

具脉冲收获时滞与出生的 系统切换动力学模型分析

吴 淋, 焦建军

(贵州财经大学 数学与统计学院, 贵阳 550025)

摘要: 首先, 利用 Jury 判据和谱半径方法研究具脉冲收获时滞与出生的系统切换动力学模型, 证明脉冲系统周期解的渐近稳定性, 并给出种群灭绝的阈值. 其次, 考虑到种群持续生存和收获量, 在不同情形下讨论收获时滞的合理取值, 并利用数值仿真验证理论结果.

关键词: 脉冲收获时滞; 脉冲出生; Jury 判据; 谱半径; 渐近稳定性

中图分类号: O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2025)05-1269-07

Analysis of Switching Dynamics Models of Systems with Pulse Time-Delay Harvesting and Birth

WU Lin, JIAO Jianjun

(School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China)

Abstract: Firstly, we used the Jury criterion and spectral radius method to study the switching dynamics models of systems with pulse time-delay harvesting and birth, proved the asymptotic stability of the periodic solutions of the pulse systems and gave the threshold for population extinction. Secondly, we considered the continuous survival of the population and the amount of harvest, discussed the reasonable values of the harvest delay under different circumstances, and verified the theoretical results by numerical simulation.

Keywords: pulse time-delay harvesting; pulse birth; Jury criterion; spectral radius; asymptotic stability

0 引 言

自然界中的种群通常会经历从幼体到成体阶段, 种群在各阶段的生理功能有显著差异. 文献[1]考虑出生与收获在不同时刻, 建立了带有 Logistic 型脉冲出生的单种群阶段结构动力学模型, 得到了种群灭绝的收获阈值. 文献[2]在害虫管理背景下, 考虑 Ricker 和 Beverton-Holt 型脉冲出生, 建立了具脉冲出生与农药残留的单种群阶段结构害虫管理模型. 文献[3]进一步考虑了瞬时与非瞬时收获, 建立了如下单种群切换系统:

收稿日期: 2024-12-05. 网络首发日期: 2025-06-20.

第一作者简介: 吴 淋(2000—), 男, 汉族, 硕士研究生, 从事生物数学的研究, E-mail: wulin_math@126.com. **通信作者简介:** 焦建军(1973—), 男, 汉族, 博士, 教授, 从事生物数学的研究, E-mail: jiaojianjun2018@126.com.

基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 12261018)、贵州省高等学校数学建模与数据挖掘重点实验室项目(批准号: 2023013)、贵州省研究生科研基金项目(批准号: 2024YJSKYJJ261)、贵州财经大学创新探索与学术新苗项目(批准号: 2024XSXMA08)和贵州财经大学研究生科研项目(批准号: 2024ZXSX233).

网络首发地址: <https://link.cnki.net/urlid/22.1340.O.20250620.1422.001>.

$$\left. \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -(c_1 + d_1)x_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= c_1x_1(t) - d_2x_2(t) \end{aligned} \right\}, & t \in (nT, (n+l)T], \\ & \left. \begin{aligned} \Delta x_1(t) &= -\mu x_1(t), \\ \Delta x_2(t) &= 0 \end{aligned} \right\}, & t = (n+l)T, \\ & \left. \begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -(c_2 + d_3)x_1(t) - Ex_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= c_2x_1(t) - d_4x_2(t) \end{aligned} \right\}, & t \in ((n+l)T, (n+1)T], \\ & \left. \begin{aligned} \Delta x_1(t) &= x_2(t)(a - bx_2(t)), \\ \Delta x_2(t) &= 0 \end{aligned} \right\}, & t = (n+1)T, \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

