doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024465

Banach空间上拟幂零算子的幂集

胡朝龙，梁定浩，纪友清
(吉林大学 数学学院，长春 130012)

摘要：令 T 是无穷维复 Banach 空间 X 上的拟幂零算子，且 $x\in X\setminus\{0\}$. 定义

$$k_x=\limsup_{\lambda\to 0}\frac{\ln\|(\lambda-T)^{-1}x\|}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\|}.$$

令 $\Lambda(T)=\{k_x: x\neq 0\}$，称为 T 的幂集. 证明 $\Lambda(T)$ 是右闭的，即对 $\Lambda(T)$ 的每个非空有界子集 σ 有 $\sup\sigma\in\Lambda(T)$. 特别地，证明对任意无穷维复 Banach 空间 X，存在 X 上的拟幂零算子 T，使得 $\Lambda(T)=[0,1]$.

关键词：拟幂零算子；幂集；右闭性；Schauder 基序列
中图分类号：O177.7 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2025)01-0015-09

Power Set of Quasinilpotent Operator on Banach Space

HU Chaolong, LIANG Dinghao, JI Youqing
(*College of Mathematics, Jilin University, Changchun* 130012, *China*)

Abstract: Let T be a quasinilpotent operator on an infinite dimensional complex Banach space X and $x\in X\setminus\{0\}$. Define

$$k_x=\limsup_{\lambda\to 0}\frac{\ln\|(\lambda-T)^{-1}x\|}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\|}.$$

Let $\Lambda(T)=\{k_x: x\neq 0\}$, and call it the power set of T. We prove that $\Lambda(T)$ is right closed, that is, $\sup\sigma\in\Lambda(T)$ for each nonempty bounded subset σ of $\Lambda(T)$. In particular, we prove that for any infinite dimensional complex Banach space X, there exists a quasinilpotent operator T on X such that $\Lambda(T)=[0,1]$.

Keywords: quasinilpotent operator; power set; right closed; Schauder basis sequence

0 引 言

设 X 是无穷维复 Banach 空间，$\mathscr{L}(X)$ 是 X 上有界线性算子全体. 对 $T\in\mathscr{L}(X)$，记 $\sigma(T)$ 为 T 的谱. 若 $\sigma(T)=\{0\}$，则称 T 是拟幂零算子. 对 X 的子空间 M，若 $T(M)\subset M$，则 M 称为 T 的不变子空间. 不变子空间问题是算子理论中的一个基本问题，即考虑是否每个 $T\in\mathscr{L}(X)$ 都有非平凡的(异于 0 和 X 者)不变子空间. Read[1] 在 l^1 上构造了一个有界线性算子，它没有非平凡的不变子空间. 但对 X 为自反空间，尤其是 Hilbert 空间，关于不变子空间问题的研究目前尚未见文献报道. 特别地，对于 Banach 空间上的拟幂零算子，它的谱虽然简单，但其不变子空间问题也极为困难. 文献[2-5]给出了不

收稿日期：2024-11-26.
第一作者简介：胡朝龙(1994—)，男，汉族，博士研究生，从事算子理论与算子代数的研究，E-mail: huzl21@mails.jlu.edu.cn.
通信作者简介：纪友清(1969—)，男，汉族，博士，教授，博士生导师，从事算子理论与算子代数的研究，E-mail: jiyq@jlu.edu.cn.
基金项目：国家自然科学基金(批准号：12271202；12031002).

变子空间问题的相关介绍. Douglas 等[6-7]给出了拟幂零算子的幂集的概念.

定义1[6-7] 假设 $T\in\mathscr{L}(X)$ 拟幂零且 $x\in X\backslash\{0\}$. 令

$$k_{(T,x)}=\limsup_{\lambda\to 0}\frac{\ln\|(\lambda-T)^{-1}x\|}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\|}.$$

若无特殊说明,记 $k_{(T,x)}$ 为 k_x. 令 $\Lambda(T)=\{k_x: x\neq 0\}$, $\Lambda(T)$ 称为 T 的幂集.

由于 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\|(\lambda-T)^{-1}\|=+\infty$, 易验证对任意 $\alpha\neq 0$ 和 $x\neq 0$, 有 $k_{(\alpha x)}=k_x$, 因此 $\Lambda(T)\subset[0,1]$.

令 $T\in\mathscr{L}(X)$, 若 $T^n=0$ 且 $T^{n-1}\neq 0$, Douglas 等[7]证明了 $\Lambda(T)=\left\{\dfrac{j}{n}: j=1,2,\cdots,n\right\}$. 设 V 是 $L^2[0,1]$上 Volterra 积分算子,其定义如下:

$$Vf(t)=\int_0^t f(s)\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1],\quad \forall f\in L^2[0,1].$$

Ji 等[8]得到了 $\Lambda(V)=(0,1]$. 可见,幂集反映了拟幂零算子的某些性质. 记 Lat T 为 T 的不变子空间格,且 $\mathscr{A}'(T)=\{A\in\mathscr{L}(X): AT=TA\}$. 若 $M\in\bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}'(T)}\mathrm{Lat}\,A$, 则 M 称为 T 的超不变子空间. Douglas 等[6-7]建立了如下拟幂零算子的幂集与超不变子空间的联系.

