doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024457

环形区域上非线性项中含梯度项的 Kirchhoff 方程的径向对称解

陈文婧，李永祥
(西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070)

摘要：用 Leray-Schauder 不动点定理，讨论 $\mathbb{R}^N(N\geqslant 2)$ 中环形区域上一类非线性项中含梯度项的 Kirchhoff 型椭圆方程径向对称解的存在性，在非线性项满足一定条件下获得了其径向对称解的存在性结果. 该条件允许非线性项关于未知函数项任意阶超线性增长，关于梯度项二次增长.

关键词：Kirchhoff 型椭圆方程；径向对称解；存在性；Leray-Schauder 不动点定理
中图分类号：O175.8　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5489(2025)04-1025-07

Radial Symmetric Solutions of Kirchhoff Equation of Nonlinearity with Gradient Term on Annulus

CHEN Wenjing, LI Yongxiang
(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: We discussed the existence of radial symmetric solutions of a Kirchhoff equation of nonlinearity with gradient term on an annulus in $\mathbb{R}^N(N\geqslant 2)$ by using the Leray-Schauder fixed point theorem. Under the nonlinearity satisfied certain conditions which allowed the nonlinearity might be superlinear growth of any order on unknown function term, and quadratic growth on the gradient term of unknown function, the existence results of radial symmetric solutions were obtained.

Keywords: Kirchhoff type elliptic equation; radial symmetric solution; existence; Leray-Schauder fixed point theorem

0　引　言

考虑 $\mathbb{R}^N(N\geqslant 2)$中的环形区域 $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^N \mid r_1<|x|<r_2\}$上非线性项中含有未知函数与梯度项的 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(|x|,u,|\nabla u|), & x\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases} \tag{1}$$

径向对称解的存在性，其中 $a,b>0$ 为常数，$f:[r_1,r_2]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 为连续函数.

Kirchhoff 方程是一类非经典的椭圆型偏微分方程，最早由 Kirchhoff[1] 提出，用于描述弦或膜振

收稿日期：2024-11-23.
第一作者简介：陈文婧(1999—)，女，汉族，硕士研究生，从事非线性分析的研究，E-mail：643697649@qq.com. **通信作者简介**：李永祥(1963—)，男，汉族，博士，教授，从事非线性分析的研究，E-mail：liyx@nwnu.edu.cn.
基金项目：国家自然科学基金(批准号：12061062).

动的平衡状态，在非牛顿力学和弹性理论等数学物理问题中应用广泛[2-4]. 这类方程由于含有非局部项$\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$，使得其解不能逐点验证，求解有一定困难. 因此，研究 Kirchhoff 方程解的存在性有一定的理论意义和应用价值.

近年来，关于低维$\mathbb{R}^N(1\leqslant N\leqslant 3)$中有界区域$\Omega$上非线性项不含未知函数梯度项的 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)\Delta u = f(x,u), \quad x\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases} \tag{2}$$

解的存在性与多重性研究备受关注[5-15]. 方程(2)具有变分结构，上述研究应用变分方法和临界点理论，在非线性项$f(x,u)$关于u次临界及临界增长的情形下获得了其解及正解的存在性和多重性结果. 最近，文献[16]对$\Omega\subset\mathbb{R}^4$及临界增长的情形，也应用变分方法获得了方程解的存在性结果. 但对更高维空间的情形，由于非局部项导致的困难，尚未见文献报道相关的存在性结果. 而对非线性中含未知函数梯度项的更一般的 Kirchhoff 方程，由于其没有变分结构，通常研究方程(2)的变分方法与临界点理论不再适用，目前研究报道较少.

本文不限制空间$\mathbb{R}^N$的维数，研究$\mathbb{R}^N$中环形区域$\Omega=\{x\in\mathbb{R}^N \mid r_1<|x|<r_2\}(0<r_1<r_2<+\infty)$上非线性项中含梯度项的 Kirchhoff 方程(1)径向对称解的存在性. 由于方程(1)没有变分结构，因此本文用全连续算子的 Leray-Schauder 不动点定理研究该问题. 在非线性项$f(r,\xi,\eta)$满足一些易验证的不等式条件下，获得了方程(1)径向对称解的存在性结果.

