研究综述

doi: 10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024466

复对称算子及相关算子类研究进展

赵佳音[1], 朱 森[2]
(1. 长春理工大学 数学与统计学院, 长春 130022; 2. 吉林大学 数学学院, 长春 130012)

摘要: 复对称算子是指 Hilbert 空间上具有对称矩阵表示的线性算子. 综述近年来复对称算子的主要研究进展及若干公开问题, 包括特殊复对称算子、约化子空间、范数闭包问题和代数性质等.

关键词: 复对称算子; 斜对称算子; Toeplitz 算子; 截断 Toeplitz 算子; 加权移位; 部分等距; 约化子空间

中图分类号: O177.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)01-0047-13

Research Progress of Complex Symmetric Operators and Related Operator Classes

ZHAO Jiayin[1], ZHU Sen[2]
(1. *School of Mathematics and Statistics*, *Changchun University of Science and Technology*, *Changchun* 130022, *China*;
2. *College of Mathematics*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*)

Abstract: A complex symmetric operator refers to a linear operator with a symmetric matrix representation on a Hilbert space. We review the main research advances and several open problems of complex symmetric operators in recent years, involving special complex symmetric operators, reducing subspaces, the norm closure problem, and algebraic properties and so on.

Keywords: complex symmetric operator; skew symmetric operator; Toeplitz operator; truncated Toeplitz operator; weighted shift; partial isometry; reducing subspace

0 引 言

本文用 $\mathscr{H}$ 表示具有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的可分无穷维复 Hilbert 空间, 用 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 表示 $\mathscr{H}$ 上全体有界线性算子构成的代数, $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ 表示 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 的紧算子理想.

定义 1[1-2] 若映射 $C: \mathscr{H}\to\mathscr{H}$ 满足下列条件:

1) C 是共轭线性的, 即 $C(\alpha x+y)=\bar{\alpha}Cx+Cy$, $\forall\, x,y\in\mathscr{H}$, $\alpha\in\mathbb{C}$;

2) C 是双射且 $C^{-1}=C$;

3) $\langle Cx,Cy\rangle=\langle y,x\rangle$, $\forall\, x,y\in\mathscr{H}$.

则称 C 是 $\mathscr{H}$ 上的一个共轭算子.

定义 2[1-2] 设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$, 若存在 $\mathscr{H}$ 上的某个共轭算子 C, 使得 $CTC=T^*$, 则称 T 是复对称的. 若 T 关于共轭算子 C 是复对称的, 也称 T 是 C-对称的.

收稿日期: 2024-11-26.

第一作者简介: 赵佳音(1991—), 女, 汉族, 博士, 副教授, 从事算子理论与算子代数的研究, E-mail: zhaojiayin2014@163.com.
通信作者简介: 朱 森(1981—), 男, 汉族, 博士, 教授, 博士生导师, 从事算子理论与算子代数的研究, E-mail: zhusen@jlu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12171195; 12101077).

$T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$是复对称的当且仅当存在$\mathscr{H}$的正规正交基$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得$T$关于$\{e_i\}$的表示矩阵是对称的，即$\forall\, i,j\geqslant 1$，$\langle Te_i,e_j\rangle=\langle Te_j,e_i\rangle$.

复对称算子有广泛的研究背景. 在有限维情形，复对称算子包含了复对称矩阵、Toeplitz矩阵、Hankel矩阵诱导的算子，这些都是有重要应用背景的研究对象. 事实上，针对复对称矩阵的研究可以追溯到关于自守函数、射影几何、二次型、辛几何和函数论的研究工作[3-7]. 在无限维情形，Glazman[8-9]的研究结果奠定了C-对称微分算子扩张理论的基础. 目前，关于C-对称微分算子扩张的存在性研究已有很多结果[10].

Garcia等[1-2]率先对复对称算子的一般理论进行了研究，其研究工作受关于截断Toeplitz算子研究的推动. 截断Toeplitz算子是指经典Toeplitz算子在模型空间上的收缩，是算子理论领域的一个研究热点[11]. Garcia等[1]证明了这类算子都是复对称的. Garcia[12-14]研究表明，复对称算子类包含许多重要的特殊算子，例如正规算子、双正规算子及许多积分算子，建立了复对称算子与一些具体算子的联系，并找到了相关理论在数学物理中的应用[15-17]. 这些研究结果激发了人们对复对称算子的研究兴趣，推动了复对称算子理论的发展[15].

本文综述近年来复对称算子及相关算子类的主要研究进展，并提出一些感兴趣的公开问题.

1 特殊复对称算子

针对各类特殊算子的研究是算子理论的重要组成部分，也是算子理论中许多问题取得进展的突破口. 特别地，研究特殊复对称算子也是发展复对称算子理论的有效途径.

对于抽象算子类的复对称性的刻画目前已有许多有启发性的研究进展. 例如：Garcia等[18]完全刻画了复对称的部分等距. 若$\forall\, x\in(\mathrm{Ker}\ T)^{\perp}$，$\|Tx\|=\|x\|$，则称算子$T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$是一个部分等距，其中$\mathrm{Ker}\ T=\{x\in\mathscr{H}\colon Tx=0\}$.

定理1[18] 部分等距算子T是复对称的当且仅当T在其初始空间$(\mathrm{Ker}\ T)^{\perp}$上的收缩是复对称的.

作为推论，易见维数小于等于3的Hilbert空间上的任何部分等距都是复对称的.

文献[19]完全刻画了复对称的加权移位算子. 若存在$\mathscr{H}$的正规正交基$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$及复数$\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得$Te_k=\alpha_k e_{k+1}(k=1,2,\cdots)$，则称算子$T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$是一个(单侧)加权移位算子. 此时$\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$称为$T$的权序列. 类似可定义双侧加权移位算子. 具有对称权的截断加权移位算子是指有限维空间上具有如下表示矩阵的算子：

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & a_n \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中$|a_i|=|a_{n-i+1}|$，$i=1,2,\cdots,n$. 易验证具有上述表示矩阵的算子都是复对称的.

定理2[19] 单侧加权移位算子T是复对称的当且仅当T可表示为可数个具有对称权的截断加权移位的直和.

上述结果对研究一般复对称的约化结构提供了研究思路，启发人们寻找构成复对称算子的基本"模块"，目前已取得了较大研究进展. 文献[19]还刻画了复对称的双侧加权移位算子. 为方便，本文仅介绍一个特殊情况下的结果.

定理3[19] 以$\{w_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$为权的单射双侧加权移位T是复对称的当且仅当存在$m\in\mathbb{Z}$，使得$|w_i|=|w_{m-i}|$，$\forall\, i\in\mathbb{Z}$.

下面介绍Toeplitz算子和截断Toeplitz算子. Toeplitz算子是一类具有重要应用背景的特殊算子，其诱导的截断Toeplitz算子是一类重要的复对称算子.

用$\mathbb{T}$表示单位圆周$\{z\in\mathbb{C}\colon|z|=1\}$，用$H^2$表示经典Hardy空间，它是$L^2(\mathbb{T},\mu)$的由$\{z^n\colon n=0,1,2,\cdots\}$张成的闭子空间，这里$\mu$是$\mathbb{T}$上通常的弧长测度. 令$P$为$L^2(\mathbb{T})$到$H^2$上的正交射影. 对于$\varphi\in L^{\infty}(\mathbb{T})$，$H^2$上的Toeplitz算子$T_{\varphi}$定义为$T_{\varphi}(f)=P(\varphi f)$，其中$f\in H^2$，$\varphi$称为$T_{\varphi}$的符号. 对于

内函数 θ，记 $K_\theta=H^2\ominus(\theta H^2)$，称为 θ 诱导的模型空间. T_φ 在 K_θ 上的收缩记作 A_φ^θ，称为 K_θ 上以 φ 为符号的截断 Toeplitz 算子. Garcia 等[1]证明了 K_θ 上截断 Toeplitz 算子关于如下定义的共轭算子是复对称的：

$$C_\theta:\ f\mapsto\theta\cdot\overline{zf(z)}.$$

Sarason[11]首先发起了针对截断 Toeplitz 算子的研究，并提出许多公开问题. 受 Toeplitz 算子研究的启发，截断 Toeplitz 算子的研究主要关注 A_φ^θ 的性质与其符号 φ 之间的联系[20-23]. Bessonov[22]刻画了有限秩截断 Toeplitz 算子的符号 φ. Garcia 等[24]给出了截断 Toeplitz 算子生成的 C^*-代数的一些结构和性质. Sedlock[25]给出了同一空间上两个截断 Toeplitz 算子的乘积是截断 Toeplitz 算子的充要条件. Ko 等[26]刻画了有限维空间上截断 Toeplitz 算子的正规性. Ma 等[27]刻画了紧的截断 Toeplitz 算子. Bercovici 等[28]利用算子的复对称性给出了截断 Toeplitz 算子的一个刻画.