定理1[6-7] 令 $T\in\mathscr{L}(X)$是拟幂零算子. 对任意的 $\tau\in[0,1]$, 记 $M_\tau=\{x: k_x\leqslant\tau\}\cup\{0\}$, 则 M_τ 是 X 的线性子空间,且对任意的 $A\in\mathscr{A}'(T)$, 有 $A(M_\tau)\subset M_\tau$.

特别地,当 $\Lambda(T)$包含两个不同的点 τ 且 M_τ 是闭子空间时, T 有非平凡的超不变子空间.

基于定理1,可进一步考虑拟幂零算子的幂集性质. Hu 等[9]考虑了 $\Lambda(T)$和 $\Lambda(T')$之间的关系,并在 $l^p(1\leqslant p<\infty)$空间上刻画了一类单边加权移位算子的幂集 $\Lambda(T)=\{1\}$和 $\Lambda(T')=[0,1]$, 其中 T' 为 T 的 Banach 共轭.

设 Y 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集,如果对 Y 的每个非空有界子集 M 都有 $\sup M\in Y$, 则称 Y 是右闭的.

定理2[8] 若 T 是 Hilbert 空间上拟幂零算子,则 $\Lambda(T)$ 是右闭的.

Ji 等[8]利用幂集的右闭性,得到了若 σ 是$[0,1]$的右闭子集且包含1,则存在 Hilbert 空间上拟幂零算子 T, 使得 $\Lambda(T)=\sigma$. 文献[10-12]也给出了拟幂零算子的幂集的相关研究结果. 上述结果在 l^2 或 $l^p(1\leqslant p<\infty)$上成立. 但对于一般的无穷维复 Banach 空间是否存在拟幂零算子 T 使得 $\Lambda(T)=[0,1]$ 值得继续探讨. 进一步,若 $T\in\mathscr{L}(X)$拟幂零, $\Lambda(T)$是否仍是右闭的.

本文在一般的无穷维复 Banach 空间 X 上考虑拟幂零算子的幂集,证明拟幂零算子的幂集是右闭的. 特别地,证明对任意无穷维复 Banach 空间,存在 X 上的拟幂零算子 T, 使得 $\Lambda(T)=[0,1]$.

1 右闭性

下面证明无穷维复 Banach 空间上拟幂零算子的幂集是右闭的.

定理3 设 $T\in\mathscr{L}(X)$拟幂零,则 $\Lambda(T)$是右闭的.

证明:设$\{t_n\}_{n=1}^\infty\subset\Lambda(T)$是一列严格递增的正数序列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=t$, 下证 $t\in\Lambda(T)$. 先构造 X 上一列非零向量$\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^\infty$和 $\boldsymbol{x}$, 使得 $k_{\boldsymbol{x}_n}=t_n$, $\boldsymbol{x}=\sum\limits_{n=1}^\infty\boldsymbol{x}_n\in X$ 且 $k_{\boldsymbol{x}}=t$. 下面分四步证明.

1) 由于 $t_n\in\Lambda(T)$, 故可取一列单位向量$\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=1}^\infty$, 使得 $\forall n$, $k_{\boldsymbol{e}_n}=t_n$, 由于 $k_{2^{n+2}\boldsymbol{e}_n}=k_{\boldsymbol{e}_n}=t_n<\dfrac{t_n+t_{n+1}}{2}$ 且 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\|(\lambda-T)^{-1}\|=+\infty$, 从而可取一列严格递减序列$\{r_n\}_{n=1}^\infty\subset(0,1)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$, 使得

$$\min\{\|(\lambda-T)^{-1}\|: 0\neq|\lambda|\leqslant r_1\}>1,$$

且

$$\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{e}_n\|<\frac{1}{2^{n+2}}\|(\lambda-T)^{-1}\|^{(t_n+t_{n+1})/2},\qquad\forall|\lambda|<r_n.$$

2) 归纳定义 $\boldsymbol{x}_k$.

① 归纳部分1.

令 $s_1=\frac{1}{2}$ 且 $\boldsymbol{x}_1=s_1\boldsymbol{e}_1$，则 $k_{\boldsymbol{x}_1}=k_{\boldsymbol{e}_1}=t_1>\frac{t_1}{2}$. 因此，可取 $\lambda_1\in\mathbb{C}$ 满足 $0<|\lambda_1|<r_2$，使得

$$\|(\lambda_1-T)^{-1}\boldsymbol{x}_1\|=\max\{\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_1\|:|\lambda|=|\lambda_1|\},$$

且

$$\ln\|(\lambda_1-T)^{-1}\boldsymbol{x}_1\|\geqslant\frac{t_1}{2}\ln\|(\lambda_1-T)^{-1}\|.$$

② 归纳部分 2.