为叙述方便，引入常数

$$b_0=\frac{3r_1^{2(N-1)}}{r_2^{N-1}(r_2-r_1)^3}\,\frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}b. \tag{3}$$

假设条件如下：

(H_1) 存在常数$0\leqslant\alpha<b_0$，$\beta\geqslant 0$，$\gamma>0$，使得

$$f(r,\xi,\eta)\xi\leqslant\alpha\xi^4+\beta\eta^2+\gamma, \qquad (r,\xi,\eta)\in[r_1,r_2]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+;$$

(H_2) 对$\forall M>0$，存在连续增函数G_M：$\mathbb{R}^+\to(0,+\infty)$，满足

$$\int_0^{+\infty}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{G_M(\rho)}=+\infty, \tag{4}$$

使得

$$|f(r,\xi,\eta)|\leqslant G_M(\eta), \qquad (r,\xi,\eta)\in[r_1,r_2]\times[-M,M]\times\mathbb{R}^+;$$

(H_3) 存在常数$0\leqslant\alpha<b_0$及$\gamma>0$，使得

$$f(r,\xi)\xi\leqslant\alpha\xi^4+\gamma, \qquad (r,\xi)\in[r_1,r_2]\times\mathbb{R}. \tag{5}$$

假设条件(H_1)是一个单边增长条件，其限制$f(r,\xi,\eta)$在正向关于ξ至多3次增长，而不限制负向的增长，例如

$$f(r,\xi,\eta)=\frac{b_0}{2}\xi^3-3\xi^{2n+1}-2\xi^3\eta^2+1, \tag{6}$$

满足条件(H_1)，在负向的可$(2n+1)$次增长，其中$n\in\mathbb{N}$. 条件(H_2)是$f(r,\xi,\eta)$关于η的 Nagumo 型增长条件，其限制$f(r,\xi,\eta)$关于η的至多2次增长. 其中，G_M可由下式确定：

$$G_M(\rho)=\max\{|f(r,\xi,\eta)|:(r,\xi,\eta)\in[r_1,r_2]\times[-M,M]\times[0,\rho]\}+1, \qquad \rho\geqslant 0. \tag{7}$$

按式(7)，易验证式(6)定义的$f(r,\xi,\eta)$也满足条件(H_2). 因此，不等式条件(H_1)和(H_2)易验证.

1 预备知识

若$u=u(|x|)$为方程(1)的径向对称解，令$r=|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_N^2}$，则

$$|\nabla u|=\left|\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)\right|=|u'(r)|,$$

$$\Delta u=\sum_{i=1}^N\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=u''(r)+\frac{N-1}{r}u'(r)=\frac{1}{r^{N-1}}(r^{N-1}u'(r))'.$$

为计算方程中的$\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x$，做球坐标变换：

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1, \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ \quad\vdots \\ x_{N-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{N-2}\cos\theta_{N-1}, \\ x_N = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{N-2}\sin\theta_{N-1}, \end{cases}$$

其中 $r\in[r_1,r_2]$，$0\leqslant\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{N-2}\leqslant\pi$，$0\leqslant\theta_{N-1}\leqslant 2\pi$，其 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_N)}{\partial(r,\theta_1,\cdots,\theta_{N-1})} = r^{N-1}\sin^{N-2}\theta_1\cdots\sin\theta_{N-2}.$$

因此，

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x = \int_{r_1}^{r_2} r^{N-1}|u'(r)|^2\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin^{N-2}\theta_1\mathrm{d}\theta_1\cdots\int_0^\pi\sin\theta_{N-2}\mathrm{d}\theta_{N-2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_{N-1} = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}\int_{r_1}^{r_2} r^{N-1}|u'(r)|^2\mathrm{d}r.$$

