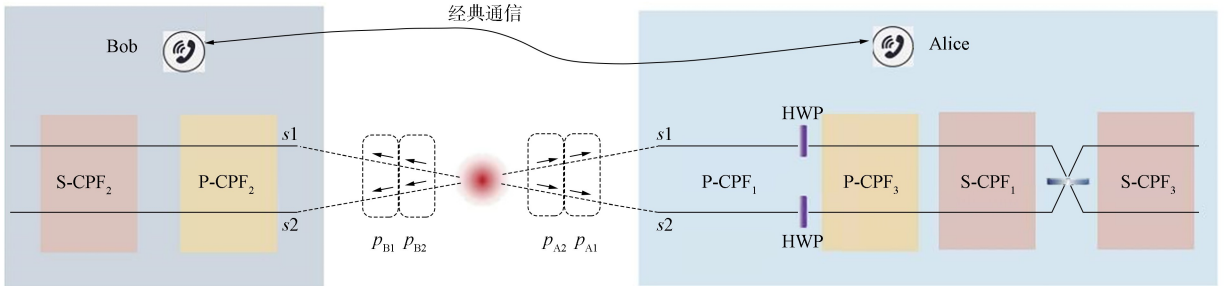


图 3 对任意一个 2 量子比特超纠缠光子态的纠缠测量方案示意图

Fig. 3 Schematic diagram of entanglement measurement scheme for an arbitrary two-qubit hyperentangled photonic state

假设任意 2 量子比特超纠缠态形式为

$$\begin{aligned}
 & |\psi\rangle_{A_1B_1} = (a |HH\rangle + b |HV\rangle + c |VH\rangle + d |VV\rangle)_{A_1B_1} \otimes \\
 & (h |s1s1\rangle + j |s1s2\rangle + k |s2s1\rangle + l |s2s2\rangle)_{A_1B_1}, \\
 & |\psi\rangle_{A_2B_2} = (a |HH\rangle + b |HV\rangle + c |VH\rangle + d |VV\rangle)_{A_2B_2} \otimes \\
 & (h |s1s1\rangle + j |s1s2\rangle + k |s2s1\rangle + l |s2s2\rangle)_{A_2B_2}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

这 2 个光子与 P-CPF₁ 单元依次相互作用, 执行对光子 A1 和 B1 偏振模的宇称检测操作, 系统的态演化为

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{A1B1} |\psi\rangle_{A2B2} |\varphi^+\rangle_{e1} &= (a|HH\rangle + b|HV\rangle + c|VH\rangle + d|VV\rangle)_{A1B1} \otimes \\ & (a|HH\rangle + b|HV\rangle + c|VH\rangle + d|VV\rangle)_{A2B2} \rightarrow \\ & (a^2|HHHH\rangle + ab|HHHV\rangle + ba|HVHH\rangle + b^2|HVHV\rangle + c^2|HHHH\rangle + \\ & cd|HHHV\rangle + dc|HVHH\rangle + d^2|HVHV\rangle)_{A1B1A2B2} \otimes |\varphi^+\rangle_{e1} + \\ & (ab|HHVH\rangle + ad|HHVV\rangle + bc|HVVH\rangle + \\ & bd|HVVV\rangle + ca|VHHH\rangle + cb|VHHV\rangle + \\ & da|VVHH\rangle + db|VVHV\rangle)_{A1B1A2B2} \otimes |\varphi^-\rangle_{e1}. \end{aligned} \quad (17)$$

首先, Alice 对 P-CPF₁ 内部量子点自旋 QD1 的态进行测量. 若 QD1 的态为 $|\varphi^-\rangle_{e1}$, 则引导光子 B1 和 B2 继续与 P-CPF₂ 内部的量子点自旋 QD2 依次相互作用, 完成对这两个光子偏振模态的宇称检测. 复合系统的态演化过程可表示为

$$\begin{aligned} & (ab|HHVH\rangle + ad|HHVV\rangle + bc|HVVH\rangle + bd|HVVV\rangle + \\ & ca|VHHH\rangle + cb|VHHV\rangle + da|VVHH\rangle + db|VVHV\rangle)_{A1B1A2B2} \otimes |\varphi^+\rangle_{e2} \rightarrow \\ & (ab|HHVH\rangle + bd|HVVV\rangle + ca|VHHH\rangle + db|VVHV\rangle)_{A1B1A2B2} \otimes |\varphi^+\rangle_{e2} + \\ & (ad|HHVV\rangle + bc|HVVH\rangle + cb|VHHV\rangle + da|VVHH\rangle)_{A1B1A2B2} \otimes |\varphi^-\rangle_{e2}. \end{aligned} \quad (18)$$

