

基于偏微分方程的盲去模糊 超分辨率重建算法及实验

徐文达, 温馨, 毛忠旋, 邹永魁

(吉林大学 数学学院, 长春 130012)

摘要: 提出一种基于偏微分方程的图像盲去模糊超分辨率重建算法, 旨在未知模糊核的情况下, 将含噪声的低分辨率模糊图像重建为清晰的高分辨率图像。首先, 针对图像退化过程构建变分问题, 并借助变分方法推导出偏微分方程模型。其次, 结合交替方向法和数值差分方法, 通过设计时空全离散数值格式求解未知的模糊核和清晰的图像。再次, 通过一系列数值实验, 分析参数选择对图像重建效果的影响, 确定合适的参数设置。最后, 针对若干遥感图像进行实验, 实验结果证明了所给模型的有效性与可靠性。

关键词: 偏微分方程; 盲去噪去模糊; 超分辨率重建; 变分方法

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)01-0035-06

Blind Deblurring and Super-resolution Reconstruction Algorithm and Experiment Based on Partial Differential Equation

XU Wenda, WEN Xin, MAO Zhongxuan, ZOU Yongkui

(College of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, China)

Abstract: We proposed a blind image deblurring and super-resolution reconstruction algorithm based on partial differential equations (PDE). The goal was to reconstruct clear, high-resolution images from noisy, low-resolution blurred images without prior knowledge of the blur kernel. Firstly, we constructed a variational problem for the image degradation process and derived a PDE model by using variational methods. Secondly, by combining the alternating direction method and numerical difference method, we designed a spatiotemporal fully discrete numerical scheme to solve the unknown blur kernel and the clear image. Thirdly, through a series of numerical experiments, we analyzed the impact of parameter selection on image reconstruction performance and determined appropriate parameter settings. Finally, experiments were conducted on several remote sensing images, and the experimental results proved the effectiveness and reliability of the proposed model.

Keywords: partial differential equation; blind denoising and deblurring; super-resolution reconstruction; variational method

卫星采集的遥感图像通常存在退化现象, 即同时伴有噪声、模糊及低分辨率的特征。图像的退化过程可建模为

收稿日期: 2024-11-23.

第一作者简介: 徐文达(1985—), 男, 汉族, 硕士, 工程师, 从事偏微分方程数值解的研究, E-mail: xuwenda@jlu.edu.cn. **通信作者简介:** 温馨(1995—), 女, 汉族, 博士, 从事偏微分方程数值解的研究, E-mail: xinwen21@jlu.edu.cn.

基金项目: 吉林省科技厅项目(批准号: 20240301017GX).

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{Dk} * \mathbf{u} + \mathbf{n}, \quad (1)$$

其中 \mathbf{u} 表示清晰图像, \mathbf{k} 为模糊核, \mathbf{D} 为下采样算子, \mathbf{n} 为高斯白噪声, \mathbf{u}_0 为含噪声的低分辨率模糊图像. 图像盲去模糊超分辨率重建任务要求在仅已知 \mathbf{u}_0 的前提下, 恢复出 \mathbf{u} 和 \mathbf{k} , 并确保 \mathbf{u} 具有足够高的分辨率. 显然, 与非盲(即模糊核已知)的去模糊超分辨率重建任务相比, 盲去模糊超分辨率重建更具挑战性^[1-2], 也更符合实际图像处理的需求.

为最大限度减少噪声带来的偏差, 该类问题可转化为求解如下变分问题:

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{u}, \mathbf{k}} \|\mathbf{Dk} * \mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|^2. \quad (2)$$

显然, $(\mathbf{u}, \mathbf{k}) = (\mathbf{u}_0, \delta)$ 是一个平凡解, 其中 δ 为单位脉冲模糊核. 为得到合理的解, 需引入正则化项, 不同的正则化项会对图像的还原效果有不同影响, 因此人们设计了许多类型的正则化项. 例如: Rudin 等^[3]通过引入正则化项 $L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}| dx$ 建立了 TV(total variation) 模型, 其中 Ω 表示图像区域;

You 等^[4]通过引入正则化项 $L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} f(|\nabla^2 \mathbf{u}|) dx$ 建立了 YK(You-Kaveh) 模型, 其中函数 f 为非负递增函数; Lysaker 等^[5]在 YK 模型的基础上进行改进, 提出了 LLT(Lysaker-Lundervold-Tai)模型; Guidotti 等^[6]利用分数阶导数作为边缘检测器, 进一步改进了 YK 模型; Zhang 等^[7]通过加权结合 TV 模型和 YK 模型, 设计了一种自适应模型; 张雨^[8]针对被乘性 Gamma 噪声严重污染图像的去散斑问题, 提出了一个全局凸的自适应全变差模型; 温馨等^[9]进一步改进了文献[7]中的正则化项.