取常数

$$b_1 = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}b, \tag{8}$$

则由方程(1)，$u(r)$满足常微分方程

$$\begin{cases} -\left(a+b_1\int_{r_1}^{r_2} r^{N-1}|u'(r)|^2\mathrm{d}r\right)\left(u''(r)+\frac{N-1}{r}u'(r)\right) = f(r,u(r),|u'(r)|), \\ u(r_1)=u(r_2)=0. \end{cases} \tag{9}$$

将方程(9)两边同乘 r^{N-1}，则其化为拟线性常微分方程的边值问题(BVP)：

$$\begin{cases} -\left(a+b_1\int_{r_1}^{r_2} r^{N-1}|u'(r)|^2\mathrm{d}r\right)(r^{N-1}u'(r))' = r^{N-1}f(r,u(r),|u'(r)|), \\ u(r_1)=u(r_2)=0. \end{cases} \tag{10}$$

反之，若 $u(r)$为 BVP(10)的解，则由上述计算知，$u(|x|)$为方程(1)的径向对称解. 下面通过讨论 BVP(10)，获得 Kirchhoff 方程(1)的径向对称解.

记 $I=[r_1,r_2]$，$\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$. $C(I)$表示 I 上全体连续函数按最大模范数 $\|u\|_C=\max\limits_{r\in I}|u(r)|$ 构成的 Banach 空间. 对 $n\in\mathbb{N}$，$C^n(I)$表示 I 上全体 n 阶连续可微函数按范数 $\|u\|_{C^n}=\max\{\|u\|_C,\|u'\|_C,\cdots,\|u^{(n)}\|_C\}$构成的 Banach 空间. 在 $C(I)$中，仍使用 L^p-范数 $\|u\|_p=\left(\int_{r_1}^{r_2}|u(r)|^p\mathrm{d}r\right)^{1/p}$.

设 $h\in C(I)$. 考虑线性常微分方程边值问题(LBVP)：

$$\begin{cases} -(r^{N-1}u'(r))' = r^{N-1}h(r), \quad r\in I, \\ u(r_1)=u(r_2)=0. \end{cases} \tag{11}$$

引理 1[17]　对$\forall h\in C(I)$，LBVP(11)存在唯一解 $u:=Sh\in C^2(I)$，且解算子 S：$C(I)\to C^1(I)$为线性全连续算子.

引理 2　对$\forall h\in C(I)$，LBVP(11)的解 $u=Sh$ 满足估计：

$$\|u\|_4^4 \leqslant \frac{(r_2-r_1)^3}{3}\|u'\|_2^4. \tag{12}$$

证明：对$\forall h\in C^2(I)$，设 $u=Sh\in C^2(I)$为 LBVP(11)的解. 则由方程(11)中的边界条件 $u(r_1)=0$ 及 Hölder 不等式，有

$$\|u\|_4^4 = \int_{r_1}^{r_2}|u(r)|^4\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2}\left|\int_{r_1}^{r} u'(s)\mathrm{d}s\right|^4\mathrm{d}r \leqslant$$

$$\int_{r_1}^{r_2}(r-r_1)^2\left(\int_{r_1}^{r}|u'(s)|^2\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}r\leqslant\frac{(r_2-r_1)^3}{3}\|u'\|_2^4.$$

因此式(12)成立. 证毕.

引理3(**全连续算子的 Leray-Schauder 不动点定理**)[18] 设 E 为 Banach 空间, A: $E\to E$ 为全连续映射. 若方程簇

$$u=\lambda Au,\qquad 0<\lambda\leqslant 1$$

的解集在 E 中有界, 则 A 至少有一个不动点.

