

# 由分数 Brown 运动驱动的 EGARCH 模型

王玮莹, 韩月才

(吉林大学 数学学院, 长春 130012)

**摘要:** 针对传统 EGARCH 模型难以捕捉长记忆性的问题, 通过引入分数 Brown 运动提出一个 fBm-EGARCH 模型, 给出模型的二阶矩、四阶矩及协方差函数性质, 并理论证明其长期记忆性. 数值模拟结果表明, 该模型不仅能准确捕捉短期波动, 还能反映长期记忆性, 从而验证了模型的有效性.

**关键词:** EGARCH 模型; 分数 Brown 运动; 长期记忆性; 流动性

**中图分类号:** O211.61 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)01-0041-06

## EGARCH Model Driven by Fractional Brownian Motion

WANG Weiyang, HAN Yuecai

(College of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, China)

**Abstract:** Aiming at the problem that the traditional EGARCH model was difficult to capture long-term memory, we proposed an fBm-EGARCH model by introducing fractional Brownian motion. We gave the second-order moment, the fourth-order moment and covariance function properties of the model, and theoretically proved its long-term memory. Numerical simulation results show that the model can not only accurately capture short-term fluctuations, but also reflect long-term memory, which verifies the effectiveness of the model.

**Keywords:** EGARCH model; fractional Brownian motion; long-term memory; liquidity

在金融市场中, 资产价格的波动率是衡量市场风险的重要指标. 为更好地刻画金融时间序列中的波动特性, 目前已提出了多种波动率模型. 自 Engle<sup>[1]</sup> 提出自回归条件异方差(ARCH)模型以来, 波动率建模受到广泛关注. ARCH 模型通过引入时间序列中的条件异方差, 刻画了资产价格波动率的“集群效应”, 即波动率在特定时间段内表现出持续性和自相关性. 为改进 ARCH 模型在长记忆特性上的局限性, Bollerslev<sup>[2]</sup> 提出了广义自回归条件异方差(GARCH)模型. GARCH 模型通过在 ARCH 模型基础上增加自回归项, 使得波动率的波动具有更长时间的依赖性, 因此该模型广泛应用于金融领域<sup>[3-4]</sup>中.

传统 GARCH 模型无法充分解释负面冲击对资产价格波动的更强影响, 这种非对称性问题的实际金融市场中尤为常见. 为解决该问题, Nelson<sup>[5]</sup> 提出了指数广义自回归条件异方差(EGARCH)模型. EGARCH 模型通过对条件方差的对数变换, 不仅避免了传统 GARCH 模型对波动率为非负值的限制, 还能有效捕捉资产收益中的不对称效应, 即“杠杆效应”, 该模型在实证研究中应用广泛<sup>[6-7]</sup>. 尽管 EGARCH 模型改进了对波动率不对称性的刻画, 但在处理长记忆性问题上仍存在局限性.

收稿日期: 2024-11-06.

第一作者简介: 王玮莹(2001—), 女, 汉族, 硕士研究生, 从事概率论和数理统计的研究, E-mail: wangwy23@mails.jlu.edu.cn.

通信作者简介: 韩月才(1976—), 男, 汉族, 博士, 教授, 博士生导师, 从事概率论和数理统计的研究, E-mail: hanyuecai@jlu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12471417).

在金融市场中,流动性是影响资产价格波动的重要因素,它反映了资产在市场中迅速转换为现金而不导致价格显著变动的能力.流动性不仅影响资产的交易成本和市场的运行效率,还直接影响资产的波动率,尤其在市场出现极端波动时,其影响尤为显著.近年来,研究者越来越关注流动性对资产波动率的作用机制,尤其是在金融危机等高波动性环境下,流动性风险成为决定资产价格和投资者行为的关键因素之一. Amihud 等<sup>[8]</sup>研究表明,流动性越差,投资者要求的风险溢价越高,进而导致资产波动率的上升. Pástor 等<sup>[9]</sup>进一步研究了流动性与资产回报之间的关系,提出流动性波动会显著影响资产的系统性风险,从而推动了流动性风险与波动率建模的结合发展.此外, Bekaert 等<sup>[10]</sup>将流动性纳入波动率模型,提出流动性冲击可以增加资产价格的波动,并在不同市场环境下对流动性对波动率的作用进行了验证.