其次, Alice 和 Bob 对量子点自旋 QD1 和 QD2 进行探测, 并且互相之间通过经典通道进行通信. 若 QD1 和 QD2 均处于 $|\varphi^-\rangle_e$ 态, 则光子态坍塌为

$$\begin{aligned} ad|HHVV\rangle_{A1B1A2B2} + bc|HVVH\rangle_{A1B1A2B2} + cb|VHHV\rangle_{A1B1A2B2} + da|VVHH\rangle_{A1B1A2B2} = \\ \frac{ad}{\sqrt{2(|ad|^2 + |bc|^2)}} (|HHVV\rangle + |VVHH\rangle)_{A1B1A2B2} + \\ \frac{bc}{\sqrt{2(|ad|^2 + |bc|^2)}} (|HVVH\rangle + |VHHV\rangle)_{A1B1A2B2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Alice 利用 2 个 1/4 波片对 2 个光子 A1 和 A2 分别执行 Hadamard 操作, 先将这 2 个光子引导到 P-CPF₃, 再对这 2 个光子的偏振模执行宇称检测. 并对 P-CPF₃ 内部量子点自旋 QD3 进行测量, 若测量结果为 $|\varphi^-\rangle_{e3}$, 则 4 个光子 A1B1A2B2 演化为

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle^p &= \frac{1}{2} (|HHVV\rangle + |HVVH\rangle + |VHHV\rangle + |VVHH\rangle)_{A1B1A2B2} = \\ & \frac{1}{2} (|HV\rangle - |VH\rangle)_{A1A2} \otimes (|HV\rangle - |VH\rangle)_{B1B2}. \end{aligned} \quad (20)$$

可直接计算得到态的总概率为

$$P(|\Psi\rangle^p) = |ad - bc|^2. \quad (21)$$

基于任意 2 量子比特纯态的并发度公式, 可得到初始纠缠态的并发度为

$$C(|\psi\rangle^p) = 2|ad - bc| = 2\sqrt{P(|\Psi\rangle^p)}. \quad (22)$$

在第二步, 光子 A1A2 与 S-CPF₁ 单元依次相互作用, 执行对这 2 个光子空间模的宇称检测. 系统的态演化过程为

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{A1B1}^s |\psi\rangle_{A2B2}^s |\varphi^+\rangle_{e4} &= (h|s_1s_1\rangle + j|s_1s_2\rangle + k|s_2s_1\rangle + l|s_2s_2\rangle)_{A1B1} \otimes \\ & (h|s_1s_1\rangle + j|s_1s_2\rangle + k|s_2s_1\rangle + l|s_2s_2\rangle)_{A2B2} \rightarrow \\ & (h^2|s_1s_1s_1s_1\rangle + hj|s_1s_1s_1s_2\rangle + jh|s_1s_2s_1s_1\rangle + j^2|s_1s_2s_1s_2\rangle + k^2|s_2s_1s_2s_1\rangle + \\ & kl|s_2s_1s_2s_2\rangle + lk|s_2s_2s_2s_1\rangle + l^2|s_2s_2s_2s_2\rangle)_{A1B1A2B2} \otimes |\varphi^+\rangle_{e4} + \\ & (hj|s_1s_1s_2s_1\rangle + hl|s_1s_1s_2s_2\rangle + jk|s_1s_2s_2s_1\rangle + jl|s_1s_2s_2s_2\rangle + kh|s_2s_1s_1s_1\rangle + \\ & kj|s_2s_1s_1s_2\rangle + lh|s_2s_2s_1s_2\rangle + lj|s_2s_2s_1s_2\rangle)_{A1B1A2B2} \otimes |\varphi^-\rangle_{e4}. \end{aligned} \quad (23)$$