由于

$$\theta_1\doteq\min\left\{\frac{1}{2^{2+1}}\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_1\|:|\lambda|\in[|\lambda_1|,1]\right\}>0,$$

且

$$\max\{\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{e}_2\|:|\lambda|\geqslant|\lambda_1|\}<\infty,$$

因此可取 $s_2\in\left(0,\frac{1}{2^2}\right)$，使得 $\boldsymbol{x}_2=s_2\boldsymbol{e}_2$ 满足

$$\max\{\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_2\|:|\lambda|\geqslant|\lambda_1|\}\leqslant\theta_1.$$

又由于 $k_{\boldsymbol{x}_2}=k_{\boldsymbol{e}_2}=t_2>\frac{t_1+t_2}{2}$，因此可取 λ_2 满足 $0<|\lambda_2|<\min\{|\lambda_1|,r_3\}$，使得

$$\|(\lambda_2-T)^{-1}\boldsymbol{x}_2\|=\max\{\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_2\|:|\lambda|=|\lambda_2|\},$$

且

$$\ln\|(\lambda_2-T)^{-1}\boldsymbol{x}_2\|>\frac{t_1+t_2}{2}\ln\|(\lambda_2-T)^{-1}\|.$$

③ 归纳部分 3.

由于

$$\theta_2\doteq\min\left\{\frac{1}{2^{3+1}}\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_1\|,\frac{1}{2^{3+2}}\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_2\|:|\lambda|\in[|\lambda_2|,1]\right\}>0,$$

且

$$\max\{\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{e}_3\|:|\lambda|\geqslant|\lambda_2|\}<+\infty.$$

因此可取 $s_3\in\left(0,\frac{1}{2^3}\right)$，使得 $\boldsymbol{x}_3=s_3\boldsymbol{e}_3$ 满足

$$\max\{\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_3\|:|\lambda|\geqslant|\lambda_2|\}\leqslant\theta_2.$$

又由于 $k_{\boldsymbol{x}_3}=k_{\boldsymbol{e}_3}=t_3>\frac{t_2+t_3}{2}$，故可取 λ_3 满足 $0<|\lambda_3|<\min\{|\lambda_2|,r_4\}$，使得

$$\|(\lambda_3-T)^{-1}\boldsymbol{x}_3\|=\max\{\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_3\|:|\lambda|=|\lambda_3|\},$$

且

$$\ln\|(\lambda_3-T)^{-1}\boldsymbol{x}_3\|>\frac{t_2+t_3}{2}\ln\|(\lambda_3-T)^{-1}\|.$$

④ 假设对于第 $j(1\leqslant j\leqslant k)$ 步已完成，下面进行第 $(k+1)$ 步操作.

由于

$$\theta_k\doteq\min\left\{\frac{1}{2^{k+1+j}}\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_j\|:|\lambda|\in[|\lambda_k|,1],\ 1\leqslant j\leqslant k\right\}>0,$$

且

$$\max\{\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{e}_{k+1}\|:|\lambda|\geqslant|\lambda_k|\}<+\infty,$$

因此可取 $s_{k+1}\in\left(0,\frac{1}{2^{k+1}}\right)$ 使得 $\boldsymbol{x}_{k+1}=s_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1}$ 满足

$$\max\{\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_{k+1}\|:|\lambda|\geqslant|\lambda_k|\}\leqslant\theta_k.$$

又由于 $k_{\boldsymbol{x}_{k+1}}=k_{\boldsymbol{e}_{k+1}}=t_{k+1}>\frac{t_k+t_{k+1}}{2}$，因此可取 λ_{k+1} 满足 $0<|\lambda_{k+1}|<\min\{|\lambda_k|,r_{k+2}\}$，使得

$$\|(\lambda_{k+1}-T)^{-1}\boldsymbol{x}_{k+1}\|=\max\{\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_{k+1}\|:|\lambda|=|\lambda_{k+1}|\},$$

且

$$\ln\|(\lambda_{k+1}-T)^{-1}\boldsymbol{x}_{k+1}\|>\frac{t_k+t_{k+1}}{2}\ln\|(\lambda_{k+1}-T)^{-1}\|.$$

3）计算 $k_{\boldsymbol{x}}$.

注意

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|\boldsymbol{x}_k\|=\sum_{k=1}^{\infty}s_k\|\boldsymbol{e}_k\|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1.$$

令 $\boldsymbol{x}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{x}_k\in X$，则

$$\|\boldsymbol{x}\|\geqslant\|\boldsymbol{x}_1\|-\sum_{k=2}^{\infty}\|\boldsymbol{x}_k\|>\frac{1}{2}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}=0.$$

因此，$\|\boldsymbol{x}\|\in(0,1)$. 下证 $k_{\boldsymbol{x}}\leqslant t$. 给定 $\lambda\neq0$ 且 $|\lambda|<|\lambda_1|$，存在 $n=n(\lambda)$，使得 $|\lambda|\in[|\lambda_{n+1}|,|\lambda_n|)$. 注意 $\lim\limits_{\lambda\to0}n(\lambda)=+\infty$，从而有