模型(1)中各参数的含义见文献[3]. 但在生物资源管理中, 以养殖为例, 人们在进行收获前总是先对种群数量进行观测, 然后再决定捕捞量. 在观测和进行捕捞间有一个决策的过程, 为刻画该决策过程, 分析决策时间长短对种群持续生存的影响. 本文在模型(1)的基础上, 引入脉冲收获时滞, 考虑 Ricker 型脉冲出生, 建立如下具脉冲收获时滞与出生的系统切换动力学模型:

$$\left. \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -(c_1 + d_1)x_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= c_1x_1(t) - d_2x_2(t) \end{aligned} \right\}, & t \in (n\omega, (n+\delta)\omega], \\ & \left. \begin{aligned} \Delta x_1(t) &= 0, \\ \Delta x_2(t) &= -he^{-d_2l\delta\omega}x_2(t - l\delta\omega) \end{aligned} \right\}, & t = (n+\delta)\omega, \\ & \left. \begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -(c_2 + d_3)x_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= c_2x_1 - d_4x_2 \end{aligned} \right\}, & t \in ((n+\delta)\omega, (n+1)\omega], \\ & \left. \begin{aligned} \Delta x_1(t) &= bx_2e^{-(x_1+x_2)}, \\ \Delta x_2(t) &= 0 \end{aligned} \right\}, & t = (n+1)\omega, \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

其中: $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别表示种群幼体和成体在 t 时刻的密度; $\omega > 0$ 为脉冲周期; $0 < \delta < 1$; $c_1 > 0$ 是 $t \in (n\omega, (n+\delta)\omega]$ 时幼体转化为成体的转化系数; $d_1 > 0$ 是 $t \in (n\omega, (n+\delta)\omega]$ 时幼体的死亡率; $d_2 > 0$ 是 $t \in (n\omega, (n+\delta)\omega]$ 时成体的死亡率; $0 < h < 1$ 是收获比例系数; $0 < l < 1$ 表示收获时滞; $c_2 > 0$ 是 $t \in ((n+\delta)\omega, (n+1)\omega]$ 时幼体转化为成体的转化系数; $d_3 > 0$ 是 $t \in ((n+\delta)\omega, (n+1)\omega]$ 时幼体的死亡率; $d_4 > 0$ 是 $t \in ((n+\delta)\omega, (n+1)\omega]$ 时成体的死亡率; $be^{-(x_1+x_2)}$ 是 Ricker 型出生函数 ($b > 0$). 由于在自然界中, 幼体对环境变化的适应能力弱, 缺乏有效的防御机制, 更容易被天敌捕食, 因此这里假设 $d_1 > d_2, d_3 > d_4$.

1 动力学分析

系统(2)的解析解为

$$\begin{cases} x_1(t) = \begin{cases} x_1(n\omega^+)e^{-(c_1+d_1)(t-n\omega)}, & t \in (n\omega, (n+\delta)\omega], \\ x_1((n+\delta)\omega^+)e^{-(c_2+d_3)(t-(n+\delta)\omega)}, & t \in ((n+\delta)\omega, (n+1)\omega], \end{cases} \\ x_2(t) = \begin{cases} e^{-d_2(t-n\omega)} \left[\frac{c_1(1 - e^{-(c_1+d_1-d_2)(t-n\omega)})}{c_1 + d_1 - d_2} x_1(n\omega^+) + x_2(n\omega^+) \right], & t \in (n\omega, (n+\delta)\omega], \\ e^{-d_4(t-(n+\delta)\omega)} \left[\frac{c_2(1 - e^{-(c_2+d_3-d_4)(t-(n+\delta)\omega)})}{c_2 + d_3 - d_4} x_1((n+\delta)\omega^+) + x_2((n+\delta)\omega^+) \right], & t \in ((n+\delta)\omega, (n+1)\omega], \end{cases} \end{cases}$$

则当 $t = (n+\delta)\omega$ 时, 有

$$\begin{cases} x_1((n + \delta)\omega^+) = x_1(n\omega^+)e^{-(c_1+d_1)\delta\omega}, \\ x_2((n + \delta)\omega^+) = Ax_1(n\omega^+) + (1 - h)e^{-d_2\delta\omega}x_2(n\omega^+). \end{cases}$$