但上述工作大部分聚焦于去噪任务和非盲的去噪去模糊问题, 而聚焦于去噪去模糊同时进行的超分辨率重建工作目前尚未见文献报道. 因此, 本文采用加权结合的 TV 和 YK 正则化项, 构造用于盲去噪去模糊超分辨率重建的模型, 并借助变分方法推导出偏微分方程组模型, 最后构造全离散格式求解.

1 主要结果

本文采用加权结合的 TV 和 YK 正则化项, 构造如下变分问题:

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{u}, \mathbf{k}} \left(\frac{\lambda}{2} \|\mathbf{Dk} * \mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|^2 + \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}| dx dy + (1 - \mu) \int_{\Omega} |D^2 \mathbf{u}| dx dy \right), \quad (3)$$

其中 $\nabla \mathbf{u} = (u_x, u_y)^T$, $D^2 \mathbf{u} = (u_{xx}, u_{yy})^T$, $|\nabla \mathbf{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$, $|D^2 \mathbf{u}| = \sqrt{u_{xx}^2 + u_{yy}^2}$. 在变分问题(3)中, $\|\mathbf{Dk} * \mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|^2$ 称为保真项, $\lambda > 0$ 为一给定参数, 刻画了保真项相比于正则化项的权重, 且参数 $\mu \in [0, 1]$ 是衡量 $\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}| dx dy$ 和 $\int_{\Omega} |D^2 \mathbf{u}| dx dy$ 之间的权重.

下面导出可用于求解的偏微分方程. 首先考虑变量 u , 令

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}) := \lambda (\mathbf{Dk} * u - u_0)^2 + \mu \sqrt{u_x^2 + u_y^2} + (1 - \mu) \sqrt{u_{xx}^2 + u_{yy}^2}, \quad (4)$$

则变分问题(3)可转化为如下能量泛函:

$$\int_{\Omega} F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}) dx dy. \quad (5)$$

根据 Euler-Lagrange 方程, 泛函(5)取极值的必要条件为

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{yy}} \right) = 0. \quad (6)$$

化简得

$$\lambda \hat{k} * D^{-1}(\mathbf{Dk} * u - u_0) - \mu \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + (1 - \mu) \operatorname{div}^2 \left(\frac{D^2 u}{|D^2 u|} \right) = 0, \quad (7)$$

其中 $\hat{k}(x, y) = k(-x, -y)$, D^{-1} 是上采样算子, $\operatorname{div}(u, v) = u_x + v_y$, $\operatorname{div}^2(u, v) = u_{xx} + v_{yy}$. 结合梯度下降法, 可得 u 满足的偏微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda \hat{k} * D^{-1}(\mathbf{Dk} * u - u_0) + \mu \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - (1 - \mu) \operatorname{div}^2 \left(\frac{D^2 u}{|D^2 u|} \right). \quad (8)$$

同理, 可得 k 满足的偏微分方程为

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\lambda \hat{u} * D^{-1}(Dk * u - u_0), \quad (9)$$

其中 $\hat{u}(x, y) = u(-x, -y)$, 根据模糊核的特征, 一般要求

$$\int_{\Omega} k(x, y) dx dy = 1.$$

方程(8)和方程(9)即为本文构建的用于图像盲去噪去模糊和超分重建的模型.

为能应用于计算机程序, 下面对方程(8)和方程(9)进行时间-空间全离散, 在使用 Rothe 方法^[10]对时间进行离散的同时, 用有限差分法对空间进行离散. 令

$$\mathcal{T}_t := \{0, \eta, 2\eta, \dots\}$$

为时间剖分,

$$\mathcal{T}_{\Omega} := \{h, 2h, \dots, Nh\} \times \{h, 2h, \dots, Nh\}$$

为空间剖分, 并将 $u(n\eta, ih, jh)$ 和 $k(n\eta, ih, jh)$ 的近似值记为 $u_{i,j}^n$ 和 $k_{i,j}^n$.