最后, Alice 对 S-CPF₁ 内部量子点自旋 QD4 的态进行测量. 若 QD4 的态为 $|\varphi^-\rangle_{e4}$, 则继续引导光子 B1 和 B2 与 S-CPF₂ 内部量子点 QD5 依次相互作用, 执行对这 2 个光子的宇称检测. 系统的态演

化过程可表示为

$$\begin{aligned} & (hj |s_1s_1s_2s_1\rangle + hl |s_1s_1s_2s_2\rangle + jk |s_1s_2s_2s_1\rangle + jl |s_1s_2s_2s_2\rangle + \\ & kh |s_2s_1s_1s_1\rangle + kj |s_2s_1s_1s_2\rangle + lh |s_2s_2s_1s_1\rangle + lj |s_2s_2s_1s_2\rangle)_{A_1B_1A_2B_2} \otimes |\varphi^+\rangle_{e_5} \rightarrow \\ & (hj |s_1s_1s_2s_1\rangle + jl |HVVV\rangle + kh |VHHH\rangle + lj |VVHV\rangle)_{A_1B_1A_2B_2} \otimes |\varphi^+\rangle_{e_5} + \\ & (hl |s_1s_1s_2s_2\rangle + jk |s_1s_2s_2s_1\rangle + kj |s_2s_1s_1s_2\rangle + lh |s_2s_2s_1s_1\rangle)_{A_1B_1A_2B_2} \otimes |\varphi^-\rangle_{e_5}. \end{aligned} \quad (24)$$

Alice 和 Bob 分别探测量子点 QD4 和 QD5, 并通过经典通道相互通信, 若这 2 个量子点均处于 $|\varphi^-\rangle_e$ 态, 则这 4 个光子的空间模态坍缩为

$$\begin{aligned} & (hl |s_1s_1s_2s_2\rangle + jk |s_1s_2s_2s_1\rangle + kj |s_2s_1s_1s_2\rangle + lh |s_2s_2s_1s_1\rangle)_{A_1B_1A_2B_2} = \\ & \frac{hl}{\sqrt{2(|hl|^2 + |jk|^2)}} (|s_1s_1s_2s_2\rangle + |s_2s_2s_1s_1\rangle)_{A_1B_1A_2B_2} + \\ & \frac{jk}{\sqrt{2(|hl|^2 + |jk|^2)}} (|s_1s_2s_2s_1\rangle + |s_2s_1s_1s_2\rangle)_{A_1B_1A_2B_2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Alice 利用一个光分束器 BS 对两个光子 A1 和 A2 的空间模执行 Hadamard 操作, 先将这 2 个光子引入第 3 个 S-CPF₃, 再对这 2 个光子的空间模执行宇称检测, 并对 S-CPF₃ 内部量子点自旋 QD6 进行测量, 若测量结果为 $|\varphi^-\rangle_{e_6}$, 则 4 个光子 A1B1A2B2 演化为

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle^s &= \frac{1}{2} (|s_1s_1s_2s_2\rangle + |s_1s_2s_2s_1\rangle + |s_2s_1s_1s_2\rangle + |s_2s_2s_1s_1\rangle)_{A_1B_1A_2B_2} = \\ & \frac{1}{2} (|s_1s_2\rangle - |s_2s_1\rangle)_{A_1A_2} \otimes (|s_1s_2\rangle - |s_2s_1\rangle)_{B_1B_2}. \end{aligned} \quad (26)$$

可直接计算得到态的总概率为

$$P(|\Psi\rangle^s) = |hl - jk|^2. \quad (27)$$

基于任意 2 量子比特纯态的并发度公式, 可得到初始纠缠态的并发度为

$$C(|\phi\rangle^p) = 2|hl - jk| = 2\sqrt{P(|\Psi\rangle^s)}, \quad (28)$$

总并发度为

$$C_{\text{hyper}} = C^p + C^s = 2\sqrt{P(|\Psi\rangle^p)} + 2\sqrt{P(|\Psi\rangle^s)}. \quad (29)$$

5 非完美实验条件的影响

综上所述, 以上方案可分为两步: 1) 对偏振纠缠进行测量; 2) 对空间模纠缠进行测量. 并发度被转化为挑选出奇宇称态(如偏振模的 $|HV\rangle$, $|VH\rangle$ 态和空间模的 $|s_1s_2\rangle$, $|s_2s_1\rangle$) 的成功概率. 为准确完成并发度测量, 应多次执行纠缠测量过程, 并需消耗较多超纠缠光子对. 该方案基于式(2)和式(7)超纠缠态的 2 个自由度可被独立操控的事实. 这表明若操作偏振纠缠, 则空间模纠缠不会变; 若仅操作空间模纠缠, 则偏振纠缠也不会变. 这个优势提供了有效执行该方案的路径.