设 f: $[r_1,r_2]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 连续, 考虑 BVP(10). 定义映射 F: $C^1(I)\to C(I)$ 为

$$F(u)(r):=\frac{r^{N-1}f(r,u(r),|u'(r)|)}{a+b_1\int_{r_1}^{r_2}|u'(r)|^2r^{N-1}\mathrm{d}r},\qquad r\in I,\tag{13}$$

则由 f: $I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 的连续性知, F: $C^1(I)\to C(I)$ 连续, 且把 $C^1(I)$ 中的有界集映为 $C(I)$ 的有界集. 定义 S 与 F 的复合映射 A 为

$$A=S\circ F.\tag{14}$$

由 S: $C(I)\to C^1(I)$ 的全连续性知, A: $C^1(I)\to C^1(I)$ 全连续. 由 S 和 F 的定义知, A: $C^1(I)\to C^1(I)$ 不动点为 BVP(10)的解. 本文将对 A 应用引理3证明 BVP(10)有解.

为对 A 在 $E=C^1(I)$ 中应用 Leray-Schauder 不动点定理, 对 BVP(10)建立如下结果:

引理4 设 f: $I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 连续, 满足条件(H_2). 则对 $\forall M>0$, 存在仅与 M 有关的常数 $M_1=M_1(M)>0$, 使得当 BVP(10)的解 u 满足 $\|u\|_C\leqslant M$ 时, 有 $\|u'\|_C\leqslant M_1$.

证明: 对 $\forall M>0$, 由(H_2)可知, 存在满足条件(4)的连续增函数 G_M: $\mathbb{R}^+\to(0,+\infty)$. 按条件(4), 存在常数 $M_1=M_1(M)>0$, 使得

$$\int_0^{M_1}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{G_M(\rho)}>\frac{2M}{a}\left(\frac{r_2^{N-1}}{r_1^{N-1}}\right)^2.\tag{15}$$

设 $u\in C^2(I)$ 为 BVP(10)的一个解, 满足 $\|u\|_C\leqslant M$. 下证 $\|u'\|_C\leqslant M_1$.

由 BVP(10)边界值条件, $u(r_1)=u(r_2)=0$. 因此由 Rolle 中值定理知, $\exists s_0\in(r_1,r_2)$, 使得 $u'(s_0)=0$. 反设 $\|u'\|_C\leqslant M_1$ 不成立, 则 $\exists s_1\in I$, 使得 $\|u'\|_C=|u'(s_1)|>M_1$. 显然, $s_1\neq s_0$. s_0 与 s_1 的大小关系及 $u'(s_1)$ 符号, 有以下4种情形:

1) $s_1<s_0$, $u'(s_1)>M_1$;

2) $s_1>s_0$, $u'(s_1)>M_1$;

3) $s_1<s_0$, $u'(s_1)<-M_1$;

4) $s_1>s_0$, $u'(s_1)>-M_1$.

本文仅考虑情形1), 其他3种情形类似. 令

$$\bar{r}=\sup\{r\in[s_1,s_0)\,|\,u'(r)>M_1\},\qquad \underline{r}=\inf\{r\in(\bar{r},s_0]\,|\,u'(r)=0\}.$$

则由 $u'(r)$ 的连续性及上下确界的性质知, $s_1<\bar{r}<\underline{r}\leqslant s_0$, 且

$$u'(\bar{r})=M_1,\quad u'(\underline{r})=0;\quad 0<u'(r)<M_1,\quad r\in(\bar{r},\underline{r}).\tag{16}$$

当 $r\in[\bar{r},\underline{r}]$ 时, 由方程(10)及式(16), 有

$$-(r^{N-1}u'(r))'=\frac{r^{N-1}f(r,u(r),|u'(r)|)}{a+b_1\int_{r_1}^{r_2}r^{N-1}|u'(r)|^2\mathrm{d}r}\leqslant\frac{r^{N-1}|f(r,u(r),|u'(r)|)|}{a+b_1\int_{r_1}^{r_2}r^{N-1}|u'(r)|^2\mathrm{d}r}\leqslant$$

$$\frac{r_2^{N-1}}{a}|f(r,u(r),|u'(r)|)|\leqslant\frac{r_2^{N-1}}{a}G_M(|u'(r)|)\leqslant\frac{r_2^{N-1}}{a}G_M\left(\frac{r^{N-1}u'(r)}{r_1^{N-1}}\right).$$