关于截断 Toeplitz 算子的另一部分研究兴趣在于探索截断 Toeplitz 算子可否作为一般复对称算子的模型，即研究是否任意复对称算子都酉等价于某一截断 Toeplitz 算子[29-32]. 特别地，文献[31]证明了每个二阶幂零算子都酉等价于某个截断 Toeplitz 算子.

因为截断 Toeplitz 算子都是复对称的，因此对复对称 Toeplitz 算子的刻画备受关注. 文献[33]提出了刻画 Toeplitz 算子的复对称性. 由于次正规算子是复对称的当且仅当它是正规的，而解析 Toeplitz 算子都是次正规的，因此这方面的研究集中于具有非解析符号 Toeplitz 算子的研究. 文献[33]给出了形如 $z^n+\overline{az^m}$ 的三角多项式诱导的 Toeplitz 算子是复对称算子的充要条件.

命题 1[33]　若 $\phi(z)=z^n+\overline{az^m}$，其中 m,n 是正整数，则下列叙述等价：

1）T_ϕ 是复对称的；

2）$T_\phi\cong T_{\tilde\phi}$，其中 $\tilde\phi(z)=\phi(\bar z)$，$\cong$ 表示酉等价；

3）$m=n$ 且 $|a|=1$；

4）T_ϕ 是正规算子.

上述结果为复对称 Toeplitz 算子的刻画提供了新思路. 首先，考虑 Toeplitz 算子的复对称性是否与其正规性一致. 文献[34]证明了：若 $\phi\in L^\infty(\mathbb{T})$ 且存在模为 1 的常数 $|a|$，使得 $\phi(az)=\phi(\bar z)$，则 T_ϕ 是复对称的. 基于此，易构造复对称但谱不落在任何一条直线上的 Toeplitz 算子，因此必然不是正规的. 其次，对一般的符号 $\phi\in L^\infty(\mathbb{T})$，考虑命题 1 中的 1)和 2)是否等价. 文献[34]刻画了 Hardy 空间 H^2 上以两类三角多项式为符号的 Toeplitz 算子的复对称性，得到如下结果.

定理 4[34]　设 $\varphi(z)=a_2z^{2n}+a_1z^{2n-1}+b_1z^{-(2n-1)}+b_2z^{-2n}$ 或者 $\varphi(z)=a_2z^n+a_1z+b_1z^{-1}+b_2z^{-n}$. 令 $\psi(z)=\varphi\circ z^m$，其中 $m,n\in\mathbb{N}$ 且 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{C}$. 则下列叙述等价：

1）T_ψ 是复对称算子；

2）$T_\psi\cong T_{\tilde\psi}$；

3）T_ψ 或者是正规算子，或者存在 $\alpha\in\mathbb{T}$ 使得 $\psi(\alpha z)=\psi(\bar z)$.

基于上述结果，本文猜测下列猜想成立.

猜想 1　若 $\phi\in L^\infty(\mathbb{T})$，则 T_ϕ 是复对称的当且仅当 $T_\phi\cong T_{\tilde\phi}$.

由于刻画 Toeplitz 算子的复对称性非常困难，因此目前已有大量工作致力于刻画 Toeplitz 算子的特殊复对称性，即对于 H^2 上满足特定条件的共轭算子 C，刻画那些 C-对称的 Toeplitz 算子. Ko 等[35]研究了 Toeplitz 算子 T_φ 何时是 γC_λ-对称的，其中 $\gamma,\lambda\in\mathbb{T}$. 关于这方面研究的更多结果可参见文献[36-38].

复合算子是函数空间上的一类具体算子，是一类由函数复合运算诱导的算子. 若 ϕ 是开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的自同构，则映射 $f\in H^2\mapsto f\circ\phi$ 是 H^2 的一个复合算子. 其他函数空间上的复合算子可类似定义. Garcia 等[39]提出了刻画加权 Hardy 空间上复对称的复合算子，从而激发了人们对各类解析函数空间上复合算子复对称性的刻画[40-43].

2　复对称算子的约化子空间

约化子空间是算子理论的重要研究课题. 对于 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，如果 $\mathscr{H}$ 的闭子空间 $\mathscr{M}$ 满足 $T(\mathscr{M})\subset\mathscr{M}$

和 $T^*(\mathscr{M})\subset\mathscr{M}$，则 $\mathscr{M}$ 称为 T 的一个约化子空间. 如果算子 T 有非平凡的约化子空间，则称 T 是可约的；否则，称 T 是不可约的.

约化子空间是进一步理解 Hilbert 空间上算子(尤其是解析函数空间上的各类具体算子)结构的重要方法. 关于经典 Hardy 空间上解析 Toeplitz 算子约化子空间的研究目前已有很多结果[44-46]. 在 Bergman 空间上目前也得到了很多关于 Blaschke 乘积诱导的 Toeplitz 算子约化子空间的结果. 特别地，文献[47]证明了 Blaschke 乘积 ϕ 诱导的 Toeplitz 算子 T_ϕ 的极小约化子空间的个数与 Riemann 面 $\phi^{-1}\circ\phi$ 的连通分支数一致. 关于这方面研究的详细结果可参见文献[48].

复对称算子约化子空间的最早研究结果是关于加权移位算子的. 文献[19]刻画了复对称的加权移位算子，证明了复对称的单侧加权移位算子恰可表示为可数个具有对称权的截断加权移位的直和. 这些结果启发人们开始寻找组成复对称算子的最小"模块".

定义 3[33] 设 $T,A\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，若存在 $\mathscr{H}$ 上的某个共轭算子 C 使得 $A=CT^*C$，则称 A 是 T 的一个转置.

一般情况下，算子的转置不是唯一的. 但由于所有共轭算子都是酉等价的，因此易验证 T 的所有转置都是酉等价的. 无歧义的情况下，本文用 T^{T} 表示算子 T 的一个转置. 文献[33]得到了下列结果，在一般意义下刻画了复对称算子的约化结构.

定理 5[33] 任意复对称算子 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 酉等价于如下 3 种复对称算子的直和(部分直和项可能是退化的)：

1) 完全可约算子；

2) 不可约算子；

3) 形如 $A\oplus A^{\mathrm{T}}$ 的算子，其中 A 是不可约的且不是复对称算子.

定理 5 给出了 3 种构成复对称算子的基本"模块". 但完全可约算子的结构较难理解，文献[49]证明了复对称算子在近似酉等价的意义下可表示为定理 5 中 2),3)描述的复对称算子的直和.

Halmos[50]证明了一个有趣的逼近结果：可分无穷维 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的不可约算子构成 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 的一个稠密的 G_δ 集. 该结果为研究复对称算子的约化结构提供了新思路. 利用该思路，文献[51]研究复对称算子的约化子空间，得到了下列定理.

定理 6[51] 设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是复对称的，则：

1) T 是不可约复对称算子的范数极限；

2) T 近似酉等价于某个可约的复对称算子.

Voiculescu[52]的非交换 Weyl-von Neumann 定理表明，无穷维空间上的每个算子 T 都近似酉等价于某个可约算子. 定理 6 中的 2)是这一结果的复对称对应结果. 文献[53]从逼近的角度刻画了复对称算子的约化子空间，得到下列结果.

定理 7[53] 设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是复对称的，则对任意至多可数基数 $n\geqslant 1$ 及 $\varepsilon>0$，存在范数小于 ε 的紧算子 K，使得 $T+K$ 是复对称的，且恰包含 n 个极小约化子空间.

定理 7 加深了对复对称算子约化结构的理解，也启发人们沿着这一思路研究各类特殊算子(如 Toeplitz 算子、次正规算子)的约化结构.