分数 Brown 运动(fBm)作为一种能描述长记忆性的随机过程,受到广泛关注.分数 Brown 运动通过引入 Hurst 指数,刻画了自相关性和持续性特征,使其在金融数据建模中展现了独特优势. Comte 等<sup>[11]</sup>将分数 Brown 运动引入金融波动率模型,证明了其在描述长记忆方面的有效性.此后,越来越多的研究者将分数 Brown 运动与不同的 GARCH 类模型相结合,用于改进金融市场波动率的刻画<sup>[12-14]</sup>.

基于此,本文通过在 EGARCH 模型的基础上引入流动性,并用分数 Brown 运动对其进行刻画,构建一个 fBm-EGARCH 模型,以更好地捕捉市场波动率的长期依赖性和不对称冲击效应.将描述长记忆性的分数 Brown 运动与 EGARCH 模型相结合,不仅能有效捕捉波动率的动态特征,还能刻画流动性对波动率的影响.

## 1 预备知识

### 1.1 EGARCH 模型

EGARCH 模型是 Nelson<sup>[5]</sup>基于 GARCH 模型提出的扩展模型,旨在解决波动率的非对称性和负值方差问题. EGARCH 模型基本形式为

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \gamma Z_{t-1} + \alpha(|Z_{t-1}| - E(|Z_{t-1}|)),$$

其中:常数项  $\omega$  决定波动率的水平;系数  $\alpha, \beta, \gamma$  满足  $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ ;  $\sigma_t^2$  表示  $t$  时刻的条件方差,用于刻画波动率.令  $Z_t = u_t / \sigma_t$  为标准化残差,用于调整非对称效应的基准,其服从正态分布,满足  $E(Z_t) = 0, E(Z_t^2) = 1$ .

EGARCH 模型在捕捉波动率的动态变化方面具有显著优势,能有效避免负值方差问题.通过引入非对称项  $\gamma$ , EGARCH 模型可灵活地解释金融市场中的杠杆效应.但由于波动率的非对称性, EGARCH 模型本身并不具有长期记忆性.

### 1.2 分数 Brown 运动

设  $(\Omega, F, P)$  为一个完备的概率空间, Hurst 指数  $H \in (0, 1)$ , 若高斯过程  $\{B^H(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  满足以下条件:

$$\begin{aligned} B^H(0) &= E(B^H(t)) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ E[B^H(t)B^H(s)] &= \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (1)$$

则其为分数 Brown 运动. 令

$$\begin{aligned} \rho^H(t) &= E(B^H(t+s) - B^H(t+s-1))(B^H(s) - B^H(s-1)) = \\ &= \frac{1}{2}(|t+1|^{2H} + |t|^{2H} - |t-1|^{2H}), \end{aligned} \quad (2)$$

则当  $1/2 < H < 1$  时, 分数 Brown 运动具有长秩相关性, 即

$$\rho^H(t) > 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \rho^H(t) = \infty.$$

特别地, 当  $H=1/2$  时, 分数 Brown 运动  $\{B^H(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  对应标准 Brown 运动  $B(t)$ .

## 2 fBm-EGARCH 模型构建及平稳性分析

下面在 EGARCH 模型的基础上引入流动性, 从而精确描述金融市场中的波动性, 其中流动性是由分数 Brown 运动刻画的. 本文构建了 fBm-EGARCH 模型, 并证明其平稳解的存在性.

### 2.1 fBm-EGARCH 模型的构建

本文构建 fBm-EGARCH 模型形式如下:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \gamma Z_{t-1} + \alpha(|Z_{t-1}| - E(|Z_{t-1}|)) + lL_{t-1}, \quad (3)$$