在其他方案中, 不完美的光子-腔耦合以及泄露将导致输出光子反射系数的波动, 从而导致纠缠测量结果不精确, 并发度测量结果产生偏差. 由于该方案中的 P-CPF 门和 S-CPF 门利用了“自避错”机制, 避免了不完美耦合和腔损耗等导致的计算错误, 因此与基于腔量子电动力学系统的纠缠测量方案差别较大.

由于该方案需两对全同初始超纠缠态, 但在实际纠缠制备过程中, 即使利用相同的纠缠制备源, 也只能得到近似但不全同的两对超纠缠态, 因此需考虑初始态的系数偏差对方案产生的影响. 假设初始超纠缠态形式为

$$\begin{aligned} |\phi\rangle_{A_1B_1} &= (a |HH\rangle_{A_1B_1} + b |VV\rangle_{A_1B_1}) \otimes (k |s_1s_1\rangle_{A_1B_1} + l |s_2s_2\rangle_{A_1B_1}), \\ |\phi\rangle'_{A_2B_2} &= (\theta |\phi\rangle_{A_1B_1} + \sqrt{1 - |\theta|^2} (a |HV\rangle_{A_1B_1} + b |VH\rangle_{A_1B_1})) \otimes \\ & (\vartheta |\phi\rangle_{A_1B_1} + \sqrt{1 - |\vartheta|^2} (a |s_1s_2\rangle_{A_1B_1} + b |s_2s_1\rangle_{A_1B_1})). \end{aligned} \quad (30)$$

其中 θ 和 ϑ 为两个自由度上的偏差值. 经历图 2 所示的纠缠测量过程, 若测量 Alice 的 2 个量子点均处

于 $|\varphi^-\rangle_e$ 态, 则可得

$$P'(|\Phi\rangle^p) = (4\theta^2 - 2)|ab|^2 + 1 - \theta^2, \quad P'(|\Phi\rangle^s) = (4\vartheta^2 - 2)|kl|^2 + 1 - \vartheta^2. \quad (31)$$

由式(31)可得 $C' = \sqrt{2P'(|\Phi\rangle^p)} + \sqrt{2P'(|\Phi\rangle^s)}$. 与用 2 个全同初始态计算的结果相比, 并发度偏差 $\Delta C' = C'_{\text{hyper}} - C_{\text{hyper}}$ 与理想并发度 C 的比值 $\Delta C'/C$ 随系数 a 和 θ 的变化关系如图 4 所示. 这里假设 $a=k, \theta=\vartheta$. 由图 4 可见: 若两份拷贝态的偏差较小, 则并发度的偏差较小; 差值随 $|a-1/\sqrt{2}|$ 的增加而增加. 这是由于 $|a-1/\sqrt{2}|$ 增大, 初始纠缠态的并发度降低所致, 即理想并发度趋近于 0. 当 $0.6 < a < 0.8$ 时, 计算可得 $\Delta C/C < 0.32$.

与用两个全同初始态计算的结果相比, 并发度偏差 $\Delta C'' = C''_{\text{hyper}} - C_{\text{hyper}}$ 与理想并发度 C 的比值 $\Delta C''/C$ 随系数 a 和 θ 的变化关系如图 5 所示. 这里假设 $a=k, \theta=\vartheta=0.1$. 由图 5 可见, 若两份拷贝态的偏差较小, 则并发度的偏差较小. 当 $0.529 < a < 0.848$ 时, 计算可得 $\Delta C/C < 0.1$.