3 复对称算子的范数闭包问题

用 $\mathscr{S}(\mathscr{H})$ 表示 $\mathscr{H}$ 上所有复对称算子构成的集合. 复对称算子的范数闭包问题是指"$\mathscr{S}(\mathscr{H})$ 的范数闭包是什么". 该问题属于算子非交换逼近[54]的研究范畴. 算子的非交换逼近致力于从逼近的思路研究算子的结构、分类、谱理论等. 在 Halmos[54]研究结果的推动下，产生了算子理论方面研究的许多深刻结果[55-56]，如 Weyl-von Neumann-Berg 定理、非交换 Weyl-von Neumann 定理、相似轨道定理等.

关于复对称算子的范数闭包问题研究，是从 Garcia 等[18]提出的下列公开问题开始的.

问题 1[18] $\mathscr{S}(\mathscr{H})$ 是否为范数闭的.

Garcia 等[18]证明了 $\mathscr{S}(\mathscr{H})$ 不是强算子拓扑闭的. 事实上，利用他们的方法可进一步证明 $\mathscr{S}(\mathscr{H})$ 的

强算子拓扑闭包是 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. 文献[57]证明了经典的 Kakutani 移位不是复对称的但却是复对称算子的范数极限，进而否定回答了问题 1. 以 $\left\{\frac{1}{\gcd\{k,2^k\}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ 为权序列的单侧加权移位称为 Kakutani 移位. Garcia 等[58]也利用加权移位构造出了不是复对称的但却是复对称算子的范数极限的算子. 这些结果表明了加权移位算子在复对称算子研究方面的重要作用.

受上述研究结果的启发，Garcia 等[59]刻画了哪些单射的加权移位算子可由复对称算子逼近，并引入了近似 Kakutani 移位. 对于以 $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为权的加权移位算子 T，若对任意 $n\geqslant 1$ 以及任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $0<|\alpha_N|<\varepsilon$，且

$$1\leqslant k\leqslant n\Rightarrow -\varepsilon<|\alpha_k|-|\alpha_{N-k}|<\varepsilon,$$

则称 T 是一个近似 Kakutani 移位. 易见 Kakutani 移位必是近似 Kakutani 移位. Garcia 等[59]证明了下列定理.

定理 8[59]　近似 Kakutani 移位是复对称算子的范数极限.

进一步，Garcia 等[59]又提出了下列猜想.

猜想 2[59]　对于单射的加权移位算子 T，若 T 是复对称算子的范数极限，则 T 是近似 Kakutani 移位.

后续研究表明，猜想 2 为解决复对称算子的范数闭包问题奠定了基础. 为回答猜想 2，文献[60]建立了复对称算子与单生成 C^*-代数的反自同构之间的联系.

若对任意复系数二元自由多项式 $p(z,w)$，有

$$\|p(T^*,T)\|=\|\tilde{p}(T,T^*)\| \tag{1}$$

成立，则称算子 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是 g-normal 的[60]，这里 $\tilde{p}(z,w)$ 是将 $p(z,w)$ 的系数求共轭得到的二元多项式. 进一步，若 T 是 C-对称的，则易验证 $\tilde{p}(T,T^*)=Cp(T^*,T)C$. 因此 T 是 g-normal 的. 事实上，易验证复对称算子的范数极限也是 g-normal 的.

引理 1[60]　算子 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是 g-normal 的当且仅当存在 $C^*(T)$ 的对合的反自同构 φ，使得 $\varphi(T)=T$.

引理 1 在复对称算子的范数闭包问题中具有重要作用. 事实上，若 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是 g-normal 的，任取共轭算子 C，则易验证 ρ: $X\mapsto C\varphi(X^*)C$ 是 $C^*(T)$ 的一个忠诚表示，且 $\rho(T)=CT^*C$. 该结果为复对称算子的研究提供了 C^* 代数的研究思路. 在此基础上，文献[60]给出下列定理，刻画了 $\overline{\mathscr{S}(\mathscr{H})}$ 中的一大类算子.

定理 9[60]　若 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 满足 $C^*(T)\bigcap\mathscr{K}(\mathscr{H})=\{0\}$，则下列叙述等价：

1) $T\in\overline{\mathscr{S}(\mathscr{H})}$；

2) $\exists A\in\mathscr{S}(\mathscr{H})$，使得 $A\cong_a T$；

3) T 是 g-normal 的.

这里 $\cong_a$ 表示近似酉等价. 若存在与 A 酉等价的一列算子 $\{A_n\}$ 收敛于 B，则称算子 $A,B\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是近似酉等价的. 在定理 8 的基础上，文献[60]肯定回答了猜想 2.

定理 10[60]　设 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是单射的单侧加权移位，则下列叙述等价：

1) $T\in\overline{\mathscr{S}(\mathscr{H})}$；

2) $\exists A\in\mathscr{S}(\mathscr{H})$，使得 $A\cong_a T$；

3) $T\cong_a T^*$；

4) T 是 g-normal 的；

5) T 是近似 Kakutani 移位.

此外，文献[60]还完全刻画了 $\overline{\mathscr{S}(\mathscr{H})}$ 中单射的双侧加权移位. 文献[49]进一步发展了[60]中的方法，在一般的意义下解决了复对称算子的范数闭包问题.

定理 11[49]　对于 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，下列叙述等价：

1) $T\in\overline{\mathscr{S}(\mathscr{H})}$；

2) $\exists R\in\mathscr{S}(\mathscr{H})$，使得 $T\cong_a R$；

3) T 近似酉等价于一个可表示为如下两种复对称算子直和的算子：不可约复对称算子和形如 $A\oplus A^{\mathrm{T}}$ 的算子，其中 A 是不可约的且不是复对称算子.

定理11表明，复对称算子在近似酉等价的意义下可表示为如下两种复对称算子的直和：不可约算子和形如 $A\oplus A^{\mathrm{T}}$ 的算子，其中 A 是不可约的且不是复对称算子.

通过研究复对称算子的范数闭包问题，加深了人们对复对称算子结构的理解．一方面，在该过程中，发现了大量新的具体复对称算子．另一方面，复对称算子概念中隐含的代数信息在该过程中被发现．这些结果为研究具有特殊表示矩阵的算子提供了新的借鉴和参考．Toeplitz 算子、Hankel 算子等都是具有特殊表示矩阵的算子．因此可尝试从这些算子类的逼近问题入手，研究其结构和分类.

4 复对称算子构成的 Jordan 代数

C^* 代数的方法和工具在复对称算子范数闭包问题研究中发挥了关键作用，从而启发人们研究复对称算子的代数性质．由于 $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ 在加法或乘法下不封闭，没有线性结构，因此可关注包含于 $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ 的一个典型 Jordan 代数.

给定 $\mathcal{H}$ 上的共轭算子 C，用 $\mathcal{S}_C$ 表示 $\mathcal{H}$ 上所有 C-对称算子构成的集合．易验证 $\mathcal{S}_C$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的弱算子拓扑闭的子空间，且 $\mathcal{S}(\mathcal{H})=\bigcup_C\mathcal{S}_C$，这里关于 $\mathcal{H}$ 上所有的共轭算子 C 求并．易证明如果 C_1,C_2 是 $\mathcal{H}$ 上的共轭算子，则存在 $\mathcal{H}$ 上的酉算子 U，使得 $U\mathcal{S}_{C_1}U^*=\mathcal{S}_{C_2}$．因此，在酉等价的意义下，$\mathcal{S}_C$ 包含了 $\mathcal{H}$ 上所有的复对称算子.

Garcia[13] 证明了 $\mathcal{S}_C$ 中的每个压缩算子都是 $\mathcal{S}_C$ 中两个酉算子的平均值．这是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中已有结果的复对称对应结果．文献[61]为 $\mathcal{S}_C$ 建立了 Courant 极小极大原理，用于估计 $\mathcal{S}_C$ 中紧算子的奇异值．文献[62]证明了 $\mathcal{S}_C$ 是传递的，并且是2-超自反的.

上述结果主要关注 $\mathcal{S}_C$ 中单个算子的性质．事实上，$\mathcal{S}_C$ 具有丰富的代数结构，它在如下定义的 Jordan 积 $\circ$ 下封闭：

$$A\circ B=\frac{1}{2}(AB+BA),\qquad \forall A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

因此，$\mathcal{S}_C$ 在 Jordan 积下构成一个 Jordan 算子代数．$\mathcal{S}_C$ 具有重要的几何应用背景，在 JB^*-triple 的研究中具有重要作用．JB^*-triple 是一类具有良好代数、几何性质的复 Banach 空间．在 JB^*-triple 理论中，$\mathcal{S}_C$ 被称为 Hermite 型 Cartan 因子，与有界对称域的研究相关．Cartan 因子有6种类型，最早出现于 Cartan[63] 对有限维有界对称域分类的研究中，并在 JB^*-triple 的 Gelfand-Naimark 定理证明中发挥了重要作用[64].