于是系统(2)的频闪映射为

$$\begin{cases} x_1((n + 1)\omega^+) = Dx_1(n\omega^+) + b(Cx_1(n\omega^+) + Bx_2(n\omega^+)) \times \\ \quad \exp\{-((C + D)x_1(n\omega^+) + Bx_2(n\omega^+))\}, \\ x_2((n + 1)\omega^+) = Cx_1(n\omega^+) + Bx_2(n\omega^+), \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$\begin{cases} A = e^{-d_2\delta\omega} \left(\frac{c_1(1 - e^{-(c_1+d_1-d_2)\delta\omega})}{c_1 + d_1 - d_2} - \frac{hc_1(1 - e^{-(c_1+d_1-d_2)(1-l)\delta\omega})}{c_1 + d_1 - d_2} \right) > 0, \\ B = (1 - h)e^{-d_2\delta\omega}e^{-d_4(1-\delta)\omega} < 1, \\ C = e^{-d_4(1-\delta)\omega} \left(\frac{c_2(1 - e^{-(c_2+d_3-d_4)(1-\delta)\omega})}{c_2 + d_3 - d_4} e^{-(c_1+d_1)\delta\omega} + A \right) > 0, \\ D = e^{-(c_1+d_1)\delta\omega}e^{-(c_2+d_3)(1-\delta)\omega} < 1. \end{cases} \tag{4}$$

令 $(x_1((n + 1)\omega^+), x_2((n + 1)\omega^+)) = (x_1^{n+1}, x_2^{n+1})$, 可得如下差分系统:

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = Dx_1^n + b(Cx_1^n + Bx_2^n) \exp\{-((C + D)x_1^n + Bx_2^n)\}, \\ x_2^{n+1} = Cx_1^n + Bx_2^n. \end{cases} \tag{5}$$

引理 1^[4-5] 差分系统

$$x^{n+1} = F(x^n) \tag{6}$$

的不动点 $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ 是局部渐近稳定的, 当且仅当系统(6)在不动点 x^* 处的线性化系统 $x^{n+1} = Hx^n$ 满足如下 Jury 条件:

$$\begin{aligned} 1 - \det H &> 0, \\ 1 - \text{tr } H + \det H &> 0, \\ 1 + \text{tr } H + \det H &> 0, \end{aligned}$$

并且当 H 满足上述 Jury 条件时, H 的特征值模长均小于 1.

引理 2^[6] 设 $\rho(H) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_m|\}$ 是矩阵 H 的谱半径, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} H^n = 0$ 当且仅当 $\rho(H) < 1$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 是 H 的特征值.

定理 1 记 $b_0 = \frac{(1-D)(1-B)}{C}$, 若 $0 < b < b_0$, 则系统(5)的平凡不动点 $H_1(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ 是全局渐近稳定的.

证明: 系统(5)在 $H_1(x_1^*, x_2^*)$ 处的线性化系统为

$$\begin{pmatrix} u^{n+1} \\ v^{n+1} \end{pmatrix} = H_1 \begin{pmatrix} u^n \\ v^n \end{pmatrix}, \tag{7}$$

其中

$$H_1 = \begin{pmatrix} D + bC & bB \\ C & B \end{pmatrix}. \tag{8}$$

计算可得

$$1 - \det H_1 = 1 - DB > 0.$$

由于 $\text{tr } H_1 > 0$, 因此, 如果 $1 - \text{tr } H_1 + \det H_1 > 0$, 则 $1 + \text{tr } H_1 + \det H_1 > 0$. 因为

$$1 - \text{tr } H_1 + \det H_1 = (1 - D)(1 - B) - bC > 0$$

当且仅当 $b < \frac{(1-D)(1-B)}{C} = b_0$. 因此根据引理 1, 系统(1)的不动点 $H_1(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ 是局部渐近稳定的. 下面考虑全局吸引力.

由引理 1 可知, 矩阵 H_1 的特征值的模长均小于 1, 即矩阵 H_1 的谱半径 $\rho(H_1) < 1$. 于是由引理 2 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} H_1^n = 0$. 根据式(7)有

$$\begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} u^n \\ v^n \end{pmatrix} = \mathbf{H}_1 \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

在式(9)中令 $n \rightarrow \infty$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u^n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} v^n = 0$, 于是 $x_1^n \rightarrow 0, x_2^n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 从而不动点 $H_1(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ 是全局吸引的, 进而是全局渐近稳定的. 证毕.