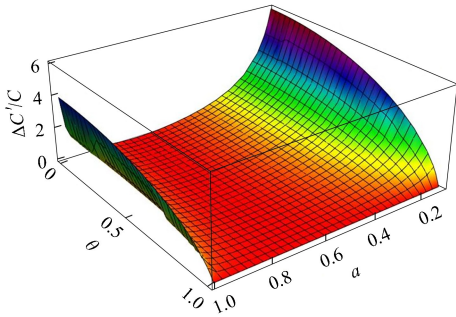


图 4 Bell 类态的 $\Delta C'/C$ 与系数 a 和偏差值 θ 的关系

Fig. 4 Relationship between $\Delta C'/C$ of Bell-like state and coefficient a and deviation value θ

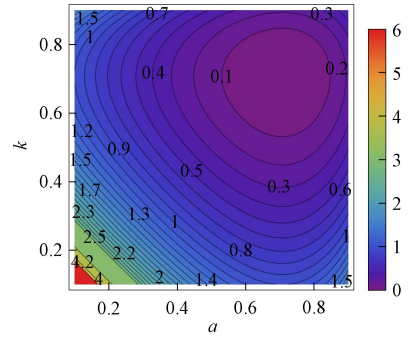


图 5 Bell 类态的 $\Delta C''/C$ 与系数 a 和 k 的关系

Fig. 5 Relationship between $\Delta C''/C$ of Bell-like state and coefficient a and k

在实际实验中, 超纠缠光子对可通过将制备单自由度纠缠态的技术结合, 例如利用光学腔或自发四波混合辅助^[27-28]. 超纠缠脉冲的线宽应比腔模的线宽窄^[24]. 对电子自旋的快速单量子比特测量可通过超快光脉冲或光学控制的几何相位实现^[29].

综上, 本文定义了一种超纠缠态的并发度, 提出了测量超纠缠态并发度的方案, 不同自由度的并发度可独立测量. 利用量子点-微腔耦合系统的单光子输入输出过程, 分别构建了“自避错”的对偏振自由度和空间模自由度受控相位翻转门. 基于此, 对两个自由度独立进行宇称检测, 偏振和空间模自由度的并发度均可转化为挑选出奇宇称态的总概率. 这种纠缠测量方案对量子信息处理有效.

参 考 文 献

[1] EKERT A K. Quantum Cryptography Based on Bell's Theorem [J]. Phys Rev Lett, 1991, 67(5): 661-664.
 [2] BENNETT C H, BRASSARD G, CREPEAU C, et al. Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels [J]. Phys Rev Lett, 1993, 70(13): 1895-1899.
 [3] LONG G L, LIU X S. Theoretically Efficient High-Capacity Quantum-Key-Distribution Scheme [J]. Phys Rev A, 2002, 65(3): 032302-1.
 [4] KARLSSON A, KOASHI M, IMOTO N. Quantum Entanglement for Secret Sharing and Secret Splitting [J]. Phys Rev A, 1999, 59(1): 162-168.
 [5] BARREIRO J T, LANGFORD N K, PETERS N A, et al. Generation of Hyperentangled Photon Pairs [J]. Phys Rev Lett, 2005, 95(26): 260501-1-260501-4.
 [6] BARBIERI M, CINELLI C, MATALONI P, et al. Polarization-Momentum Hyperentangled States: Realization and Characterization [J]. Phys Rev A, 2005, 72(5): 052110-1-052110-8.
 [7] VALLONE G, CECCARELLI R, DE MARTINI F, et al. Hyperentanglement of Two Photons in Three Degrees of Freedom [J]. Phys Rev A, 2009, 79(3): 030301-1-030301-4.
 [8] HU B L, ZHAN Y B. Generation of Hyperentangled States between Remote Noninteracting Atomic Ions [J]. Phys Rev A, 2010, 82(5): 054301-1-054301-4.