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}\|}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\|}=&\frac{\ln\left\|\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_k\right\|}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\|}\leqslant\\
&\frac{\ln\left[\sum\limits_{k=1}^{n+1}\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_k\|+\sum\limits_{k=n+2}^{\infty}\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_k\|\right]}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\|}\leqslant\\
&\frac{\ln\left[\sum\limits_{k=1}^{n+1}\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_k\|+\sum\limits_{k=n+2}^{\infty}\theta_{k-1}\right]}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\|}\leqslant\\
&\frac{\ln\left[\sum\limits_{k=1}^{n+1}\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_k\|+\sum\limits_{k=n+2}^{\infty}\frac{1}{2^{k+n+1}}\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_{n+1}\|\right]}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\|}\leqslant\\
&\frac{\ln\left[\sum\limits_{k=1}^{n+1}s_k\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{e}_k\|+\sum\limits_{k=n+2}^{\infty}\frac{s_{n+1}}{2^{k+n+1}}\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{e}_{n+1}\|\right]}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\|}\leqslant\\
&\frac{\ln\left[\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{s_k}{2^{k+2}}\|(\lambda-T)^{-1}\|^{(t_k+t_{k+1})/2}+\sum\limits_{k=n+2}^{\infty}\frac{s_{n+1}}{2^{k+n+1}}\frac{1}{2^{n+1+2}}\|(\lambda-T)^{-1}\|^{(t_{n+1}+t_{n+2})/2}\right]}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\|}\leqslant\\
&\frac{\ln\left[\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{s_k}{2^{k+2}}\|(\lambda-T)^{-1}\|^{t}+\frac{s_{n+1}}{2^{2n+2}}\frac{1}{2^{n+1+2}}\|(\lambda-T)^{-1}\|^{t}\right]}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\|}\leqslant\\
&\frac{\ln\left[\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^{k+2}}\|(\lambda-T)^{-1}\|^{t}+\frac{1}{2^{2n+2}}\frac{1}{2}\|(\lambda-T)^{-1}\|^{t}\right]}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\|}\leqslant t.
\end{aligned}$$

因此，$k_{\boldsymbol{x}}=\lim\limits_{\lambda\to0}\sup\dfrac{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}\|}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\|}\leqslant t$.

4）下证 $k_{\boldsymbol{x}}=t$.

由于

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\boldsymbol{x}\|}{\ln\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\|}=&\frac{\ln\left\|\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\boldsymbol{x}_k\right\|}{\ln\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\|}\geqslant\\
&\frac{\ln\left[\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\boldsymbol{x}_{n+1}\|-\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\boldsymbol{x}_k\|+\sum\limits_{k=n+2}^{\infty}\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\boldsymbol{x}_k\|\right)\right]}{\ln\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\|}\geqslant
\end{aligned}$$

$$\frac{\ln\left[\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\boldsymbol{x}_{n+1}\|-\left(\sum_{k=1}^{n}\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\boldsymbol{x}_k\|+\sum_{k=n+2}^{\infty}\theta_{k-1}\right)\right]}{\ln\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\|}\geqslant$$

$$\frac{\ln\left[\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\boldsymbol{x}_{n+1}\|-\left(\sum_{k=1}^{n}\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\boldsymbol{x}_k\|+\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{1}{2^{k+n+1}}\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\boldsymbol{x}_{n+1}\|\right)\right]}{\ln\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\|}=$$

$$\frac{\ln\left[\left(1-\frac{1}{2^{2n+2}}\right)\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\boldsymbol{x}_{n+1}\|-\sum_{k=1}^{n}s_k\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\boldsymbol{e}_k\|\right]}{\ln\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\|}\geqslant$$

$$\frac{\ln\left[\left(1-\frac{1}{2^{2n+2}}\right)\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\|^{(t_n+t_{n+1})/2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k}{2^{k+2}}\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\|^{(t_k+t_{k+1})/2}\right]}{\ln\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\|}\geqslant$$

$$\frac{\ln\left[\left(1-\frac{1}{2^{2n+2}}\right)\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\|^{(t_n+t_{n+1})/2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k+2}}\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\|^{(t_n+t_{n+1})/2}\right]}{\ln\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\|}\geqslant$$

$$\frac{t_n+t_{n+1}}{2}+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{2^{2n+2}}-\frac{1}{4}\right)}{\ln\|(\lambda_{n+1}-T)^{-1}\|},$$

因此，$k_{\boldsymbol{x}}\geqslant t$. 综上所述 $k_{\boldsymbol{x}}=t$. 证毕.

2　[0,1]是可实现的

下面证明对任意无穷维复 Banach 空间，存在 X 上的拟幂零算子 T，使得 $\Lambda(T)=[0,1]$. 为方便，先给出关于 Schauder 基和 Schauder 基序列的相关知识.

定义 2[13]　设 X 是无穷维复可分 Banach 空间，$\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$是 X 中的一列向量. 若对 $\forall\,\boldsymbol{x}\in X$，存在唯一的复数列$\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{x}$，则称$\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$是 X 中的一个 Schauder 基.

定义 3[13]　设 X 是无穷维复 Banach 空间，$\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$是 X 中的一列向量. 若$\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$是闭子空间 $\bigvee\limits_{n=0}^{\infty}\{\boldsymbol{e}_n\}$中的 Schauder 基，则称$\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$是 X 中的一个 Schauder 基序列，简称为基序列.