注 1 如果 $b > b_0$, 则平凡不动点 $(0, 0)$ 不稳定, 并且系统(5)有唯一正不动点

$$H_2(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1-B}{C+D(1-B)} \ln \frac{b}{b_0}, \frac{C}{C+D(1-B)} \ln \frac{b}{b_0} \right).$$

定理 2 记 $b_1 = b_0 \exp\left\{ \frac{2(C+D(1-B))(1+BD)}{(1-D)(1-B)(C+D(1+B))} \right\}$, 若 $b_0 < b < b_1$, 则系统(5)的唯一正不动点

$H_2(x_1^*, x_2^*)$ 是局部渐近稳定的.

证明: 系统(5)在 $H_2(x_1^*, x_2^*)$ 处的线性化系统为

$$\begin{pmatrix} u^{n+1} \\ v^{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_2 \begin{pmatrix} u^n \\ v^n \end{pmatrix}, \tag{10}$$

其中

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ C & B \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$a_{11} = D + Cb_0 - \frac{b_0(C+D)C}{C+D(1-B)} \ln \frac{b}{b_0},$$

$$a_{12} = b_0 B - \frac{b_0 BC}{C+D(1-B)} \ln \frac{b}{b_0}.$$

计算可得

$$\det \mathbf{H}_2 = BD \left(1 - \frac{(1-D)(1-B)}{C+(1-B)D} \ln \frac{b}{b_0} \right) < 1,$$

$$\text{tr } \mathbf{H}_2 = D + Cb_0 - \frac{b_0(C+D)C}{C+D(1-B)} \ln \frac{b}{b_0} + B.$$

进一步可得

$$1 - \det \mathbf{H}_2 > 0,$$

当 $b_0 < b < b_1$ 时,

$$1 - \text{tr } \mathbf{H}_2 + \det \mathbf{H}_2 = (1-B)(1-D) \ln \frac{b}{b_0} > 0,$$

$$1 + \text{tr } \mathbf{H}_2 + \det \mathbf{H}_2 = 2(1+BD) - \frac{(1-D)(1-B)(C+D(1+B))}{C+D(1-B)} \ln \frac{b}{b_0} > 0.$$

根据引理 1, 系统(5)的不动点 $H_2(x_1^*, x_2^*)$ 是局部渐近稳定的. 证毕.

基于上述分析, 类似于文献[7-9], 可得如下结果.

定理 3 若 $0 < b < b_0$, 则系统(2)的零解是全局渐近稳定的; 若 $b_0 < b < b_1$, 则系统(2)的正周期解 $(\overline{x_1(t)}, \overline{x_2(t)})$ 是局部渐近稳定的, 其中

$$\begin{cases} \overline{x_1(t)} = \begin{cases} x_1^* e^{-(c_1+d_1)(t-n\omega)}, & t \in (n\omega, (n+\delta)\omega], \\ x_1^* e^{-(c_1+d_1)\delta\omega} e^{-(c_2+d_3)(t-(n+\delta)\omega)}, & t \in ((n+\delta)\omega, (n+1)\omega], \end{cases} \\ \overline{x_2(t)} = \begin{cases} e^{-d_2(t-n\omega)} \left[\frac{c_1(1 - e^{-(c_1+d_1-d_2)(t-n\omega)})}{c_1+d_1-d_2} x_1^* + x_2^* \right], & t \in (n\omega, (n+\delta)\omega], \\ e^{-d_4(t-(n+\delta)\omega)} \left[\left(\frac{c_2(1 - e^{-(c_2+d_3-d_4)(t-(n+\delta)\omega)})}{c_2+d_3-d_4} e^{-(c_1+d_1)\delta\omega} + A \right) x_1^* + \right. \\ \left. (1-h)e^{-d_2\delta\omega} x_2^* \right], & t \in ((n+\delta)\omega, (n+1)\omega]. \end{cases} \end{cases}$$

注 2 当 $b = b_0$ 时, $H_2(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$, 因此周期解 $(0, 0)$ 和正周期解 $(\overline{x_1(t)}, \overline{x_2(t)})$ 在 $b = b_0$ 处通过跨临界分支交换稳定性.