因此有

$$\frac{-\left(\dfrac{r^{N-1}u'(r)}{r_1^{N-1}}\right)'\left(\dfrac{r^{N-1}u'(r)}{r_1^{N-1}}\right)}{G_M\left(\dfrac{r^{N-1}u'(r)}{r_1^{N-1}}\right)}\leqslant\frac{r_2^{N-1}}{ar_1^{N-1}}\frac{r^{N-1}u'(r)}{r_1^{N-1}}\leqslant\frac{1}{a}\left(\frac{r_2^{N-1}}{r_1^{N-1}}\right)^2u'(r),\qquad r\in[\bar{r},\underline{r}].\tag{17}$$

将式(17)在$[\bar{r},\underline{r}]$上积分，并进行变量替换 $\rho=\dfrac{r^{N-1}u'(r)}{r_1^{N-1}}$，得

$$\int_0^{(\bar{r}^{N-1}/r_1^{N-1})M_1}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{G_M(\rho)}\leqslant\frac{1}{a}\left(\frac{r_2^{N-1}}{r_1^{N-1}}\right)^2\int_{\bar{r}}^{\underline{r}}u'(r)\mathrm{d}r=\frac{1}{a}\left(\frac{r_2^{N-1}}{r_1^{N-1}}\right)^2(u(\underline{r})-u(\bar{r}))\leqslant \frac{2}{a}\left(\frac{r_2^{N-1}}{r_1^{N-1}}\right)^2\|u\|_C\leqslant\frac{2M}{a}\left(\frac{r_2^{N-1}}{r_1^{N-1}}\right)^2. \tag{18}$$

因为 $M_1<\dfrac{\bar{r}^{N-1}}{r_1^{N-1}}M_1$，故由式(18)，有

$$\int_0^{M_1}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{G_M(\rho)}<\int_0^{(\bar{r}^{N-1}/r_1^{N-1})M_1}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{G_M(\rho)}\leqslant\frac{2M}{a}\left(\frac{r_2^{N-1}}{r_1^{N-1}}\right)^2. \tag{19}$$

式(19)与式(15)矛盾，因此$\|u'\|_C\leqslant M_1$. 证毕.

2　主要结果

定理 1　设 $f:[r_1,r_2]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 连续，满足条件(H_1),(H_2)，则 Kirchhoff 方程(1)至少有一个径向对称解.

证明：设 $A:C^1(I)\to C^1(I)$为式(14)定义的全连续算子，下面对 A 应用 Leray-Schauder 不动点定理证明其有不动点. 为此，考察方程簇

$$u=\lambda Au,\qquad 0<\lambda<1, \tag{20}$$

证明方程簇(20)的解集在 $C^1(I)$中有界.

设 u 为方程簇(20)中某个参数 $\lambda\in(0,1)$对应方程的解，则 $u=\lambda Au=S(\lambda F(u))$. 由 S 的定义知，u 为 $h=\lambda F(u)\in C(I)$对应的线性方程 LBVP(11)的解，因此 $u\in C^2(I)$满足方程

$$\begin{cases}-\left(a+b_1\displaystyle\int_{r_1}^{r_2}r^{N-1}|u'(r)|^2\mathrm{d}r\right)(r^{N-1}u'(r))'=\lambda r^{N-1}f(r,u(r),|u'(r)|),\\ u(r_1)=u(r_2)=0.\end{cases} \tag{21}$$