- [9] REN B C, WEI H R, HUA M, et al. Complete Hyperentangled-Bell-State Analysis for Photon Systems Assisted by Quantum-Dot Spins in Optical Microcavities [J]. *Opt Express*, 2012, 20(22): 24664-24674.
- [10] SHENG Y B, DENG F G. One-Step Deterministic Polarization-Entanglement Purification Using Spatial Entanglement [J]. *Phys Rev A*, 2010, 82(4): 044305-1-044305-4.
- [11] REN B C, DU F F, DENG F G. Hyperentanglement Concentration for Two-Photon Four-Qubit Systems with Linear Optics [J]. *Phys Rev A*, 2013, 88(1): 012302-1-012302-11.
- [12] REN B C, DENG F G. Deterministic Photonic Spatial-Polarization Hyper-controlled-not Gate Assisted by a Quantum Dot inside a One-Side Optical Microcavity [J]. *Laser Phys Lett*, 2013, 10(9): 095202-1-095202-7.
- [13] BENNETT C H, BERNSTEIN H J, POPOV S, et al. Concentrating Partial Entanglement by Local Operations [J]. *Phys Rev A*, 1996, 53(3): 2046-2052.
- [14] BENNETT C H, DIVINCENZO D P, SMOLIN J A, et al. Mixed-State Entanglement and Quantum Error Correction [J]. *Phys Rev A*, 1996, 54(5): 3824-3851.
- [15] WOOTTERS W K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits [J]. *Phys Rev Lett*, 1998, 80(10): 2245-2248.
- [16] WOOTTERS W K. Entanglement of Formation and Concurrence [J]. *Quantum Inf Comput*, 2001, 1(1): 27-44.
- [17] WALBORN S P, SOUTO RIBEIRO P H, DAVIDOVICH L, et al. Experimental Determination of Entanglement with a Single Measurement [J]. *Nature*, 2006, 440(7087): 1022-1025.
- [18] ROMERO G, LOPEZ C E, LASTRA F, et al. Direct Measurement of Concurrence for Atomic Two-Qubit Pure States [J]. *Phys Rev A*, 2007, 75(3): 032303-1-032303-9.
- [19] ZHANG L H, YANG Q, YANG M, et al. Direct Measurement of the Concurrence of Two-Photon Polarization-Entangled States [J]. *Phys Rev A*, 2013, 88(6): 062342-1-062342-6.
- [20] SHENG Y B, ZHOU L. Detection of Nonlocal Atomic Entanglement Assisted with Single Photons [J]. *Phys Rev A*, 2014, 90(2): 024301-1-024301-5.
- [21] SHENG Y B, GUO R, PAN J, et al. Two-Step Measurement of the Concurrence for Hyperentangled State [J]. *Quantum Inf Process*, 2015, 14(3): 963-973.
- [22] CHENG L Y, YANG G H, GUO Q, et al. Direct Measurement of Nonlocal Entanglement of Two-Qubit Spin Quantum States [J]. *Sci Rep*, 2016, 6: 19482-1-19482-9.
- [23] LIU A P, CHENG L Y, GUO Q, et al. Direct Measurement of Two-Qubit Phononic Entangled States via Optomechanical Interactions [J]. *Chin Phys B*, 2022, 31(8): 080307-1-080307-7.
- [24] HU C Y, YOUNG A, O'BRIEN J L, et al. Giant Optical Faraday Rotation Induced by a Single-Electron Spin in a Quantum Dot: Applications to Entangling Remote Spins via a Single Photon [J]. *Phys Rev B*, 2008, 78(8): 085307-1-085307-5.
- [25] LI T, DENG F G. Error-Rejecting Quantum Computing with Solid-State Spins Assisted by Low-Q Optical Microcavities [J]. *Phys Rev A*, 2016, 94(6): 062310-1-062310-8.
- [26] SIMON C, PAN J W. Polarization Entanglement Purification Using Spatial Entanglement [J]. *Phys Rev Lett*, 2002, 89(25): 257901-1.
- [27] KWIAT P G. Hyper-entangled States [J]. *J Mod Opt*, 1997, 44(11): 2173-2195.
- [28] DENG F G, REN B C, LI X H. Quantum Hyperentanglement and Its Applications in Quantum Information Processing [J]. *Sci Bull*, 2017, 62(1): 46-53.
- [29] KIM E D, TRUEX K, XU X, et al. Fast Spin Rotations by Optically Controlled Geometric Phases in a Charge-Tunable InAs Quantum Dot [J]. *Phys Rev Lett*, 2010, 104(16): 167401-1-167401-4.

(责任编辑:王 健)