注 3 文献[10-12]讨论了种群的脉冲扩散, 在证明不动点的全局吸引性时利用了单调凹算子定理, 若利用引理 2 及构造 Lyapunov 函数则可以更直接地完成证明.

下面讨论时滞 l 的影响. 考虑 b_0 是关于 l 的函数, 令

$$F(l) = b - b_0(l) = b - \frac{(1-D)(1-B)}{C},$$

由式(4)可知 $F(l)$ 在 $(0, 1)$ 内严格单调递增.

(i) $F(0^+) < 0$, 若 $F(1^-) > 0$, 则 $\exists l^* \in (0, 1)$, 使得当 $l > l^*$ 时, $F(l) > 0$, $l < l^*$ 时, $F(l) < 0$; 若 $F(1^-) \leq 0$, 则 $F(l) < 0, \forall l \in (0, 1)$.

(ii) $F(0^+) \geq 0$, 则 $F(l) > 0, \forall l \in (0, 1)$.

由于 $b_0(l)$ 单调递减, 且 $b_0(l)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 故

$$b_0(0^+) = b_0(0) = \max_{l \in (0, 1)} b_0(l), \quad b_0(1^-) = b_0(1) = \min_{l \in (0, 1)} b_0(l).$$

于是有以下情形:

情形 1) $\min_{l \in (0, 1)} b_0(l) < b < \max_{l \in (0, 1)} b_0(l)$, 此时存在阈值 l^* , 为维持种群持续生存和收获足够多, 应控制 $l \rightarrow l^*$.

情形 2) $b \leq \min_{l \in (0, 1)} b_0(l)$ 或 $b \geq \max_{l \in (0, 1)} b_0(l)$, 此时种群始终灭绝或持久, 考虑收获足够多, 应控制 $l \rightarrow 0^+$.

由上述分析可见, 不同情形下选择不同的决策时间有利于最大收获和种群的持续生存.

2 数值模拟

2.1 出生系数 b 的影响

取一组参数: $c_1 = 0.5, c_2 = 0.65, d_1 = 0.5, d_2 = 0.35, d_3 = 0.45, d_4 = 0.2, h = 0.35, l = 0.6, \delta = 0.85, \omega = 2, x_1(0^+) = x_2(0^+) = 2$. 计算可得: $b_0 = 2.3326, b_1 = 41.0521$. 以 b 为分支参数, 绘制分支参数及相图.

图 1 为系统(2)在参数 b 变化下的分支图, 图 2 为 b 在不同取值下的相图. 由图 1 可见, 周期解 $(0, 0)$ 与 $(x_1(t), x_2(t))$ 在 $b = b_0$ 处通过跨临界分支交换稳定性. 当 $b_0 < b < b_1$ 时, 正周期解 $(x_1(t), x_2(t))$ 稳定; 当 $b = b_1$ 时, 正周期解失去稳定性并且系统产生 Flip 分支, 验证了本文的结果. 由图 2 可见, 当 $b > b_1$ 时, 系统出现由 Flip 分支引发的倍周期分支, 进而产生复杂的混沌现象.