将方程(21)两边同乘以 $u(r)$，并在 I 上积分，右端应用条件(H_1)和式(12)，有

$$\begin{aligned}&-\left(a+b_1\int_{r_1}^{r_2}r^{N-1}|u'(s)|^2\mathrm{d}s\right)\int_{r_1}^{r_2}(r^{N-1}u'(r))'u(r)\mathrm{d}r=\lambda\int_{r_1}^{r_2}r^{N-1}f(r,u(r),|u'(r)|)u(r)\mathrm{d}r\leqslant\\ &\lambda\int_{r_1}^{r_2}r^{N-1}(\alpha u^4(r)+\beta|u'(r)|^2+\gamma)\mathrm{d}r\leqslant\\ &r_2^{N-1}\left(\alpha\int_{r_1}^{r_2}u^4(r)\mathrm{d}r+\beta\int_{r_1}^{r_2}|u'(r)|^2\mathrm{d}r+(r_2-r_1)\gamma\right)=\\ &r_2^{N-1}(\alpha\|u\|_4^4+\beta\|u'\|_2^2+(r_2-r_1)\gamma)\leqslant\\ &\frac{r_2^{N-1}(r_2-r_1)^3}{3}\alpha\|u'\|_2^4+r_2^{N-1}\beta\|u'\|_2^2+r_2^{N-1}(r_2-r_1)\gamma.\end{aligned} \tag{22}$$

对式(22)左端应用分部积分公式，得

$$\begin{aligned}&-\left(a+b_1\int_{r_1}^{r_2}r^{N-1}|u'(s)|^2\mathrm{d}s\right)\int_{r_1}^{r_2}(r^{N-1}u'(r))'u(r)\mathrm{d}r=\left(a+b_1\int_{r_1}^{r_2}r^{N-1}|u'(s)|^2\mathrm{d}s\right)\int_{r_1}^{r_2}r^{N-1}(u'(r))^2\mathrm{d}r\geqslant\\ &(a+b_1r_1^{N-1}\|u'\|_2^2)\cdot r_1^{N-1}\|u'\|_2^2\geqslant b_1r_1^{2(N-1)}\|u'\|_2^4,\end{aligned}$$

从而得

$$b_1r_1^{2(N-1)}\|u'\|_2^4\leqslant\frac{r_2^{N-1}(r_2-r_1)^3}{3}\alpha\|u'\|_2^4+r_2^{N-1}\beta\|u'\|_2^2+r_2^{N-1}(r_2-r_1)\gamma. \tag{23}$$

因为 $0\leqslant\alpha<b_0$，由式(3),(8)，有

$$\alpha<b_0=\frac{3r_1^{2(N-1)}}{r_2^{N-1}(r_2-r_1)^3}\,\frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}b=\frac{3r_1^{2(N-1)}}{r_2^{N-1}(r_2-r_1)^3}b_1.$$

因此，有

$$b_1r_1^{2(N-1)}>\frac{r_2^{N-1}(r_2-r_1)^3}{3}\alpha. \tag{24}$$

取正常数

$$\varepsilon_0 := \frac{1}{2}\left(b_1 r_1^{2(N-1)} - \frac{r_2^{N-1}(r_2-r_1)^3}{3}\alpha\right), \tag{25}$$

对式(23)右端第二项 $r_2^{N-1}\beta\|u'\|_2^2$，取 $p=\sqrt{\varepsilon_0}\|u'\|_2^2$，$q=\dfrac{r_2^{N-1}\beta}{2\sqrt{\varepsilon_0}}$，应用平方不等式 $2pq\leqslant p^2+q^2$，得

$$r_2^{N-1}\beta\|u'\|_2^2 = 2pq \leqslant \varepsilon_0\|u'\|_2^4 + \frac{r_2^{2(N-1)}\beta^2}{4\varepsilon_0}. \tag{26}$$

由不等式(23)，有

$$2\varepsilon_0\|u'\|_2^4 \leqslant \varepsilon_0\|u'\|_2^4 + \frac{r_2^{2(N-1)}\beta^2}{4\varepsilon_0} + r_2^{N-1}(r_2-r_1)\gamma,$$

从而有

$$\|u'\|_2 \leqslant \left(\frac{r_2^{2(N-1)}\beta^2 + 4\varepsilon_0 r_2^{N-1}(r_2-r_1)\gamma}{4\varepsilon_0^2}\right)^{1/4} := M_0. \tag{27}$$