以 u 为例, 定义其关于时间的差商为

$$\delta u_{i,j}^n = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\eta}, \quad (10)$$

关于 x 和 y 的向前和向后差商分别为

$$\begin{aligned} \nabla_x^+ u_{i,j}^n &= \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{h}, \\ \nabla_x^- u_{i,j}^n &= \frac{u_{i-1,j}^n - u_{i,j}^n}{h}, \\ \nabla_y^+ u_{i,j}^n &= \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{h}, \\ \nabla_y^- u_{i,j}^n &= \frac{u_{i,j-1}^n - u_{i,j}^n}{h}, \end{aligned} \quad (11)$$

二阶差商为

$$\begin{aligned} \nabla_x^2 u_{i,j}^n &= \frac{\nabla_x^+ u_{i,j}^n - \nabla_x^- u_{i,j}^n}{2}, \\ \nabla_y^2 u_{i,j}^n &= \frac{\nabla_y^+ u_{i,j}^n - \nabla_y^- u_{i,j}^n}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

从而盲去噪去模糊超分重建模型(8)和(9)的全离散格式为

$$\begin{aligned} \delta u_{i,j}^{n+1} &= -\lambda \hat{k} * D^{-1}(Dk * u_{i,j}^n - u_0) + \\ &\mu \left[\nabla_x^- \left(\frac{\nabla_x^+ u_{i,j}^n}{\sqrt{(\nabla_x^+ u_{i,j}^n)^2 + (\nabla_y^+ u_{i,j}^n)^2}} \right) + \nabla_y^- \left(\frac{\nabla_y^+ u_{i,j}^n}{\sqrt{(\nabla_x^+ u_{i,j}^n)^2 + (\nabla_y^+ u_{i,j}^n)^2}} \right) \right] - \\ &(1 - \mu) \left[\nabla_x^2 \left(\frac{\nabla_x^2 u_{i,j}^n}{\sqrt{(\nabla_x^2 u_{i,j}^n)^2 + (\nabla_y^2 u_{i,j}^n)^2}} \right) + \nabla_y^2 \left(\frac{\nabla_y^2 u_{i,j}^n}{\sqrt{(\nabla_x^2 u_{i,j}^n)^2 + (\nabla_y^2 u_{i,j}^n)^2}} \right) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\delta k_{i,j}^{n+1} = -\lambda \hat{u}_{i,j}^n * D^{-1}(Du_{i,j}^n * k_{i,j}^n - u_0). \quad (14)$$

基于交替方向法, 用格式(13)和(14)对初值 $(u_{i,j}^0, k_{i,j}^0)$ 开始不断迭代, 依次计算出 $u_{i,j}^1, k_{i,j}^1, u_{i,j}^2, k_{i,j}^2, \dots$, 直到 $\|u^{t+1} - u^t\|_2 + \|k^{t+1} - k^t\|_2$ 充分小或者达到最大迭代次数时结束计算. 此时, 得到稳定的数值解 $u_{i,j}^*$ 和 $k_{i,j}^*$, 则 $u_{i,j}^*$ 即为去噪去模糊后的图像.

2 数值实验

下面通过一些数值实验验证本文构造的模型及算法的有效性和稳定性. 实验在配备 2.8 GHz 频率, 8 个物理核心和 16 个逻辑核心的 Intel Core i7 CPU 及 32 GB 内存的 Python 环境下进行.