下面介绍利用单个复对称算子理论刻画 $\mathcal{S}_C$ 代数结构的研究进展.

4.1 $\mathcal{S}_C$ 的理想与自同构

对于任何代数结构，其理想都是极其重要的．文献[65]研究了 $\mathcal{S}_C$ 的理想结构．若对任意的 $A\in\mathcal{S}_C$ 和 $X\in\mathcal{J}$，恒有 $A\circ X\in\mathcal{J}$，则 $\mathcal{S}_C$ 的线性子空间 $\mathcal{J}$ 称为 $\mathcal{S}_C$ 的一个 Jordan 理想．文献[65]完全刻画了 $\mathcal{S}_C$ 的 Jordan 理想，得到如下结果.

定理12[65] $\mathcal{S}_C$ 的非空子集 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{S}_C$ 的 Jordan 理想当且仅当存在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的结合理想 $\mathcal{I}$，使得 $\mathcal{J}=\mathcal{I}\cap\mathcal{S}_C$.

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的结合理想是指 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 在通常算子乘法下的双边理想(未必是范数闭的)，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的 Jordan 理想与其结合理想一致[66]．因此，定理12表明 $\mathcal{S}_C$ 和 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 具有相同的 Jordan 理想结构．此外，由于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的非平凡理想皆由紧算子构成，说明 $\mathcal{S}_C$ 也如此，而且 $\mathcal{S}_C$ 中的全体紧算子构成其唯一的非平凡闭理想．$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的许多结果都与其紧算子理想有关，如 BDF 定理、Weyl-von Neumann 定理等.

将 $\mathcal{H}$ 上全体 Schatten-p 类算子构成的集合记作 $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$，$1\leqslant p<\infty$．为方便，将 $\mathcal{H}$ 上紧算子构成的集合也记作 $\mathcal{B}_0(\mathcal{H})$．$\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ 在 p-范数 $\|\cdot\|_p$ 下是一个 Banach 空间，而且 $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{B}_q(\mathcal{H})$ 的对偶，其中 $1<p,q<\infty$ 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$．文献[65]建立了 $\mathcal{S}_{C,p}$ $(p\in\{0\}\cup[1,\infty))$ 之间的对偶关系.

定理 13[65]　1）$(\mathscr{S}_{C,1},\|\cdot\|_1)$等距同构于$(\mathscr{S}_{C,0},\|\cdot\|)$的对偶空间；

2）$\mathscr{S}_C$ 等距同构于 $(\mathscr{S}_{C,1},\|\cdot\|_1)$的对偶空间；

3）$(\mathscr{S}_{C,q},\|\cdot\|_q)$等距同构于$(\mathscr{S}_{C,p},\|\cdot\|_p)$ 的对偶空间，其中 $1<p,q<\infty$ 且 $1/p+1/q=1$.

若 φ：$\mathscr{S}_C\to\mathscr{S}_C$ 是线性双射，并且

$$\varphi(X^*)=\varphi(X)^*,\quad \varphi(X\circ Y)=\varphi(X)\circ\varphi(Y),\quad \forall X,Y\in\mathscr{S}_C,$$

则 φ 称为 $\mathscr{S}_C$ 的一个 Jordan 自同构. 文献[65]完全刻画了 $\mathscr{S}_C$ 的 Jordan 自同构，得到如下结果.

定理 14[65]　映射 φ：$\mathscr{S}_C\to\mathscr{S}_C$ 是 $\mathscr{S}_C$ 的 Jordan 自同构当且仅当存在一个与 C 交换的酉算子 $V\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，使得 $\varphi(X)=VXV^*$，$\forall X\in\mathscr{S}_C$.

定理 14 表明，$\mathscr{S}_C$ 的 Jordan 自同构由 $\mathscr{H}$ 上与 C 交换的那些酉算子实现. $\mathscr{B}(\mathscr{H})$的自同构恰为酉变换，平行于上述结果.

$\mathscr{S}_C$ 的 Jordan 自同构是保持了 $\mathscr{S}_C$ 的代数结构的线性双射. Kadison[67] 刻画了 C^* 代数之间的满线性等距. 作为推论，易见 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$上的满线性等距形如 $X\in\mathscr{B}(\mathscr{H})\mapsto UXV$，其中 U,V 是 $\mathscr{H}$上任意给定的酉算子.

对于酉算子 $V\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$及模为 1 的复数 β，可构造 $\mathscr{S}_C$ 上两个实线性的满等距：

$$X\mapsto\beta VX(CV^*C),\tag{2}$$

$$X\mapsto\beta VX^*(CV^*C).\tag{3}$$

问题 2　$\mathscr{S}_C$ 上实线性的满等距是否必然形如式(2)或式(3).

4.2　$\mathscr{S}_C$ 中的对角化问题

经典的 Weyl-von Neumann 定理表明，复可分 Hilbert 空间上的自伴算子可经任意小的紧扰动成为对角自伴算子. 若可取 T 的特征向量构成 $\mathscr{H}$ 的正规正交基，则算子 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$称为对角的. Kuroda[68] 证明了小紧扰动可以加强为小 Schatten p-范数扰动，其中 $p\in(1,\infty)$.

文献[69]建立了 $\mathscr{S}_C$ 中的 Weyl-von Neumann 定理.

定理 15[69]　设 $T\in\mathscr{S}_C$ 是自伴算子. 若 $p\in(1,\infty)$，$\varepsilon>0$，则存在对角、自伴算子 $D\in\mathscr{S}_C$，使得 $T-D\in\mathscr{B}_p(\mathscr{H})$且 $\|T-D\|_p<\varepsilon$.

Berg[70] 和 Sikonia[71] 分别证明了每个正规算子可经小紧扰动成为对角算子. 该结果称为 Weyl-von Neumann-Berg 定理. 应用文献[72]的一个技巧，文献[69]证明了 $\mathscr{S}_C$ 中的交换正规算子组可以联合对角化. 作为定理 15 和文献[51]中定理 2.1 的应用，可证明下列不可约逼近定理.

推论 1　对任意 $T\in\mathscr{S}_C$，$p\in(1,\infty)$及 $\varepsilon>0$，总存在紧算子 $K\in\mathscr{S}_C$ 满足 $\|K\|_p<\varepsilon$，且 $T+K$ 是不可约的.

Voiculescu[73] 考虑了交换自伴算子的联合对角化，并证明了如果 $T_1,\cdots,T_n(n\geqslant 2)$是交换自伴算子且 $\varepsilon>0$，则存在 n 个两两交换的自伴对角算子 $D_1,\cdots,D_n$，使得 $\|T_i-D_i\|_n<\varepsilon(i=1,2,\cdots,n)$. 因此，自然有如下问题.

问题 3　若 n 是不小于 2 的自然数，$T_1,\cdots,T_n$ 是 $\mathscr{S}_C$ 中两两交换的自伴算子，$\varepsilon>0$，则是否必存在 n 个两两交换的自伴对角算子 $D_1,\cdots,D_n\in\mathscr{S}_C$，使得 $\|T_i-D_i\|_n<\varepsilon$，$i=1,2,\cdots,n$.

应用定理 15，文献[69]证明了 $\mathscr{S}_C$ 中的任一算子可经小扰动成为 $\mathscr{S}_C$ 中的不可约算子. 注意到应用非交换 Weyl-von Neumann 定理可以证明 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$中的可约算子构成其稠密子集，再注意到定理 7，自然存在如下问题.

问题 4　$\mathscr{S}_C$ 中的可约算子是否构成其稠密子集. 更一般地，对任意至多可数基数 n，$\mathscr{S}_C$ 中恰有 n 个极小约化子空间的算子是否构成其稠密子集.

回答问题 4 或许需要建立 $\mathscr{S}_C$ 框架下的非交换 Weyl-von Neumann 定理.