对 $\forall r\in I$，由式(27)及 Hölder 不等式，有

$$|u(r)| = |u(r)-u(r_1)| = \left|\int_{r_1}^{r} u'(s)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_{r_1}^{r_2}|u'(s)|\mathrm{d}s \leqslant \sqrt{r_2-r_1}\,\|u'\|_2 \leqslant \sqrt{r_2-r_1}\,M_0.$$

因此，

$$\|u\|_C \leqslant \sqrt{r_2-r_1}\,M_0 := M. \tag{28}$$

对方程(21)，因为 $|\lambda f(r,\xi,\eta)|\leqslant|f(r,\xi,\eta)|\leqslant G_M(\eta)$，$(r,\xi,\eta)\in[r_1,r_2]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$，故其非线性项满足与 λ 无关的 Nagumo 型条件(H_2)．因此，由引理4及式(28)知，存在仅与 M 有关的常数 $M_1>0$，使得 $\|u'\|_C\leqslant M_1$．从而

$$\|u\|_{C^1} = \max\{\|u\|_C, \|u'\|_C\} \leqslant \max\{M, M_1\} := M_2. \tag{29}$$

即方程簇(20)的解集在 $C^1(I)$ 中有界．由 Leray-Schauder 不动点定理知，A 在 $C^1(I)$ 中有不动点 u_0，该不动点为 BVP(10)的解．从而 $u_0(|x|)$ 为 Kirchhoff 方程(1)的径向对称解．证毕．

将定理1应用于非线性项中不含梯度项的 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u = f(|x|,u), & x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0, \end{cases} \tag{30}$$

此时，由式(6)，$G_M(\rho)$ 恒为正常数，故条件(H_2)自然成立．因此由定理1，有：

定理2 设 $f:[r_1,r_2]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续，满足条件(H_3)，则 Kirchhoff 方程(30)至少有一个径向对称解．

由于条件(H_3)允许 $f(r,\xi)$ 关于 ξ 在负向任意次增长，又因为区域 Ω 所在的空间 $\mathbb{R}^N$ 可以是任意维的，因此定理2的存在性结果不能从文献[5-16]中获得，是一个新的存在性结果．

例1 考虑 $\mathbb{R}^5$ 中环形区域 $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^5\,|\,1<|x|<2\}$ 上的 Kirchhoff 型椭圆边值问题：

$$\begin{cases} -\left(1+2\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u = 8u^3-5u^7-3u|\nabla u|^2+2|x|^2, & x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0. \end{cases} \tag{31}$$

对应于方程(1)，相应的非线性项为

$$f(r,\xi,\eta) = 8\xi^3-5\xi^7-3\xi\eta^2+2r^2, \qquad (r,\xi,\eta)\in[1,2]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+, \tag{32}$$

而式(3)确定的常数

$$b_0 = \frac{3r_1^{2(N-1)}}{r_2^{N-1}(r_2-r_1)^3}\,\frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}b = \frac{3}{2^4}\,\frac{2\pi^{5/2}}{\Gamma(5/2)}\cdot 2 = \pi^2.$$

对 $\forall(r,\xi,\eta)\in[1,2]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$，由式(32)有

$$f(r,\xi,\eta)\xi = 8\xi^4-5\xi^8-3\xi^2\eta^2+2r^2\xi \leqslant 8\xi^4+2r^2\xi \leqslant 8\xi^4+r^4+\xi^2 \leqslant 9\xi^4+16. \tag{33}$$

因为 $\alpha=9<b_0$，故由式(33)知，$f(r,\xi,\eta)$ 满足条件(H_1)，其中相应的 $\beta=0$，$\gamma=16$．

对 $\forall M>0$，当 $|\xi|\leqslant M$ 时，由式(32)有

$$|f(r,\xi,\eta)|\leqslant 8M^3+5M^7+3M\eta^2+8=3M\eta^2+M_0, \tag{34}$$

其中 $M_0=8M^3+5M^7+8>0$．取 $G_M(\eta)=3M\eta^2+M_0$，则其在 $\mathbb{R}^+$ 上单调递增，满足条件(4)．由式(34)知，$f(r,\xi,\eta)$满足条件(H_2)．因此，由定理 1 知，方程(31)有径向对称解．

参　考　文　献

[1] KIRCHHOFF G. Mechanik [M]. Leipzig：Teubner，1883：1-32.