评估图像恢复质量的两个评价标准为峰值信噪比 (PSNR) 和结构相似度 (SSIM)^[11]. 峰值信噪比的单位是分贝 (dB), 对两个尺寸为 $M \times N$ 的图像 \mathbf{I} 和 \mathbf{J} , 其 PSNR 定义为

$$\text{PSNR}(\mathbf{I}, \mathbf{J}) = 10 \lg \left(\frac{MN \times \max_I^2}{\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} [\mathbf{I}(i, j) - \mathbf{J}(i, j)]^2} \right), \quad (15)$$

其中 \max_I 表示图像像素的最大值. 如果每个像素用 8 位表示, 则 $\max_I = 255$. 该指标的值域为正实数, 其值越大表示图像恢复质量越好. 结构相似度(SSIM)定义为

$$\text{SSIM}(\mathbf{I}, \mathbf{J}) = \frac{(2\mu_I\mu_J + c_1)(2\sigma_{IJ} + c_2)}{(\mu_I^2 + \mu_J^2 + c_1)(\sigma_I^2 + \sigma_J^2 + c_2)}, \quad (16)$$

其中 μ_I 和 μ_J 是图像 \mathbf{I} 和 \mathbf{J} 的均值, σ_I 和 σ_J 分别是 \mathbf{I} 和 \mathbf{J} 的标准差, σ_{IJ} 表示 \mathbf{I} 和 \mathbf{J} 的协方差. 常数 c_1 和 c_2 用于防止分母为零导致的计算错误.

实验采用如图 1 所示的 4 张遥感图像, 均是尺寸为 512×512 的灰度图像.

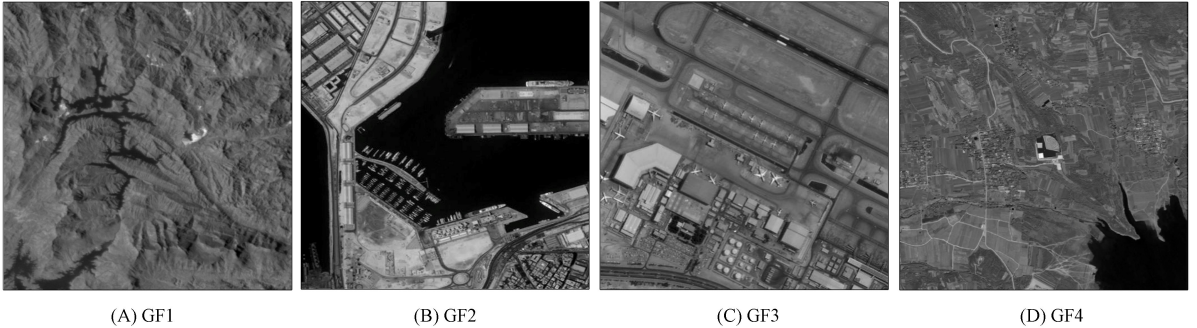


图 1 实验图像

Fig. 1 Experimental images

首先, 用一个给定的模糊核

$$\mathbf{k}_* = \begin{pmatrix} 0.024 & 0.070 & 0.029 & 0.281 & 0.032 & 0.046 & 0.029 & 0.281 & 0.024 & 0.070 \\ 0.029 & 0.281 & 0.041 & 0.853 & 0.053 & 0.410 & 0.041 & 0.853 & 0.029 & 0.281 \\ 0.032 & 0.046 & 0.053 & 0.410 & 0.160 & 0.231 & 0.053 & 0.410 & 0.032 & 0.046 \\ 0.029 & 0.281 & 0.041 & 0.853 & 0.053 & 0.410 & 0.041 & 0.853 & 0.029 & 0.281 \\ 0.024 & 0.070 & 0.029 & 0.281 & 0.032 & 0.046 & 0.029 & 0.281 & 0.024 & 0.070 \end{pmatrix}$$

对实验图像进行模糊, 然后对图像做下采样(下采样倍率为 2 倍, 即从 512×512 的图像下采样为 256×256 的图像), 下采样方法为双线性插值, 最后施加标准差为 3 的高斯白噪声. 退化图像如图 2 所示.