引理 1[13]　设 X 是无穷维复 Banach 空间，且$\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$是 X 中的一列向量，则$\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$是 X 中的基序列当且仅当存在一个大于零的常数 M，使得对所有的 $n,m\in\mathbb{N}$，$n<m$，$\{a_i\}_{i=0}^{\infty}\subset\mathbb{C}$，都有

$$\sum_{i=0}^{n}\|a_i\boldsymbol{e}_i\|\leqslant M\sum_{i=0}^{m}\|a_i\boldsymbol{e}_i\|.$$

设$\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$是 X 中的 Schauder 基. 令 $\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i\boldsymbol{e}_i\in X$，定义 $P_n(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\boldsymbol{e}_i$.

引理 2[13]　若$\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$是 X 中的 Schauder 基，则 P_n 是 X 上的有界线性算子，且 $K=\sup\limits_{n}\|P_n\|<\infty$. 特别地，$K$ 称为$\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$的基常数.

引理 3[13]　设 X 是无穷维复 Banach 空间，则存在 X 中的一列向量$\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$，使得$\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$是 X 中的基序列.

结合上述引理，下面给出本文的研究结果.

定理 4　设 X 是无穷维 Banach 空间，则存在 X 上的拟幂零算子 T，使得 $\Lambda(T)=[0,1]$.

设$\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$是 X 的基序列，且不妨设 $\|\boldsymbol{e}_n\|=1(\forall\,n)$. 记 $\mathscr{M}=\bigvee\limits_{n=0}^{\infty}\{\boldsymbol{e}_n\}$，则$\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$是 $\mathscr{M}\subset X$ 的 Schauder 基. 从而对 $\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathscr{M}$，存在$\{a_i\}_{i=0}^{\infty}\subset\mathbb{C}$，使得 $\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i\boldsymbol{e}_i$. 对 $n\geqslant 0$，令 $f_n(\boldsymbol{x})=a_n$，则易验证 f_n 是 $\mathscr{M}$上的有界线性泛函. 事实上，若令$\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$的基常数为$\frac{K}{2}$，则有 $\sup\limits_{n}\|f_n\|\leqslant K$. 由 Hahn-Banach

定理[14]，可将 f_n 保范地扩张到 X 上. 为方便，本文仍记为 f_n. 特别地，由于扩张是保范的，因此仍有 $\sup\limits_n \| f_n \| \leqslant K$.

对 $\forall \boldsymbol{x}\in X$，记 $\boldsymbol{e}_n \otimes f_{n+1}(\boldsymbol{x}) = f_{n+1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_n$. 定义

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{e}_n \otimes f_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}. \tag{1}$$

命题 1 设 T 定义如式(1)，则 $T\in \mathscr{L}(X)$且 T 拟幂零.

证明：对 $\forall \boldsymbol{x}\in X$，有 $T\boldsymbol{x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f_{n+1}(\boldsymbol{x})}{(2n+1)(2n+2)}\boldsymbol{e}_n$. 易验证 T 是 X 上的线性算子. 注意

$$\| \boldsymbol{e}_n \otimes f_{n+1} \| = \| \boldsymbol{e}_n \| \, \| f_{n+1} \| = \| f_{n+1} \| \leqslant K,$$

则

$$\| T \| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \| f_{n+1} \| \, \| \boldsymbol{e}_n \| \leqslant K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} \leqslant \frac{K\pi^2}{12}.$$

因此 $T\in \mathscr{L}(X)$. 对任意 $k\geqslant 1$，易验证

$$T^k \boldsymbol{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{n+k}(\boldsymbol{x})(2n)!}{(2n+2k)!}\boldsymbol{e}_n.$$

从而

$$\| T^k \boldsymbol{x} \| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2k)!} \| \boldsymbol{x} \| \, \| f_{n+k} \| \, \| \boldsymbol{e}_n \| \leqslant K \| \boldsymbol{x} \| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2k)!}.$$

记 $\alpha_k = K\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(2n+2k)!}$，则 $\| T^k \| \leqslant \alpha_k$. 注意对任意 $k\geqslant 1$，有

$$\alpha_{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K(2n)!}{(2n+2k+2)!} \leqslant \frac{K}{(2k+1)(2k+2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2k)!} \leqslant \frac{\alpha_k}{(2k+1)(2k+2)}.$$

因此，易验证对任意的 $k\geqslant 2$，有 $\alpha_k \leqslant \dfrac{2\alpha_1}{(2k)!}$. 从而

$$\lim_{k\to\infty} \| T^k \|^{1/k} \leqslant \lim_{k\to\infty} (\alpha_k)^{1/k} \leqslant \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2\alpha_1}{(2k)!}\right)^{1/k} = 0.$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty} \| T^k \boldsymbol{x} \|^{1/k} = 0$. 于是可得 $r(T)=0$. 从而 T 是拟幂零算子. 证毕.

命题 2 设 T 定义如式(1)，则 $1\in \Lambda(T)$.