4.3　值域包含定理

下面介绍 $\mathscr{S}_C$ 中算子的值域包含问题，即对给定的 $T\in\mathscr{S}_C$，刻画哪些算子 $A\in\mathscr{S}_C$ 满足 $\mathscr{R}(A)\subseteq\mathscr{R}(T)$，这里 $\mathscr{R}(\cdot)$表示算子值域.

Douglas[74] 证明了下面的值域包含定理，完全刻画了 Hilbert 空间上算子的值域包含关系.

定理 16[74] 对于算子 $A,B\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，下列叙述等价：

1) $\mathscr{R}(A)\subseteq\mathscr{R}(B)$；

2) 存在 $\lambda\geqslant 0$，满足 $AA^*\leqslant\lambda BB^*$；

3) 存在 $X\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$，满足 $A=BX$.

定理16揭示了算子的值域包含、算子分解之间的密切联系. Embry[75]将该结果推广到Banach空间，证明了存在 $\mathscr{R}(B)$ 上的某个有界算子 X 满足 $A=XB$ 当且仅当 $\mathscr{R}(A')\subseteq\mathscr{R}(B')$，这里 A' 和 B' 分别表示 A 和 B 的Banach共轭算子.

上述结果启发人们研究建立 $\mathscr{S}_C$ 中的值域包含定理. 对于 $\mathscr{H}$ 的线性子空间 $\mathscr{M}$，记 $C_{\mathscr{M}}=\{X\in\mathscr{S}_C: \mathscr{R}(X)\subset\mathscr{M}\}$. 注意到 $\mathscr{S}_C$ 不是结合代数，考虑 $\mathscr{S}_C$ 中的二次积：$(X,Y)\mapsto XYX$，其中 $X,Y\in\mathscr{S}_C$. 对于 $T\in\mathscr{S}_C$，易验证 $T\mathscr{S}_C T:=\{TXT: X\in\mathscr{S}_C\}\subseteq C_{\mathscr{R}(T)}$. 那么相反的包含关系是否成立? 文献[69]回答了上述问题，得到如下结果.

定理 17[69] 若 $T\in\mathscr{S}_C$，则 $C_{\mathscr{R}(T)}=T\mathscr{S}_C T$ 当且仅当 $\mathscr{R}(T)$ 是闭的.

定理17表明，若 $T\in\mathscr{S}_C$ 的值域不是闭的，则 $T\mathscr{S}_C T$ 真包含于 $C_{\mathscr{R}(T)}$ 中. 但如下结果表明两者具有相同的闭包.

定理 18[69] 若 $T\in\mathscr{S}_C$，则 $\overline{C_{\mathscr{R}(T)}}=\overline{T\mathscr{S}_C T}$.

根据上述结果，每个满足 $\mathscr{R}(A)\subseteq\mathscr{R}(T)$ 的 $A\in\mathscr{S}_C$ 都是形如 TXT 的算子的范数极限，其中 $X\in\mathscr{S}_C$. 因此定理18可视为 $\mathscr{S}_C$ 中的近似值域包含定理. 进一步，对于 $T\in\mathscr{S}_C$，文献[69]证明了 $C_{\mathscr{R}(T)}$ 的弱算子拓扑闭包、强算子拓扑闭包皆为 $C_{\overline{\mathscr{R}(T)}}$.

5 复对称算子的相关算子类

复对称算子是借助共轭算子定义的一类特殊算子. 这些特殊算子是与复对称算子联系紧密，而且也可借助共轭算子定义的算子类. 下面介绍其中的两类算子，即斜对称算子和共轭正规算子.

5.1 斜对称算子

斜对称算子是指Hilbert空间上具有斜对称矩阵(即矩阵 $\boldsymbol{M}$ 满足 $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}=0$)表示的线性算子. 平行于复对称算子，斜对称算子也可借助共轭算子给出下面的等价定义.

定义 4[10] 若存在 $\mathscr{H}$ 上的共轭算子 C，使得 $CTC=-T^*$，则称算子 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是斜对称的. 若 T 关于 C 是斜对称的，也称 T 是 C-斜对称的.

显然，斜对称算子是斜对称矩阵在算子理论框架下的推广，因此有广泛的应用背景，不仅在纯粹数学领域，也包含应用数学、量子物理及工程领域. 特别地，作为复数域 $\mathbb{C}$ 上的经典有限维李代数，正交李代数 $so(n,\mathbb{C})$ 由所有 $n\times n$ 斜对称的复矩阵组成，即

$$so(n,\mathbb{C})=\{\boldsymbol{X}\in M_n(\mathbb{C}): \boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=0\},$$

其中 $M_n(\mathbb{C})$ 表示所有 $n\times n$ 复矩阵构成的集合. $so(n,\mathbb{C})$ 是正交李群

$$SO(n,\mathbb{C})=\{\boldsymbol{X}\in M_n(\mathbb{C}): \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I},\ \det\boldsymbol{X}=1\}$$

的李代数，在半单李代数分类中有重要作用.

尽管斜对称矩阵在各分支学科中具有重要作用，但目前对斜对称矩阵的研究报道较少. 文献[10,76]提出在算子理论的框架下研究斜对称算子，发展其理论并探索其应用. 近年来，人们发现斜对称算子与复对称算子存在紧密的联系. 因此这方面的研究也逐渐受到关注. 下面介绍斜对称算子的研究进展. 首先介绍特殊斜对称算子刻画方面的结果. 文献[76]完全刻画了斜对称的正规算子.

定理 19[76] 若 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是正规算子，则 T 是斜对称的当且仅当 $T|_{(\mathrm{Ker}\,T)^{\perp}}\simeq N\oplus(-N^{\mathrm{T}})$，其中 N 是某个Hilbert空间上单射的正规算子.

文献[76]还给出了斜对称正规算子的乘法算子模型. 定理19反映出斜对称算子谱的中心对称性. 事实上，可以证明对任意斜对称算子 T 及任意复数 z，$z\in\sigma(T)$ 当且仅当 $-z\in\sigma(T)$. 文献[77]刻画了谱不连通的斜对称算子的结构. 文献[78]刻画了斜对称的加权移位算子，它依赖于关于斜对称算子的一个分解定理.

定理 20[77]　任意斜对称算子 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 可表示为如下 3 种斜对称算子的直和(部分直和项可能是退化的)：

1) 完全可约的斜对称算子；

2) 不可约的斜对称算子；

3) 形如 $A\oplus(-A^{\mathrm{T}})$ 的算子，其中 A 不可约但不是斜对称的.

定理 21[78]　任意斜对称的单侧加权移位算子可表示为一列具有偶数秩和对称权的截断加权移位的直和.

人们对斜对称算子的研究兴趣也来源于它们与复对称算子之间的紧密联系. 对 $\mathscr{H}$ 上的共轭算子 C，记 $\mathscr{O}_C=\{X\in\mathscr{B}(\mathscr{H})：CXC=-X^*\}$. 易验证任意斜对称算子必酉等价于 $\mathscr{O}_C$ 中的某个算子，而且 $\bigcup_C\mathscr{O}_C$ 恰为 $\mathscr{H}$ 上全体斜对称算子构成的集合. 进一步，可以验证 $\mathscr{O}_C+\mathscr{S}_C=\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 且 $\mathscr{O}_C\cap\mathscr{S}_C=\{0\}$，即 $\mathscr{O}_C$ 和 $\mathscr{S}_C$ 互为拓扑补；而且

$$[\mathscr{S}_C,\mathscr{S}_C]:=\{XY-YX：X,Y\in\mathscr{S}_C\}\subset\mathscr{O}_C,\qquad \mathscr{O}_C\circ\mathscr{O}_C:=\{X\circ X：X,Y\in\mathscr{O}_C\}\subset\mathscr{S}_C.$$

因此，自然有如下问题.

问题 5　若 C 是 $\mathscr{H}$ 上的共轭算子，则是否必有 $[\mathscr{S}_C,\mathscr{S}_C]=\mathscr{O}_C$ 和 $\mathscr{O}_C\circ\mathscr{O}_C=\mathscr{S}_C$ 成立.

文献[79]证明了 $\mathscr{O}_C$ 和 $\mathscr{S}_C$ 是 Roberts 正交的，即

$$A\in\mathscr{O}_C,\ B\in\mathscr{S}_C\Rightarrow\|A-aB\|=\|A+aB\|,\qquad\forall a\in\mathbb{C};$$

并且建立了 $\mathscr{O}_C$ 和 $\mathscr{S}_C$ 的“零化”关系，得到下列结果.