其中  $l \geq 0$  表示流动性对波动性的影响程度. 当  $l=0$  时, 模型(3)即为标准的 EGARCH(1,1)模型. 令  $\{L_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  表示流动性, 用如下分数 Brown 运动的平方增量进行刻画:

$$L_t = (B_t^H - B_{t-1}^H)^2. \quad (4)$$

**注 1** 在金融市场中流动性对市场的变化情况不能作出迅速改变, 而会产生持续的影响, 分数 Brown 运动能描述这种长期记忆性, 其平方增量能更好地刻画较长时间下流动性对价格冲击的影响.

**注 2** 波动率与流动性之间具有非线性的关系, 特别是在流动性不足时, 市场波动更剧烈. 分数 Brown 运动平方增量的形式能放大这种非线性特征, 更精确地反映流动性对波动率的影响.

### 2.2 平稳性分析

为分析模型(3)的平稳性, 令

$$y_t = \ln(\sigma_t^2), \quad A_t = \gamma Z_t + \alpha(|Z_t| - E(|Z_t|)), \quad D_t = \omega + lL_t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

则有

$$y_t = \omega + \beta y_{t-1} + \gamma Z_{t-1} + \alpha(|Z_{t-1}| - E(|Z_{t-1}|)) + lL_{t-1}, \quad (6)$$

迭代后有

$$y_t = \beta y_{t-1} + A_{t-1} + D_{t-1} = \beta^2 y_{t-2} + \beta A_{t-2} + \beta D_{t-2} + A_{t-1} + D_{t-1} = \dots = \beta^{k+1} y_{t-k-1} + \sum_{i=0}^k \beta^i (A_{t-i} + D_{t-i}). \quad (7)$$

**定理 1** 若满足  $0 < \beta < 1$ , 则模型(3)的条件方差  $\sigma^2$  是平稳的.

证明: 在  $0 < \beta < 1$  的条件下,  $y_t$  的均值存在且有限. 序列  $\{A_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  主要取决于波动率的非对称项, 其参数  $\gamma, \alpha$  影响波动率的动态特性, 但不影响模型平稳性的基本条件.

下面证明  $\{D_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  平稳. 由于分数 Brown 运动  $\{B^H(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  是一个均值为零的高斯过程, 因此可得

$$E(L_t) = \text{Var}(B_t^H - B_{t-1}^H) = (t - (t-1))^{2H} = 1^{2H} = 1.$$

由分数 Brown 运动的充要条件(1), 可得

$$\begin{aligned} \text{Cov}(L_t, L_s) &= E[(B_t^H - B_{t-1}^H)^2 (B_s^H - B_{s-1}^H)^2] - E[(B_t^H - B_{t-1}^H)^2] E[(B_s^H - B_{s-1}^H)^2] = \\ &= \frac{1}{2} (|t-s+1|^{2H} - 2|t-s|^{2H} + |t-s-1|^{2H})^2 + 1. \end{aligned}$$

$\text{Cov}(L_t, L_s)$  仅依赖于时间差  $|t-s|$ , 因此序列  $\{D_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  为弱平稳. 证毕.

记  $f_H(x) = \frac{1}{2} (|x+1|^{2H} - 2|x|^{2H} + |x-1|^{2H})^2 + 1$ .

## 3 fBm-EGARCH 模型的基本性质

下面计算 fBm-EGARCH 模型的二阶矩、四阶矩和协方差函数. 结果表明, fBm-EGARCH 模型可以弥补 EGARCH 模型无长期记忆性的不足.

**引理 1** 假设  $0 < \beta < 1$ , 则对任意的  $t \in \mathbb{R}_+$ , 有

$$E(\sigma_t^2) = \exp \left\{ \frac{\omega}{1-\beta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2 + \alpha^2(1-2/\pi) + l^2}{1-\beta^2} \right\}. \quad (8)$$

证明: 根据 fBm-EGARCH 模型基本形式(6), 对模型等式两边取期望, 并利用  $\{B_t^H\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  的独立性可得

$$E(y_t) = \omega + \beta E(y_{t-1}) + \alpha E(|Z_{t-1}| - E(|Z_{t-1}|)) + lE(L_0) = \omega + \beta E(y_{t-1}) + l,$$

其中  $Z_t$  为服从正态分布的随机变量.