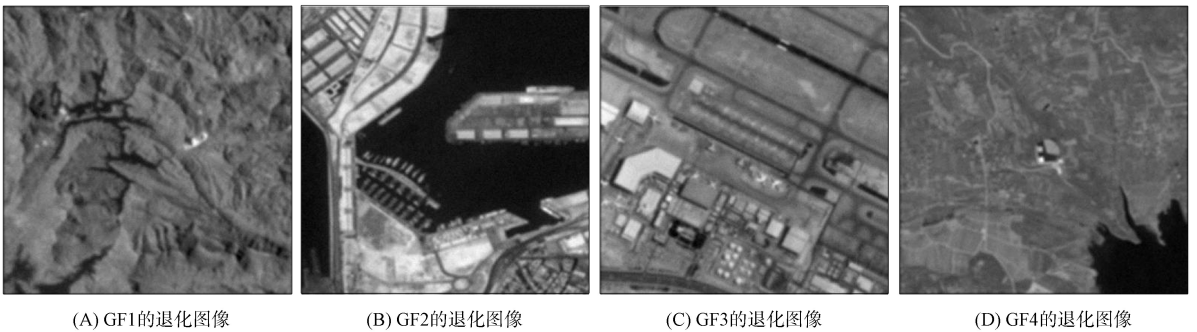


图 2 退化图像

Fig. 2 Degraded images

2.1 参数 λ 和 μ 的选择

正则化项的选择对图像处理效果有显著影响, 因此, 参数 λ 和 μ 的选取至关重要. 下面以 GF1 图像和 PSNR 指标为例进行数值实验, 展示这一特性. 图 3 为在不同 μ 设置下, 不同 λ 值对 PSNR 的影响.

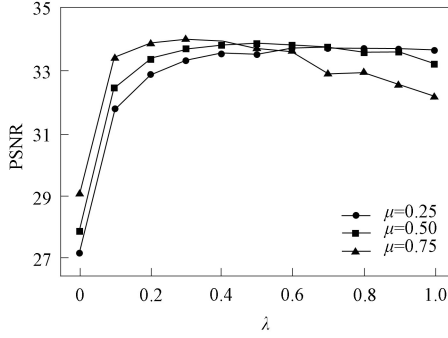


图 3 不同 λ 值对 PSNR 的影响

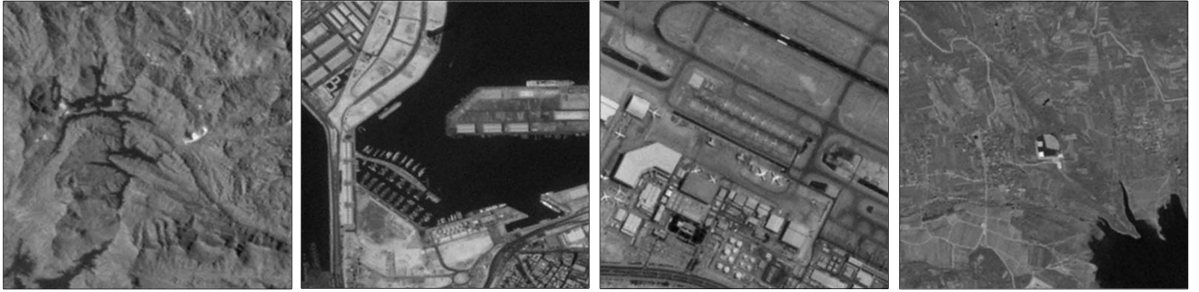
Fig. 3 Influence of different λ values on PSNR

2.2 数值结果

根据上述实验, 确定了实验参数为 λ=0.35, μ=0.75, η=0.2, 迭代次数 N=500. 初始迭代的模糊核是标准差为 1、尺寸为 5×5 的高斯模糊核

$$k_0 = \begin{pmatrix} 0.002\ 97 & 0.013\ 31 & 0.021\ 938 & 0.013\ 31 & 0.002\ 97 \\ 0.013\ 31 & 0.059\ 634 & 0.098\ 320 & 0.059\ 634 & 0.013\ 31 \\ 0.021\ 938 & 0.098\ 320 & 0.162\ 10 & 0.098\ 320 & 0.021\ 938 \\ 0.013\ 31 & 0.059\ 634 & 0.098\ 320 & 0.059\ 634 & 0.013\ 31 \\ 0.002\ 97 & 0.013\ 31 & 0.021\ 938 & 0.013\ 31 & 0.002\ 97 \end{pmatrix},$$

初始迭代的图像为退化图像的上采样. 实验结果如图 4 所示.