定理 22[79]　若 C 是 $\mathscr{H}$ 上的共轭算子，则 $\mathscr{S}_C^{\perp}=\mathscr{O}_C\cap\mathscr{B}_1(\mathscr{H})$，$\mathscr{O}_C^{\perp}=\mathscr{S}_C\cap\mathscr{B}_1(\mathscr{H})$，这里 $\mathscr{S}_C^{\perp}=\{X\in\mathscr{B}_1(\mathscr{H})：\mathrm{tr}(XY)=0,\ \forall Y\in\mathscr{S}_C\}$，$\mathscr{O}_C^{\perp}=\{X\in\mathscr{B}_1(\mathscr{H})：\mathrm{tr}(XY)=0,\ \forall Y\in\mathscr{O}_C\}$.

易验证 $\mathscr{O}_C$ 是 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 的弱算子拓扑闭的线性子空间，而且是 Lie 积运算 $[\cdot,\cdot]$ 下封闭的. 因此 $\mathscr{O}_C$ 是一个算子 Lie 代数. Harpe[80]讨论了 $\mathscr{O}_C$(以及其他几个经典的算子李代数)的许多基本性质，包括理想、导子、自同构等. 此外，$\mathscr{O}_C$ 作为一类 Cartan 因子与有界对称域的研究有关. 文献[81]利用复对称算子和斜对称算子的相关结果，完全刻画了 $\mathscr{O}_C$ 的李理想及其对偶空间.

定理 23[81]　$\mathscr{O}_C$ 的非空子集 $\mathscr{J}$ 是 $\mathscr{O}_C$ 的 Lie 理想当且仅当存在 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 的结合理想 $\mathscr{I}$，使得 $\mathscr{J}=\mathscr{I}\cap\mathscr{O}_C$.

文献[81]还完全刻画了 $\mathscr{O}_C$ 的导子的谱. 这些结果表明 $\mathscr{O}_C$ 具有丰富的结构，并提供了 $\mathscr{O}_C$ 和 $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 之间的对比. 文献[82]建立了 $\mathscr{O}_C$ 中的 Weyl-von Neumann 定理.

定理 24[82]　设 C 是 $\mathscr{H}$ 上的共轭算子，$\varepsilon>0$.

1) 若 T 是 $\mathscr{O}_C$ 中的自伴算子且 $p\in(1,\infty)$，则存在 $\mathscr{O}_C$ 中的自伴对角算子 D，使得 $\|T-D\|_p<\varepsilon$；

2) 若 $T_1,\cdots,T_n$ 是 $\mathscr{O}_C$ 中两两交换的自伴算子，其中 $n\geqslant2$，则存在 $\mathscr{O}_C$ 中两两交换的自伴对角算子 $D_1,\cdots,D_n$，使得 $\|T_j-D_j\|_n<\varepsilon$，$\forall j=1,2,\cdots,n$.

定理 24 中的 2)是 Voiculescu 的自伴算子组联合对角化定理[73]的 $\mathscr{O}_C$ 对应结果. 作为应用，文献[82]建立了 $\mathscr{O}_C$ 中的不可约逼近定理.

定理 25[82]　设 C 是 $\mathscr{H}$ 上的共轭算子. 若 $T\in\mathscr{O}_C$ 且 $p\in(1,\infty)$，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 p-范数小于 ε 的紧算子 K，使得 $T+K\in\mathscr{O}_C$ 是不可约的.

5.2　共轭正规算子

定义 5[83]　若存在 $\mathscr{H}$ 上的共轭算子 C 使得 $C|T|C=|T^*|$，则称算子 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 是共轭正规的. 若 T 关于 C 是共轭正规的，也称 T 是 C-正规的.

共轭正规算子与反自伴算子有关. 用 $\mathscr{B}_a(\mathscr{H})$ 表示复 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上所有有界的共轭线性算子构成的集合，$\mathscr{B}_c(\mathscr{H})$ 表示复 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上所有共轭算子构成的集合. 对于 $R\in\mathscr{B}_a(\mathscr{H})$，$R$ 的反线性伴随是满足

$$\langle R^{\#}x,y\rangle=\langle Ry,x\rangle,\qquad\forall x,y\in\mathscr{H}$$

的唯一的算子 $R^{\#}\in\mathscr{B}_a(\mathscr{H})$. 若 $R=R^{\#}$，则称 R 是反自伴的；若 $RR^{\#}=R^{\#}R$，则称 R 是反正规的.

对于 $T\in\mathscr{B}(\mathscr{H})$ 及 $C\in\mathscr{B}_c(\mathscr{H})$，易验证 $CT\in\mathscr{B}_a(\mathscr{H})$ 且 $(CT)^{\#}=T^*C$. 因此 CT 是反自伴的当且仅当 T 是 C-对称的，CT 是反正规的当且仅当 T 是 C-正规的. 此外，C-斜对称算子都是 C-正规的. 因此

共轭正规算子是复对称算子和斜对称算子的推广.

文献[83]研究了共轭正规算子与共轭正规矩阵之间的关系，刻画了有限维空间上的共轭正规算子. 文献[84]将关于复对称算子的若干结果推广至共轭正规算子. 下面先给出共轭正规算子的极分解定理.

定理 26[84] 设 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$且 $C\in\mathcal{B}_c(\mathcal{H})$，则下列叙述等价：

1) T 是 C-正规的；

2) 存在支撑在$\overline{\mathcal{R}|T|}$上的部分反酉算子 J，使得 $T=CJ|T|$ 且 $J|T|=|T|J$；

3) 存在反酉算子 $\widetilde{J}$，使得 $T=C\widetilde{J}|T|$ 且 $\widetilde{J}|T|=|T|\widetilde{J}$.

对于 $C\in\mathcal{B}_c(\mathcal{H})$，用 $\mathcal{N}_C$ 表示 C-正规算子构成之集.

定理 27[84] 若 $C\in\mathcal{B}_c(\mathcal{H})$，则 $\mathcal{N}_C$ 中的可逆算子构成其稠密子集.

定理 27 表明，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中可逆的共轭正规算子构成共轭正规算子类的稠密子集. Garcia[13]证明了每个C-对称的压缩算子都是两个C-对称酉算子的平均值. 对于 C-正规算子，文献[84]得到了上述结果的 $\mathcal{N}_C$ 对应结果.

定理 28[84] 若 $C\in\mathcal{B}_c(\mathcal{H})$，$T\in\mathcal{N}_C$ 且 $\|T\|\leqslant 1$，则存在酉算子 $U_1,U_2\in\mathcal{N}_C$，使得 $T=(U_1+U_2)/2$.

不同于 $\mathcal{S}_C$，集合 $\mathcal{N}_C$ 不是加法封闭的；此外，共轭正规算子在约化子空间上的限制未必是共轭正规的，Aluthge 变换也不保持算子的共轭正规性[84].

关于部分等距的共轭正规性，文献[85]得到了如下结果.

定理 29[85] 对于部分等距算子 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，下列叙述等价：

1) T 是共轭正规的；

2) $\dim \operatorname{Ker} T\cap\mathcal{R}(T)=\dim \operatorname{Ker} T^*\cap\mathcal{R}(T^*)$；

3) T 在初始空间上的收缩 A 满足 $\dim \operatorname{Ker} A=\dim \operatorname{Ker} A^*$.

定理 29 结合定理 1 揭示了复对称部分等距与复对称共轭正规算子的差别. 上述结果的证明依赖于下列共轭插值定理.

定理 30[85] 对于 $\mathcal{H}$ 的闭子空间 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$，存在 $C\in\mathcal{B}_c(\mathcal{H})$，使得 $C(\mathcal{M})=\mathcal{N}$ 当且仅当 $\dim(\mathcal{M}\cap\mathcal{N}^\perp)=\dim(\mathcal{M}^\perp\cap\mathcal{N})$.

此外，文献[86]通过研究算子的共轭插值刻画了加权移位算子的共轭正规性. 更多关于共轭正规算子的结果可参见文献[87-89].