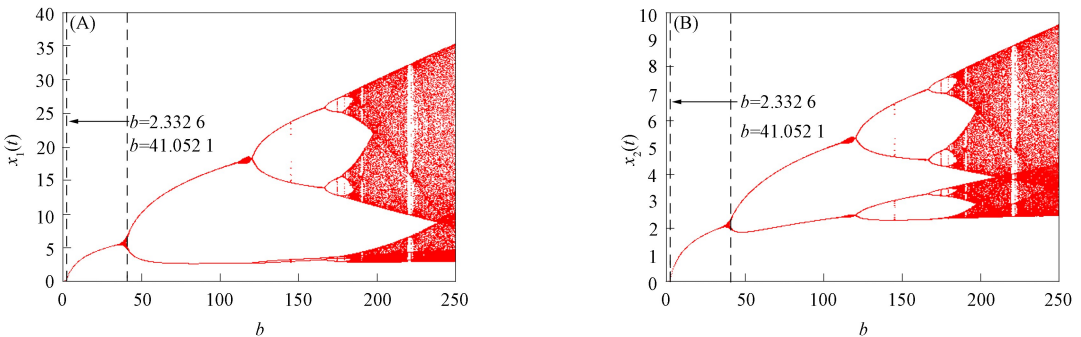


图 1 系统(2)以 b 为参数的分支参数图

Fig. 1 Bifurcation parameter graphs of system (2) with b as parameter

2.2 收获时滞 l 的影响

1) 取第一组参数: $c_1 = 0.6, c_2 = 0.45, d_1 = 0.65, d_2 = 0.55, d_3 = 0.5, d_4 = 0.4, h = 0.4, \delta = 0.7, \omega = 2, b = 3.8, x_1(0^+) = x_2(0^+) = 2$. 此时有 $\min_{l \in (0, 1)} b_0(l) = 3.1117 < b < 4.7469 = \max_{l \in (0, 1)} b_0(l)$.

2) 取第二组参数: $c_1 = 0.8, c_2 = 0.5, d_1 = 0.7, d_2 = 0.6, d_3 = 0.5, d_4 = 0.4, h = 0.8, \delta = 0.9, \omega = 2, b = 3, x_1(0^+) = x_2(0^+) = 2$. 此时有 $b < \min_{l \in (0, 1)} b_0(l) = 3.8618$.

3) 取第三组参数: $c_1 = 0.55, c_2 = 0.85, d_1 = 0.75, d_2 = 0.65, d_3 = 0.55, d_4 = 0.45, h = 0.5,$

$\delta=0.6, \omega=2, b=5.48, x_1(0^+)=x_2(0^+)=2$. 此时有 $b > \max_{l \in (0,1)} b_0(l) = 3.6161$.

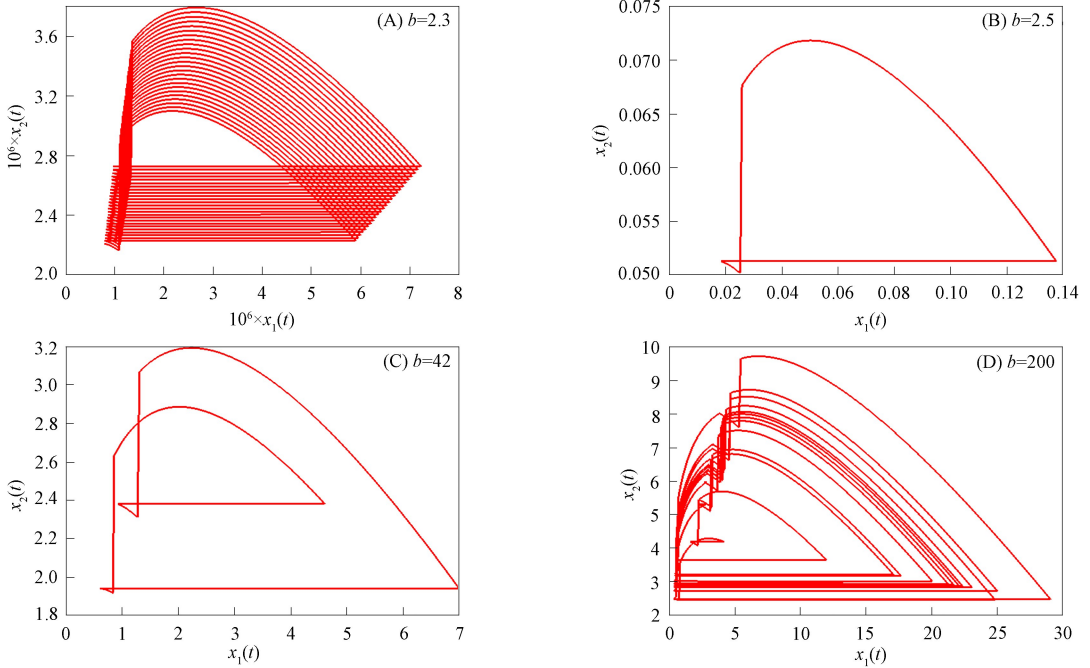


图 2 系统(2)的相图

Fig. 2 Phase graphs of system (2)