[2] LIONS J L. On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics [J]. North-Holland Mathematics Studies，1978，30：284-346.

[3] AROSIO A，PANIZZI S. On the Well-Posedness of the Kirchhoff String [J]. Transactions of the American Mathematical Society，1996，348(1)：305-330.

[4] CHIPOT M，LOVAT B. Some Remarks on Nonlocal Elliptic and Parabolic Problems [J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，1997，30(7)：4619-4627.

[5] ALVES C O，CORRÊA F J S A，FIGUEÍREDO G M. On a Class of Nonlocal Elliptic Problems with Critical Growth [J]. Differential Equations & Applications，2010，2(3)：409-417.

[6] CHEN C Y，KUO Y C，WU T F. The Nehari Manifold for a Kirchhoff Type Problem Involving Sign-Changing Weight Functions [J]. Journal of Differential Equations，2011，250(4)：1876-1908.

[7] FIGUEIREDO G M，SANTOS J R，Jr. Multiplicity of Solutions for a Kirchhoff Equation with Subcritical or Critical Growth [J]. Differential Intgral Equations，2012，25(9/10)：853-868.

[8] FIGUEIREDO G M. Existence of a Positive Solution for a Kirchhoff Problem Type with Critical Growth via Truncation Argument [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2013，401(2)：706-713.

[9] NAIMEN D. Positive Solutions of Kirchhoff Type Elliptic Equations Involving a Critical Sobolev Exponent [J]. Nonlinear Differential Equations and Applications，2014，21(6)：885-914.

[10] LIANG Z P，LI F Y，SHI J P. Positive Solutions to Kirchhoff Type Equations with Nonlinearity Having Prescribed Asymptotic Behavior [J]. Annales de I'Institut Henri Poincaré C Analyse Non Linéaire，2014，31(1)：155-167.

[11] ZHONG X J，TANG C L. Multiple Positive Solutions to a Kirchhoff Type Problem Involving a Critical Nonlinearity in $\mathbb{R}^3$ [J]. Advanced Nonlinear Studies，2017，17(4)：661-676.

[12] ZENG L，TANG C L. Existence of a Positive Ground State Solution for a Kirchhoff Type Problem Involving a Critical Exponent [J]. Annales Polonici Mathematici，2016，117(2)：163-180.

[13] DUAN Y，SUN X，LIAO J F. Multiplicity of Positive Solutions for a Class of Critical Sobolev Exponent Problems Involving Kirchhoff-Type Nonlocal Term [J]. Computers and Mathematics with Applications，2018，75(12)：4427-4437.

[14] XIE W H，CHEN H B. Infinitely Many Bound State Solutions for Kirchhoff Type Problems [J]. Applied Mathematics Letters，2019，93：1-7.

[15] ZHU X X，FAN H N. The Sign-Changing Solutions for a Class of Kirchhoff-Type Problems with Critical Sobolev Exponents in Bounded Domains [J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik，2024，75(5)：162-1-162-29.

[16] LI Q，HAN Y Z，GUO B. A Critical Kirchhoff Problem with a Logarithmic Type Perturbation in High Dimension [J]. Communications in Analysis and Mechanics，2024，16(3)：578-598.

[17] LI Y X. Positive Radial Solutions for Elliptic Equations with Nonlinear Gradient Terms in an Annulus [J]. Complex Variables and Elliptic Equations，2018，63(2)：171-187.

[18] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南：山东科学技术出版社，1985：1-427.（GUO D J. Nonlinear Functional Analysis [M]. Jinan：Shandong Technology and Technology Press，1985：1-427.）

（责任编辑：赵立芹）