对任意的 $C\in\mathcal{B}_c(\mathcal{H})$，易验证 $\mathcal{B}_a(\mathcal{H})=\{CX: X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})\}$，$\mathcal{B}(\mathcal{H})=\{CX: X\in\mathcal{B}_a(\mathcal{H})\}$. 据此关于共轭线性算子的问题可转化为有界线性算子的问题. 文献[90]研究了共轭线性算子数值域的刻画问题. 对于 $R\in\mathcal{B}_a(\mathcal{H})$，其数值域定义为 $W(R)=\{\langle Rx,x\rangle: x\in\mathcal{H},\ \|x\|=1\}$. 假设 $R=CT$，其中 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，$C\in\mathcal{B}_c(\mathcal{H})$. 自然地，$R$ 的结构、性质由 C 和 T 决定. 从而有如下问题.

问题 6 对于 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$和 $C\in\mathcal{B}_c(\mathcal{H})$，可否利用 T 和 C 给出 $W(CT)$的具体刻画.

参 考 文 献

[1] GARCIA S R, PUTINAR M. Complex Symmetric Operators and Applications [J]. Trans Amer Math Soc, 2006, 358(3): 1285-1315.

[2] GARCIA S R, PUTINAR M. Complex Symmetric Operators and Applications. Ⅱ [J]. Trans Amer Math Soc, 2007, 359(8): 3913-3931.

[3] HUA L K. On the Theory of Automorphic Functions of a Matrix Level. Ⅰ. Geometrical Basis [J]. Amer J Math, 1944, 66: 470-488.

[4] JACOBSON N. Normal Semi-linear Transformations [J]. Amer J Math, 1939, 61(1): 45-48.

[5] SCHUR I. Ein Satz Ueber Quadratische Formen Mit Komplexen Koeffizienten [J]. Amer J Math, 1945, 67: 472-480.

[6] SIEGEL C L. Symplectic Geometry [J]. Amer J Math, 1943, 65: 1-86.

[7] TAKAGI T. On an Algebraic Problem Related to an Analytic Theorem of Carathéodory and Fejér and on an Allied Theorem of Landau [J]. Japanese J Math, 1925, 1: 83-93.

[8] GLAZMAN I M. An Analogue of the Extension Theory of Hermitian Operators and a Non-symmetric One-Dimensional Boundary Problem on a Half-Axis [J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1957, 115: 214-216.

[9] GLAZMAN I M. Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators [M]. New York: Daniel Davey & Co., Inc., 1966: 1-234.

[10] ZAGORODNYUK S M. On a J-Polar Decomposition of a Bounded Operator and Matrices of J-Symmetric and J-Skew-Symmetric Operators [J]. Banach J Math Anal, 2010, 4(2): 11-36.

[11] SARASON D. Algebraic Properties of Truncated Toeplitz Operators [J]. Oper Matrices, 2007, 1(4): 491-526.

[12] GARCIA S R. Conjugation and Clark Operators [M]//Recent Advances in Operator-Related Function Theory, Contemporary Mathematics: Vol. 393. Providence, RI: American Mathematical Society, 2000: 67-111.

[13] GARCIA S R. Means of Unitaries, Conjugations, and the Friedrichs Operator [J]. J Math Anal Appl, 2007, 335(2): 941-947.

[14] GARCIA S R. The Norm and Modulus of a Foguel Operator [J]. Indiana Univ Math J, 2009, 58(5): 2305-2315.

[15] GARCIA S R, PRODAN E, PUTINAR M. Mathematical and Physical Aspects of Complex Symmetric Operators [J]. J Phys A: Math Theor, 2014, 47(35): 353001-1-353001-54.

[16] HAI P V, PUTINAR M. Complex Symmetric Evolution Equations [J]. Anal Math Phys, 2020, 10(1): 14-1-14-36.

[17] PRODAN E, GARCIA S R, PUTINAR M. Norm Estimates of Complex Symmetric Operators Applied to Quantum Systems [J]. J Phys A: Math Gen, 2006, 39(2): 389-400.

[18] GARCIA S R, WOGEN W R. Complex Symmetric Partial Isometries [J]. J Funct Anal, 2009, 257(4): 1251-1260.

[19] ZHU S, LI C G. Complex Symmetric Weighted Shifts [J]. Trans Amer Math Soc, 2013, 365(1): 511-530.

[20] BARANOV A, CHALENDAR I, FRICAIN E, et al. Bounded Symbols and Reproducing Kernel Thesis for Truncated Toeplitz Operators [J]. J Funct Anal, 2010, 259(10): 2673-2701.

[21] BARANOV A, BESSONOV R, KAPUSTIN V. Symbols of Truncated Toeplitz Operators [J]. J Funct Anal, 2011, 261(12): 3437-3456.

[22] BESSONOV R. Truncated Toeplitz Operators of Finite Rank [J]. Proc Amer Math Soc, 2014, 142(4): 1301-1313.

[23] CHU C. Normal Truncated Toeplitz Operators [J]. Complex Anal Oper Theory, 2018, 12(4): 849-857.

[24] GARCIA S R, ROSS W T, WOGEN W R. C^*-Algebras Generated by Truncated Toeplitz Operators [M]. Concrete Operators, Spectral Theory, Operators in Harmonic Analysis and Approximation, 236. Basel: Birkhäuser, 2014: 181-192.

[25] SEDLOCK N A. Algebras of Truncated Toeplitz Operators [J]. Oper Matrices, 2011, 5(2): 309-326.

[26] KO E, LEE J E. Normal Truncated Toeplitz Operators on Finite-Dimensional Spaces [J]. Linear Multilinear Algebra, 2015, 63(10): 1947-1971.

[27] MA P, ZHENG D C. Compact Truncated Toeplitz Operators [J]. J Funct Anal, 2016, 270(11): 4256-4279.

[28] BERCOVICI H, TIMOTIN D. Truncated Toeplitz Operators and Complex Symmetries [J]. Proc Amer Math Soc, 2018, 146(1): 261-266.

[29] CIMA J A, GARCIA S R, ROSS W T, et al. Truncated Toeplitz Operators: Spatial Isomorphism, Unitary Equivalence, and Similarity [J]. Indiana Univ Math J, 2010, 59(2): 595-620.

[30] STROUSE E, TIMOTIN D, ZARRABI M. Unitary Equivalence to Truncated Toeplitz Operators [J]. Indiana Univ Math J, 2012, 61(2): 525-538.

[31] GARCIA S R, LUTZ B, TIMOTIN D. Two Remarks about Nilpotent Operators of Order Two [J]. Proc Amer Math Soc, 2014, 142(5): 1749-1756.

[32] GARCIA S R, MASHREGHI J, ROSS W T. Introduction to Model Spaces and Their Operators [M]//Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 148. Cambridge: Cambridge University Press, 2016: 1-542.

[33] GUO K Y, ZHU S. A Canonical Decomposition of Complex Symmetric Operators [J]. J Operator Theory, 2014, 72(2): 529-547.

[34] BU Q G, CHEN Y, ZHU S. Complex Symmetric Toeplitz Operators [J]. Integral Equations Operator Theory, 2021, 93(2): 15-1-15-19.

[35] KO E, LEE J E. On Complex Symmetric Toeplitz Operators [J]. J Math Anal Appl, 2016, 434(1): 20-34.

[36] HAN K K, WANG M F, WU Q. Unbounded Complex Symmetric Toeplitz Operators [J]. Acta Math Sci: Ser B

(Engl Ed), 2022, 42(1): 420-428.

[37] WALEED NOOR S. Complex Symmetry of Toeplitz Operators with Continuous Symbols [J]. Arch Math (Basel), 2017, 109(5): 455-460.

[38] HU X H, DONG X T, ZHOU Z H. Complex Symmetric Monomial Toeplitz Operators on the Unit Ball [J]. J Math Anal Appl, 2020, 492(2): 124490-1-124490-16.

[39] GARCIA S R, HAMMOND C. Which Weighted Composition Operators Are Complex Symmetric? [M]. Operator Theory: Advances and Applications, 236. Basel: Birkhäuser, 2014: 171-179.

[40] JUNG S, KIM Y, KO E, et al. Complex Symmetric Weighted Composition Operators on $H^2(\mathbb{D})$ [J]. J Funct Anal,2014, 267(2): 323-351.

[41] WALEED NOOR S. On an Example of a Complex Symmetric Composition Operator on $H^2(\mathbb{D})$ [J]. J Funct Anal, 2015, 269(6): 1899-1901.

[42] WANG M F, YAO X X. Complex Symmetry of Weighted Composition Operators in Several Variables [J]. Internat J Math, 2016, 27(2): 1650017-1-1650017-14.