(A) GF1 的重建图像

(B) GF2 的重建图像

(C) GF3 的重建图像

(D) GF4 的重建图像

图 4 重建图像

Fig. 4 Reconstructed images

2.3 与非盲实验的对比

本文模型能在迭代过程中不断更新模糊核, 从而逐步逼近图像退化过程中的真实模糊核 k*. 表 1 列出了盲去噪去模糊模型和非盲去噪去模糊模型处理的效果对比实验结果.

表 1 盲去噪去模糊模型和非盲去噪去模糊模型处理的效果对比

Table 1 Effect comparison of blind denoising and deblurring model and non-blind denoising and deblurring model

方法	GF1		GF2		GF3		GF4	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
非盲核	33.604 8	0.885 7	28.299 5	0.874 7	31.542 9	0.870 0	30.686 7	0.800 4
盲核	33.957 0	0.891 2	28.236 0	0.873 6	31.838 2	0.876 0	30.771 0	0.804 2

2.4 与经典 TV 模型和 YK 模型的对比

注意到在本文模型中, 如果令 μ=1, 则模型退化为 TV 模型; 如果令 μ=0, 则模型退化为 YK 模型. 表 2 列出了本文模型与 TV 模型和 YK 模型的对比实验结果.

综上所述, 本文提出的基于偏微分方程的盲去模糊超分辨率重建算法在未知模糊核的情况下, 实现了从含噪声的低分辨率模糊图像到清晰高分辨率图像的重建, 数值实验验证了其有效性和可靠性, 为遥感图像退化问题提供了一种高效解决方案.

表 2 本文模型与 TV 模型和 YK 模型的效果对比

Table 2 Effect comparison of proposed model with TV model and YK model

方法	GF1		GF2		GF3		GF4	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
TV	31.301 2	0.807 8	28.104 7	0.775 5	30.348 0	0.785 9	29.624 3	0.728 7
YK	33.112 6	0.864 6	27.796 3	0.872 5	30.842 3	0.855 4	29.983 1	0.765 9
本文	33.957 0	0.891 2	28.236 0	0.873 6	31.838 2	0.876 0	30.771 0	0.804 2

参 考 文 献

- [1] NIMISHA T M, SINGH A K, RAJAGOPALAN A N. Blur-Invariant Deep Learning for Blind-Deblurring [C]//2017 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). Piscataway, NJ: IEEE, 2017: 4762-4770.
- [2] LAI W S, HUANG J B, HU Z, et al. A Comparative Study for Single Image Blind Deblurring [C]//2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Piscataway, NJ: IEEE, 2016: 1701-1709.
- [3] RUDIN L I, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1992, 60(1/2/3/4): 259-268.
- [4] YOU Y L, KAVEH M. Fourth-Order Partial Differential Equations for Noise Removal [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2000, 9(10): 1723-1730.
- [5] LYSAKER M, OSHER S, TAI X C. Noise Removal Using Smoothed Normals and Surface Fitting [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2004, 13(10): 1345-1357.
- [6] GUIDOTTI P, LONGO K. Two Enhanced Fourth Order Diffusion Models for Image Denoising [J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2011, 40(2): 188-198.
- [7] ZHANG X J, YE W Z. An Adaptive Fourth-Order Partial Differential Equation for Image Denoising [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2017, 74(10): 2529-2545.
- [8] 张雨. 基于偏微分方程正则化的图像复原模型研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2023. (ZHANG Y. Research on Image Restoration Models Based on Partial Differential Equation Regularization [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2023.)
- [9] 温馨, 李峰, 隋鹏, 等. 一类基于偏微分方程的遥感图像盲去噪去模糊算法 [J]. *数值计算与计算机应用*, 2024, 45(3): 288-300. (WEN X, LI F, SUI P, et al. Blind Denoising and Deblurring Algorithm for Remote Sensing Images Based on Partial Differential Equations [J]. *Journal on Numerical Methods and Computer Applications*, 2024, 45(3): 288-300.)
- [10] KAČUR J. Method of Rothe in Evolution Equations [M]//VOSMANSKÝ J, ZLÁMAL M. *Equadiff6. Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1192. Berlin: Springer, 1986: 23-33.
- [11] SETIADI D I M. PSNR vs SSIM: Imperceptibility Quality Assessment for Image Steganography [J]. *Multimedia Tools and Applications*, 2021, 80: 8423-8444.

(责任编辑: 李 琦)