由  $E(y_t) = \mu$  易知,

$$\mu = \omega + \beta\mu = \frac{\omega}{1-\beta}. \quad (9)$$

从而由  $E(|Z_t|) = \sqrt{2/\pi}$ , 有

$$\text{Var}(y_t) = \frac{r^2 + \alpha^2(1 - 2/\pi) + l^2}{1 - \beta^2}. \quad (10)$$

为求波动率的二阶矩, 对式(6)两边取对数, 并根据式(9), (10), 有

$$E(\sigma_t^2) = E(e^{y_t}) = \exp\left\{E(y_t) + \frac{1}{2}\text{Var}(y_t)\right\}.$$

证毕.

**引理 2** 假设  $0 < \beta < 1$ , 则对任意的  $t \in \mathbb{R}_+$ , 有

$$E(\sigma_t^4) = \exp\left\{\frac{4\omega}{1-\beta} + 8 \times \frac{r^2 + \alpha^2(1 - 2/\pi) + l^2}{1 - \beta^2}\right\}. \quad (11)$$

证明: 由 fBm-GARCH 模型(6), 可得

$$E(\sigma_t^4) = E(e^{4y_t}) = \exp\{4E(y_t) + 8\text{Var}(y_t)\}.$$

结合式(9)和式(10), 结论得证.

**引理 3** 假设  $0 < \beta < 1$ , 则对所有的  $t, s \in \mathbb{R}_+$ , 有

$$E(y_t L_s) = \omega \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i + l \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i f_H(t - s - i).$$

证明: 基于迭代形式(7), 有

$$\begin{aligned} E(y_t L_s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i E(A_{t-i} + D_{t-i}) L_s = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i E(\omega + l(B_{t-i+1}^H - B_{t-i}^H)^2) (B_{s+1}^H - B_s^H)^2 = \\ &\omega \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i + l \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i f_H(t - s - i). \end{aligned}$$

**定理 2** 假设  $0 < \beta < 1$ , 则对所有的  $k \geq 1$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , 有

$$\begin{aligned} \text{Cov}(y_t, y_{t-k}) &= \beta^k \left( \left( \frac{\omega}{1-\beta} \right)^2 + \frac{r^2 + \alpha^2(1 - 2/\pi) + l^2}{1 - \beta^2} \right) - \frac{\beta^k(\omega^2 + l\omega) - l\omega}{(1-\beta)^2} + \\ &l^2 \sum_{i=0}^{k-1} \beta^i \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m f_H(i - k - m + 1). \end{aligned} \quad (12)$$

特别地, 当  $k \rightarrow \infty$  时, 有

$$\beta^{k-1} \text{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i f_H(i) \frac{1}{1-\beta^2}.$$

证明: 基于迭代形式(7), 有

$$\begin{aligned} E(y_t y_{t-k}) &= \beta^k E(y_{t-k})^2 + \sum_{i=0}^{k-1} \beta^i E(y_{t-k}(A_{t-i} + D_{t-i})) = \\ &\beta^k \left( \left( \frac{\omega}{1-\beta} \right)^2 + \frac{r^2 + \alpha^2(1 - 2/\pi) + l^2}{1 - \beta^2} \right) + \sum_{i=0}^{k-1} \beta^i \left( \frac{\omega^2}{1-\beta} + lE(y_{t-k} L_{t-i}) \right). \end{aligned}$$

根据引理 3, 可得

$$E(y_{t-k} L_{t-i}) = \frac{\omega}{1-\beta} + l \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m f_H(i - k - m + 1). \quad (13)$$

结合式(13), 可得

$$E(y_t y_{t-k}) = \beta^k \left( \left( \frac{\omega}{1-\beta} \right)^2 + \frac{r^2 + \alpha^2(1 - 2/\pi) + l^2}{1 - \beta^2} \right) +$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{k-1} \beta^i \left( \frac{\omega^2}{1-\beta} + \frac{l\omega}{1-\beta} + l^2 \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m f_H(i-k-m+1) \right) = \\ & \beta^k \left( \left( \frac{\omega}{1-\beta} \right)^2 + \frac{r^2 + \alpha^2(1-2/\pi) + l^2}{1-\beta^2} \right) + \frac{(\omega^2 + l\omega)(1-\beta^k)}{(1-\beta)^2} + \\ & l^2 \sum_{i=0}^{k-1} \beta^i \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m f_H(i-k-m+1). \end{aligned}$$

证毕.