证明：首先估计 $\| (\lambda - T)^{-1} \|$. 对 $\forall \lambda \neq 0$，有

$$\| (\lambda - T)^{-1} \| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} \right\| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} \right\| + \frac{1}{|\lambda|}.$$

对 $\left\| \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{T^k}{z^{k+1}} \right\|$，有

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\,\boldsymbol{e}_n \otimes f_{n+k}}{(2n+2k)!\,\lambda^{k+1}} \right\|.$$

由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left\| \dfrac{(2n)!\,\boldsymbol{e}_n \otimes f_{n+k}}{(2n+2k)!\,\lambda^{k+1}} \right\|$ 绝对可和，因此

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}} \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\,\boldsymbol{e}_n \otimes f_{n+k}}{(2n+2k)!\,\lambda^{k+1}} \right\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2n)!\,\boldsymbol{e}_n \otimes f_{n+k}}{(2n+2k)!\,\lambda^{k+1}} \right\| \leqslant \\ &\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2n)!\,\boldsymbol{e}_n \otimes f_{n+k}}{(2n+2k)!\,\lambda^{k+1}} \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{e}_0 \otimes f_k}{(2k)!\,\sqrt{\lambda}^{2k+2}} \right\| \leqslant \\ &\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2n)!\,\boldsymbol{e}_n \otimes f_{n+k}}{(2n+2k)!\,\lambda^{k+1}} \right\| + \frac{K}{|\lambda|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!\,\sqrt{|\lambda|}^{2k}} \leqslant \\ &\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2n)!\,\boldsymbol{e}_n \otimes f_{n+k}}{(2n+2k)!\,\lambda^{k+1}} \right\| + \frac{K}{|\lambda|} \mathrm{e}^{1/\sqrt{|\lambda|}}.\end{aligned}$$

对 $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2n)!\, \boldsymbol{e}_n \otimes f_{n+k}}{(2n+2k)!\, \lambda^{k+1}} \right\|$，有

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2n)!\, \boldsymbol{e}_n \otimes f_{n+k}}{(2n+2k)!\, \lambda^{k+1}} \right\| \leqslant K \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2k)!\, |\lambda|^{k+1}} =$$

$$\frac{K}{(\sqrt{|\lambda|}+1)|\lambda|} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{|\lambda|}+1)(2n)!}{(2n+2k)!\, |\lambda|^{k}} =$$

$$\frac{K}{(\sqrt{|\lambda|}+1)|\lambda|} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{|\lambda|}(2n)!}{(2n+2k)!\, |\lambda|^{k}} + \frac{(2n)!}{(2n+2k)!\, |\lambda|^{k}} =$$

$$\frac{K}{(\sqrt{|\lambda|}+1)|\lambda|} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2k)!\, \sqrt{|\lambda|}^{2k-1}} + \frac{(2n)!}{(2n+2k)!\, \sqrt{|\lambda|}^{2k}} =$$

$$\frac{K}{(\sqrt{|\lambda|}+1)|\lambda|} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k)!\sqrt{|\lambda|}^{2k-1}} + \frac{1}{(2k)!\sqrt{|\lambda|}^{2k}} \right) \left(\prod_{j=1}^{2n} \frac{j}{2k+j} \right) \leqslant$$

$$\frac{K}{(\sqrt{|\lambda|}+1)|\lambda|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+2)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k-1)!\sqrt{|\lambda|}^{2k-1}} + \frac{1}{(2k)!\sqrt{|\lambda|}^{2k}} \right) \leqslant$$

$$\frac{K}{(\sqrt{|\lambda|}+1)|\lambda|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k)!\, \sqrt{|\lambda|}^{k}} \leqslant \frac{K}{(\sqrt{|\lambda|}+1)|\lambda|} \mathrm{e}^{1/\sqrt{|\lambda|}}.$$

从而

$$\| (\lambda - T)^{-1} \| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} + \frac{K}{|\lambda|} \mathrm{e}^{1/\sqrt{|\lambda|}} + \frac{K}{(\sqrt{|\lambda|}+1)|\lambda|} \mathrm{e}^{1/\sqrt{|\lambda|}}. \tag{2}$$

令 $\boldsymbol{x}^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \boldsymbol{e}_n$. 易验证 $\| \boldsymbol{x}^* \| \leqslant \frac{\pi^2}{12}$ 且 $\boldsymbol{x}^* \in \mathscr{M}$. 注意对任意的 $\lambda \neq 0$，有

$$\| (\lambda - T)^{-1} \boldsymbol{x}^* \| \geqslant \frac{1}{K} | f_0((\lambda - T)^{-1} \boldsymbol{x}^*) |.$$

下面估计 $| f_0((\lambda - T)^{-1} \boldsymbol{x}^*) |$. 由于

$$f_0((\lambda - T)^{-1} \boldsymbol{x}^*) = f_0\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k \boldsymbol{x}^*}{\lambda^{k+1}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+2)!\, \lambda^{k+1}} = \frac{1}{1+\sqrt{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+\sqrt{\lambda}}{(2k+2)!\, \lambda^{k+1}} =$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k+2)!\, \lambda^{k+1}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{(2k+2)!\, \lambda^{k+1}} \right) =$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k+2)!\, (\sqrt{\lambda})^{2k+2}} + \frac{1}{(2k+2)!\, (\sqrt{\lambda})^{2k+1}} \right) =$$

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k+2)!\, (\sqrt{\lambda})^{2k+3}} + \frac{1}{(2k+2)!\, (\sqrt{\lambda})^{2k+2}} \right),$$