[43] GAO Y X, ZHOU Z H. Complex Symmetric Composition Operators Induced by Linear Fractional Maps [J]. Indiana Univ Math J, 2020, 69(2): 367-384.

[44] COWEN C C. The Commutant of an Analytic Toeplitz Operator [J]. Trans Amer Math Soc, 1978, 239: 1-31.

[45] THOMSON J. The Commutant of a Class of Analytic Toeplitz Operators. Ⅱ. [J]. Indiana Univ Math J, 1976, 25(8): 793-800.

[46] THOMSON J. The Commutant of a Class of Analytic Toeplitz Operators [J]. Amer J Math, 1977, 99(3): 522-529.

[47] DOUGLAS R G, PUTINAR M, WANG K. Reducing Subspaces for Analytic Multipliers of the Bergman Space [J]. J Funct Anal, 2012, 263(6): 1744-1765.

[48] GUO K Y, HUANG H S. Geometric Constructions of Thin Blaschke Products and Reducing Subspace Problem [J]. Proc Lond Math Soc, 2014, 109(4): 1050-1091.

[49] ZHU S. Approximation of Complex Symmetric Operators [J]. Math Ann, 2016, 364(1/2): 373-399.

[50] HALMOS P R. Irreducible Operators [J]. Michigan Math J, 1968, 15: 215-223.

[51] LIU T, ZHAO J Y, ZHU S. Reducible and Irreducible Approximation of Complex Symmetric Operators [J]. J London Math Soc, 2019, 100(1): 341-360.

[52] VOICULESCU D. A Non-commutative Weyl-von Neumann Theorem [J]. Rev Roumaine Math Pures Appl, 1976, 21(1): 97-113.

[53] WANG C, ZHU S. Reducing Subspaces of Complex Symmetric Operators [J]. Complex Anal Oper Theory, 2020, 14(4): 45-1-45-9.

[54] HALMOS P R. Ten Problems in Hilbert Space [J]. Bull Amer Math Soc, 1970, 76: 887-933.

[55] APOSTOL C, FIALKOW L A, HERRERO D A, et al. Approximation of Hilbert Space Operators: Vol. Ⅱ [M]. Research Notes in Mathematics, 102. Boston, MA: Pitman (Advanced Publishing Program), 1984: 1-524.

[56] HERRERO D A. Approximation of Hilbert Space Operators: Vol. 1 [M]. Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. 224. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1989: 1-332.

[57] ZHU S, LI C G, JI Y Q. The Class of Complex Symmetric Operators Is Not Norm Closed [J]. Proc Amer Math Soc, 2012, 140(5): 1705-1708.

[58] GARCIA S R, POORE D E. On the Norm Closure Problem for Complex Symmetric Operators [J]. Proc Amer Math Soc, 2013, 141(2): 549.

[59] GARCIA S R, POORE D E. On the Norm Closure of the Complex Symmetric Operators: Compact Operators and Weighted Shifts [J]. J Funct Anal, 2013, 264(3): 691-712.

[60] GUO K Y, JI Y Q, ZHU S. A C^*-Algebra Approach to Complex Symmetric Operators [J]. Trans Amer Math Soc, 2015, 367(10): 6903-6942.

[61] DANCIGER J, GARCIA S R, PUTINAR M. Variational Principles for Symmetric Bilinear Forms [J]. Math Nachr, 2008, 281(6): 786-802.

[62] KLIŚ-GARLICKA K, PTAK M. C-Symmetric Operators and Reflexivity [J]. Oper Matrices, 2015, 9(1): 225-232.

[63] CARTAN É. Sur Les Domaines Bornés Homogènes de L'espace de n Variables Complexes [J]. Abh Math Semin

Univ Hamburg，1935，11：116-162.

[64] FRIEDMAN Y，RUSSO B. The Gelfand-Naimark Theorem for JB^*-Triples [J]. Duke Math J，1986，53(1)：139-148.

[65] WANG C，ZHU S. The Jordan Algebra of Complex Symmetric Operators [J/OL]. Chinese Ann Math (Ser B)，(2023-11-21)[2024-11-01]. https://arxiv.org/pdf/1912.10391.

[66] FONG C K，MIERS C R，SOUROUR A R. Lie and Jordan Ideals of Operatorson Hilbert Space [J]. Proc Amer Math Soc，1982，84(4)：516-520.

[67] KADISON R V. Isometries of Operator Algebras [J]. Ann of Math，1951，54(2)：325-338.

[68] KURODA S T. On a Theorem of Weyl-von Neumann [J]. Proc Japan Acad，1958，34：11-15.

[69] WANG C，ZHAO J Y，ZHU S. Range Inclusion and Diagonalization of Complex Symmetric Operators [J/OL]. Canad J Math，(2024-04-04)[2024-11-01]. https://doi.org/10.4153/S0008414X24000294.

[70] BERG I D. An Extension of the Weyl-von Neumann Theorem to Normal Operators [J]. Trans Amer Math Soc，1971，160：365-371.

[71] SIKONIA W G. Essential，Singular，and Absolutely Continuous Spectra [D]. Colorado，USA：University of Colorado at Boulder，1970.

[72] HALMOS P R. Continuous Functions of Hermitian Operators [J]. Proc Amer Math Soc，1972，31：130-132.

[73] VOICULESCU D. Some Results on Norm-Ideal Perturbations of Hilbert Space Operators [J]. J Operator Theory，1979，2(1)：3-37.

[74] DOUGLAS R G. On Majorization，Factorization，and Range Inclusion of Operators on Hilbert Space [J]. Proc Amer Math Soc，1966，17：413-415.

[75] EMBRY M R. Factorization of Operators on Banach Space [J]. Proc Amer Math Soc，1973，38：587-590.

[76] LI C G，ZHU S. Skew Symmetric Normal Operators [J]. Proc Amer Math Soc，2013，141(8)：2755-2762.

[77] ZHU S，ZHAO J Y. The Riesz Decomposition Theorem for Skew Symmetric Operators [J]. J Korean Math Soc，2015，52(2)：403-416.

[78] ZHU S. Skew Symmetric Weighted Shifts [J]. Banach J Math Anal，2015，9(1)：253-272.

[79] ZHU S. Complex Symmetric Operators，Skew Symmetric Operators and Reflexivity [J]. Oper Matrices，2017，11(4)：941-951.

[80] DE LA HARPE P. Classical Banach-Lie Algebras and Banach-Lie Groups of Operators in Hilbert Space [M]. Lecture Notes in Mathematics，Vol.285. Berlin：Springer-Verlag，1972：1-160.

[81] BU Q G，ZHU S. The Orthogonal Lie Algebra of Operators：Ideals and Derivations [J]. J Math Anal Appl，2020，489(1)：124-134.

[82] BU Q G，ZHU S. The Weyl-von Neumann Theorem for Skew-Symmetric Operators [J]. Ann Funct Anal，2023，14(2)：43-1-43-12.

[83] PTAK M，SIMIK K，WICHER A. C-Normal Operators [J]. Electron J Linear Algebra，2020，36：67-79.

[84] WANG C，ZHAO J Y，ZHU S. Remarks on the Structure of C-Normal Operators [J]. Linear Multilinear Algebra，2022，70(9)：1682-1696.

[85] LIU T，SHI L Y，WANG C，et al. An Interpolation Problem for Conjugations [J]. J Math Anal Appl，2021，500(1)：125118-1-125118-11.

[86] LIU T，XIE X Y，ZHU S. An Interpolation Problem for Conjugations Ⅱ [J]. Mediterr J Math，2022，19(4)：153-1-153-13.

[87] RAMESH G，SUDIP RANJAN B，VENKU NAIDU D. A Representation of Compact C-Normal Operators [J]. Linear Multilinear Algebra，2023，71(9)：1565-1577.

[88] BHUIA S R. A Note on C-Normal Weighted Composition Operators on the Fock Space in Several Variables [J]. Monatsh Math，2023，201(1)：53-64.

[89] AMARA Z，OUDGHIRI M. Linear Maps Preserving C-Normal Operators [J]. Mediterr J Math，2022，19(3)：123-1-123-13.

[90] KOŁLACZEK D，MÜLLER V. Numerical Ranges of Antilinear Operators [J]. Integral Equations Operator Theory，2024，96(2)：17-1-17-15.

（责任编辑：赵立芹）