下面分析当  $k \rightarrow \infty$  时  $\text{Cov}(y_t, y_{t-k})$  的渐近行为, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} \beta^i \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m f_H(i-k-m+1) &= \sum_{i=-(k-1)}^0 \beta^{i+k-1} \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m f_H(i-m) = \\ & \beta^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \beta^{-i} \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m f_H(i+m). \end{aligned}$$

根据  $f_H(x) = f_H(-x)$ , 交换求和顺序可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} \beta^i \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m f_H(i-k-m+1) &= \beta^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m \sum_{i=m}^{m+k-1} \beta^{-i+m} f_H(i) = \beta^{k-1} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{-i} f_H(i) \sum_{m=i-(k-1)}^i \beta^{2m} = \\ & \beta^{k-1} \frac{1}{1-\beta^2} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{-i} f_H(i) (\beta^{2i-2k+2} - \beta^{2i+2}) = \\ & \beta^{k+1} \frac{1}{1-\beta^2} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{-i} f_H(i) - \beta^{k-1} \frac{1}{1-\beta^2} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i f_H(i). \end{aligned}$$

当  $0 < \beta < 1$  时, 序列  $\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i f_H(i)$  收敛. 证毕.

### 4 数值模拟

为证明本文构建的 fBm-EGARCH 模型的有效性, 对 fBm-EGARCH 模型(3)进行了数值模拟, 且所有实验过程都重复 100 次.

图 1 为不同  $H$  值时 fBm-EGARCH 模型的样本路径. 由图 1 可见: 当  $H=0.5$  时, 样本路径变化较剧烈、波动性较大, 表明模型有较弱的记忆性; 当  $H=0.75$  时, 随着 Hurst 指数的增大使得样本路径更平滑, 表现出较强的自相关性, 同时路径趋势具有持续性, 说明过去的运动趋势可能会影响未来的样本运动方向; 当  $H=0.9$  时, 样本路径较平滑、波动性最小, 此时表现出高度自相关性, 表明模型具有超强的记忆性. 实验结果证明了理论模型的有效性.

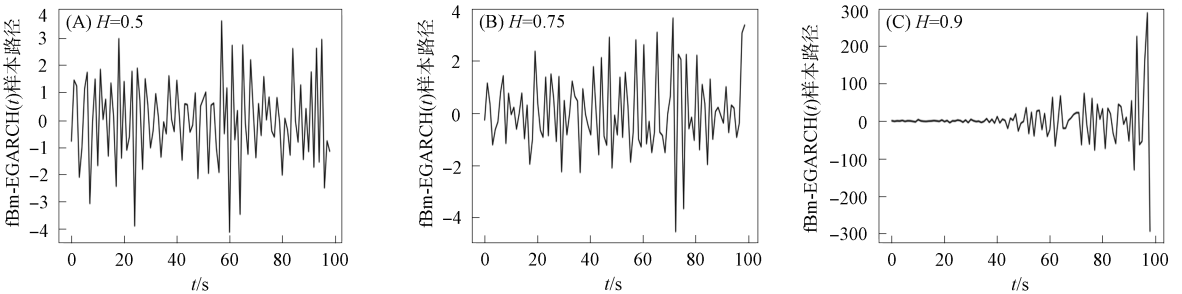


图 1 不同  $H$  值时 fBm-EGARCH 模型的样本路径

Fig. 1 Sample paths of fBm-EGARCH model with different values of  $H$

图 2 为 fBm-EGARCH 模型在不同 Hurst 指数下模型的自相关函数图(ACF), 其中自相关函数形式如式(2). 由图 2 可见: 当  $H=0.5$  时, 自相关函数图像出现快速衰退的趋势, 在较长滞后时间保持自相关, 呈现出持久性; 当  $H=0.75$  时, 自相关函数图像衰退速度明显变慢, 在较长滞后时间内仍保持较高的自相关, 呈现出持久性, 表明过去的趋势更可能影响未来的趋势, 这与金融市场中常见的行为一致; 当  $H=0.9$  时, 自相关函数的曲线下降极缓慢, 表现出高度持久性及强烈长期记忆性, 表明在

长时间滞后下仍然存在显著的自相关.