因此

$$| f_0((|\lambda| - T)^{-1} \boldsymbol{x}^*) | \geqslant \frac{\sqrt{|\lambda|}}{1+\sqrt{|\lambda|}} \left(\mathrm{e}^{1/\sqrt{|\lambda|}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \right). \tag{3}$$

结合式(2),(3)有

$$k_{\boldsymbol{x}^*} \geqslant \limsup_{|\lambda| \to 0} \frac{\ln \| (|\lambda| - T)^{-1} \boldsymbol{x}^* \|}{\ln \| (|\lambda| - T)^{-1} \|} \geqslant \limsup_{|\lambda| \to 0} \frac{\ln \frac{1}{K} | f_0(|\lambda| - T)^{-1} \boldsymbol{x}^* |}{\ln \| (|\lambda| - T)^{-1} \|} \geqslant$$

$$\lim_{|\lambda| \to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{|\lambda|}}{K(1+\sqrt{|\lambda|})} \left(\mathrm{e}^{1/\sqrt{|\lambda|}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \right) \right)}{\ln\left(\frac{1}{|\lambda|} + \frac{K}{|\lambda|} \mathrm{e}^{1/\sqrt{|\lambda|}} + \frac{K}{(\sqrt{|\lambda|}+1)|\lambda|} \mathrm{e}^{1/\sqrt{|\lambda|}} \right)} = 1.$$

从而 $k_{\boldsymbol{x}^*} \geqslant 1$. 由 $0 \leqslant k_{\boldsymbol{x}^*} \leqslant 1$ 可得 $k_{\boldsymbol{x}^*} = 1$，进而 $1 \in \Lambda(T)$. 证毕.

命题3 设 T 定义如式(1)，则 $\Lambda(T)=[0,1]$.

证明：对 $\forall r\in(0,1)$，令 $\boldsymbol{x}_r=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n}}{(2n+1)(2n+2)}\boldsymbol{e}_n$. 易验证 $\|\boldsymbol{x}_r\|\leqslant\frac{\pi^2}{12}$ 且 $\boldsymbol{x}_r\in\mathscr{M}$. 对 $f_0((\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r)$，有

$$f_0((\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r)=f_0\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k\boldsymbol{x}_r}{\lambda^{k+1}}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{2k+2}}{(2k+2)!\,\lambda^{k+1}}=\frac{1}{1+\sqrt{\lambda}/r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+\sqrt{\lambda}/r)r^{2k+2}}{(2k+2)!\,\lambda^{k+1}}=$$
$$\frac{1}{1+\sqrt{\lambda}/r}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r^{2k+2}}{(2k+2)!\,\lambda^{k+1}}+\frac{r^{2k+2}\sqrt{\lambda}/r}{(2k+2)!\,\lambda^{k+1}}\right)=$$
$$\frac{1}{1+\sqrt{\lambda}/r}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r^{2k+2}}{(2k+2)!\,(\sqrt{\lambda})^{2k+2}}+\frac{r^{2k+1}}{(2k+2)!\,(\sqrt{\lambda})^{2k+1}}\right)=$$
$$\frac{\sqrt{\lambda}}{r+\sqrt{\lambda}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r^{2k+3}}{(2k+2)!\,(\sqrt{\lambda})^{2k+3}}+\frac{r^{2k+2}}{(2k+2)!\,(\sqrt{\lambda})^{2k+2}}\right).$$

从而

$$|f_0((|\lambda|-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r)|\geqslant\frac{\sqrt{|\lambda|}}{r+\sqrt{|\lambda|}}\left(\mathrm{e}^{r/\sqrt{|\lambda|}}-1-\frac{r}{\sqrt{|\lambda|}}\right).\tag{4}$$

进一步，对任意的 $n\geqslant1$，有

$$|f_n((\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r)|=\left|f_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^k\boldsymbol{x}_r}{\lambda^{k+1}}\right)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2n)!\,r^{2k+2n+2}}{(2k+2n+2)!\,|\lambda|^{k+1}}\leqslant$$
$$r^{2n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2n)!\,r^{2k+2}}{(2k+2n+2)!\,|\lambda|^{k+1}}\leqslant$$
$$r^{2n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{2k+2}}{(2k+2)!\,|\lambda|^{k+1}}\leqslant r^{2n}|f_0((|\lambda|-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r)|.$$

由于 $\boldsymbol{x}_r\in\mathscr{M}$ 及 $\mathrm{Ran}\,T\subset\mathscr{M}$，显然有 $(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n\boldsymbol{x}_r}{\lambda^{n+1}}\in\mathscr{M}$，因此有

$$(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r=\sum_{n=0}^{\infty}f_n((\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r)\boldsymbol{e}_n.$$

进而对 $\forall r\in(0,1)$，有

$$\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|f_n((\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r)|\leqslant\frac{1}{1-r^2}|f_0((|\lambda|-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r)|.\tag{5}$$

注意 $\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r\|\geqslant\frac{1}{K}|f_0((\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r)|$，结合式(2)，有

$$k_{\boldsymbol{x}_r}=\limsup_{\lambda\to0}\frac{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r\|}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\|}\geqslant\limsup_{|\lambda|\to0}\frac{\ln\frac{1}{K}|f_0(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r|}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\|}\geqslant$$
$$\limsup_{|\lambda|\to0}\frac{\ln\frac{1}{K}|f_0(|\lambda|-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r|}{\ln\|(|\lambda|-T)^{-1}\|}\geqslant$$
$$\limsup_{|\lambda|\to0}\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{|\lambda|}}{K(r+\sqrt{|\lambda|})}\left(\mathrm{e}^{r/\sqrt{|\lambda|}}-1-\frac{r}{\sqrt{|\lambda|}}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{|\lambda|}+\frac{K}{|\lambda|}\mathrm{e}^{1/\sqrt{|\lambda|}}+\frac{K}{(\sqrt{|\lambda|}+1)|\lambda|}\mathrm{e}^{1/\sqrt{|\lambda|}}\right)}=r.$$

由于 $k_{\boldsymbol{x}^*}=1$，且结合式(3),(5)，有

$$k_{\boldsymbol{x}_r}=\limsup_{\lambda\to0}\frac{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r\|}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\|}=\limsup_{\lambda\to0}\frac{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r\|}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}^*\|}\frac{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}^*\|}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\|}\leqslant$$

$$\limsup_{\lambda\to 0}\frac{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r\|}{\ln\|(\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}^*\|}\leqslant\limsup_{\lambda\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{1-r^2}\left|f_0((\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}_r)\right|\right)}{\ln\frac{1}{K}\left|f_0((\lambda-T)^{-1}\boldsymbol{x}^*)\right|}\leqslant$$

$$\limsup_{|\lambda|\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{1-r^2}\frac{\sqrt{|\lambda|}}{r+\sqrt{|\lambda|}}\left(\mathrm{e}^{r/\sqrt{|\lambda|}}-1-\frac{r}{\sqrt{|\lambda|}}\right)\right)}{\ln\left(\frac{\sqrt{|\lambda|}}{K(1+\sqrt{|\lambda|})}\left(\mathrm{e}^{1/\sqrt{|\lambda|}}-1-\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\right)\right)}=r,$$

因此 $k_{x_r}=r$．又由于 $r\in(0,1)$，从而 $(0,1)\subset\Lambda(T)$．

由命题 2，有 $1\in\Lambda(T)$．进一步，易验证 $k_{e_0}=0$．从而 $0\in\Lambda(T)$．综上所述，$\Lambda(T)=[0,1]$．证毕．

下面证明定理 4．由引理 3 可知，对任意无穷维复 Banach 空间 X，存在 Schauder 基序列 $\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$．因此可在 X 中定义如式(1)所示的拟幂零算子 T．进一步，由命题 3 可得 $\Lambda(T)=[0,1]$．定理 4 证毕．

参　考　文　献

[1] READ C J. A Solution to the Invariant Subspaces Problem [J]. Bull London Math Soc, 1984, 16(4): 337-401.

[2] FOIAS C, JUNG Ⅱ B, KO E, et al. On Quasinilpotent Operators (Ⅲ) [J]. J Operator Theory, 2005, 54(2): 401-414.

[3] RADJAVI H, ROSENTHAL P. Invariant Subspaces [M]. 2nd ed. Mineola, NY: Dover Publications, Inc., 2003: 1-231.

[4] READ C J. Quasinilpotent Operators and the Invariant Subspace Problem [J]. J London Math Soc (2), 1997, 56(3): 595-606.

[5] SARASON D, PEARCY C. Invariant Subspaces [M]. Mathematical Surveys, 13. Provindence, RI: American Mathematical Society, 1974: 1-47.

[6] DOUGLAS R G, YANG R W. Hermitian Geometry on Resolvent Set [J]. Oper Theory Adv Appl, 2018, 267: 167-183.

[7] DOUGLAS R G, YANG R W. Hermitian Geometry on Resolvent Set (Ⅱ) [J]. Sci China: Math, 2021, 64(2): 385-398.

[8] JI Y Q, ZHANG Y H. On the Power Set of Quasinilpotent Operators [J]. Integral Equational Operator Theory, 2023, 95(4): 25-1-25-22.

[9] HU C L, JI Y Q. Power Set of Some Quasinilpotent Weighted Shifts on l^p [J]. Linear Algebra Appl, 2024, 686: 111-133.

[10] HE W, ZHU G L. Power Set and Invariant Subspaces of Cyclic Quasinilpotent Operators [J]. J Math Anal Appl, 2022, 508(1): 125855-1-125855-13.

[11] JI Y Q, LIU L. Power Set of Some Quasinilpotent Weighted Shifts [J]. Integral Equational Operator Theory, 2021, 93(3): 25-1-25-22.

[12] LIANG Y X, YANG R W. Quasinilpotent Operators and Non-Euclidean Metrics [J]. J Math Anal Appl, 2018, 468(2): 939-958.

[13] CAROTHERS N L. A Short Course on Banach Space Theory [M]//London Mathematical Society, Student Texts, 64. Cambridge: Cambridge University Press, 2005: 1-184.

[14] BANACH S. Theory of Linear Operations [M]//North-Holland Mathematical Library: Vol. 38. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1987: 1-233.

（责任编辑：赵立芹）