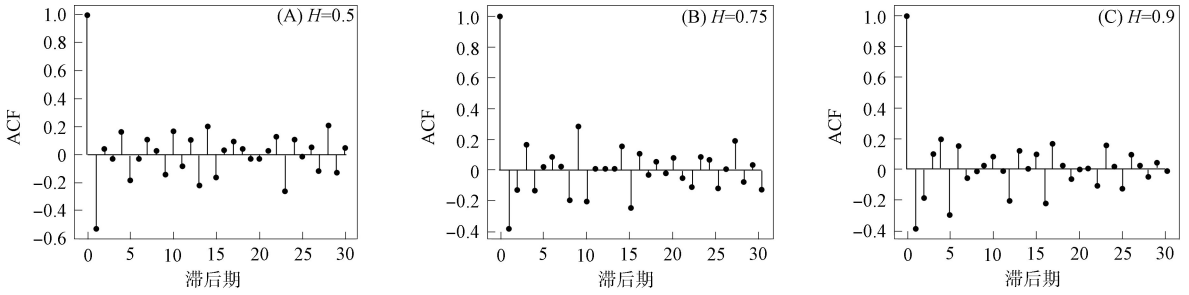


图 2 不同  $H$  值时 fBm-EGARCH 模型的 ACF 图

Fig. 2 ACF diagrams of fBm-EGARCH model with different values of  $H$

上述实验结果表明, 本文模型为金融市场波动性分析提供了更精确的工具, 有助于改善风险管理和投资决策.

### 参 考 文 献

- [1] ENGLE R F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation [J]. *Econometrica*, 1982, 50(4): 987-1007.
- [2] BOLLERSLEV T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity [J]. *Journal of Econometrics*, 1986, 31(3): 307-327.
- [3] 谢鹏飞, 冶继民, 王俊元. SVAR-GARCH 模型的多元波动率估计 [J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2019, 57(6): 1391-1399. (XIE P F, YE J M, WANG J Y. Multivariate Volatility Estimation with SVAR-GARCH Model [J]. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, 2019, 57(6): 1391-1399.)
- [4] FRANCQ C, ZAKOIAN J M. GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications [M]. [S. l.]: John Wiley & Sons, 2019: 1-512.
- [5] NELSON D B. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach [J]. *Econometrica*, 1991, 59(2): 347-370.
- [6] MOHSIN M, LI N W, ZIA-UR-REHMAN M, et al. The Volatility of Bank Stock Prices and Macroeconomic Fundamentals in the Pakistani Context: An Application of GARCH and EGARCH Models [J]. *Oeconomia Copernicana*, 2020, 11(4): 609-636.
- [7] HARVEY A, LANGE R J. Modeling the Interactions between Volatility and Returns Using EGARCH-M [J]. *Journal of Time Series Analysis*, 2018, 39(6): 909-919.
- [8] AMIHUD Y, MENDELSON H. Asset Pricing and the Bid-Ask Spread [J]. *Journal of Financial Economics*, 1986, 17(2): 223-249.
- [9] PÁSTOR L', STAMBAUGH R F. Liquidity Risk and Expected Stock Returns [J]. *Journal of Political Economy*, 2003, 111(3): 642-685.
- [10] BEKAERT G, HARVEY C R, LUNDBLAD C. Liquidity and Expected Returns: Lessons from Emerging Markets [J]. *The Review of Financial Studies*, 2007, 20(6): 1783-1831.
- [11] COMTE F, RENAULT E. Long Memory in Continuous-Time Stochastic Volatility Models [J]. *Mathematical Finance*, 1998, 8(4): 291-323.
- [12] CHEONG C W. Modeling and Forecasting Crude Oil Markets Using ARCH-Type Models [J]. *Energy Policy*, 2009, 37(6): 2346-2355.
- [13] ENGLE R F. Statistical Models for Financial Volatility [J]. *Financial Analysts Journal*, 1993, 49(1): 72-78.
- [14] AWARTANI B M A, CORRADI V. Predicting the Volatility of the S&P-500 Stock Index via GARCH Models: The Role of Asymmetries [J]. *International Journal of Forecasting*, 2005, 21(1): 167-183.

(责任编辑: 赵立芹)