图 3 为不同情形下种群关于时滞 l 的数量变化情况. 由图 3(A)可见, 当收获时滞 $l < l^* = 0.5667$ 时会导致种群灭绝, 为保证种群持续生存且收获足够多, 应控制 $l \rightarrow l^{*+}$; 由图 3(B)可见, $\forall l \in (0, 1)$, 种群始终灭绝, 为保证收获足够多, 应控制 $l \rightarrow 0^+$; 由图 3(C)可见, $\forall l \in (0, 1)$, 种群始终持久生存, 为保证收获足够多, 应控制 $l \rightarrow 0^+$. 因此, 收获时滞 l 即决策时间并非一定越短越好.

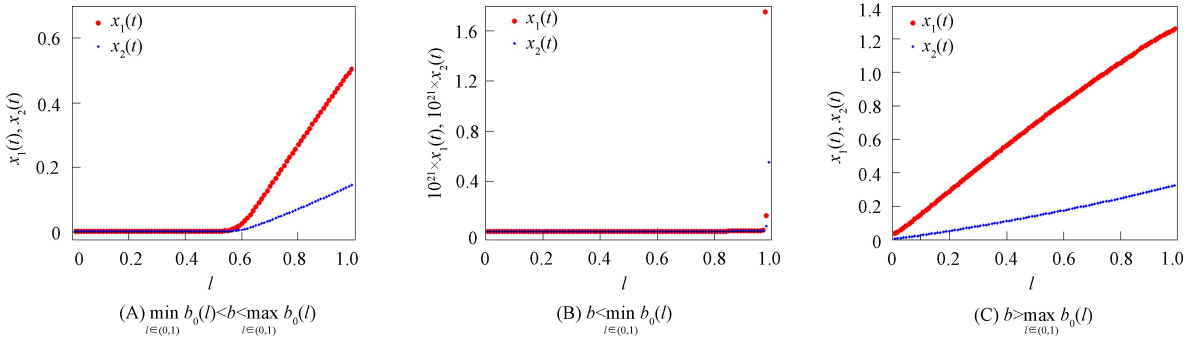


图 3 不同情形下系统(2)关于收获时滞 l 的种群数量变化情况

Fig. 3 Population size variation of system (2) about harvest delay l under different circumstances

综上所述, 本文建立了一个具脉冲收获时滞与出生的系统切换动力学模型, 并通过理论分析获取了种群灭绝的阈值条件: 若 $0 < b < b_0$, 则种群灭绝; 若 $b_0 < b < b_1$, 则种群持久. 数值模拟结果表明, 收获时滞 l 对种群的持续生存有重要影响, 考虑到种群的持续生存和收获量, 分情况讨论了收获时滞的合理取值. 本文结果可为生物资源管理中种群的收获决策提供理论支撑.

参 考 文 献

[1] 焦建军, 鲍磊, 陈兰荪, 等. 具脉冲出生与脉冲收获阶段结构单种群动力学模型 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2011, 49(1): 6-10. (JIAO J J, BAO L, CHEN L S, et al. Dynamics on a Stage-Structured Single Population Model with Birth Pulse and Impulsive Harvesting [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2011, 49(1): 6-10.)

- [2] LI J Y, HUANG Q D, LIU B. A Pest Control Model with Birth Pulse and Residual and Delay Effects of Pesticides [J]. *Advances in Difference Equations*, 2019, 2019: 117-1-117-16.
- [3] 焦建军, 李利梅, 聂星屹, 等. 具瞬时与非瞬时脉冲收获与出生的阶段结构单种群动力学 [J]. *重庆师范大学学报(自然科学版)*, 2020, 37(2): 70-74. (JIAO J J, LI L M, NIE X Y, et al. Dynamics of a Stage-Structured Single Population Model with Transient/Non-transient Impulsive Harvesting and Birth Pulse [J]. *Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)*, 2020, 37(2): 70-74.)
- [4] JURY E I, STARK L, KRISHNAN V V. Inners and Stability of Dynamic Systems [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 1976, 6(10): 724-725.
- [5] 周义仓, 曹慧, 肖燕妮. 差分方程及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2014: 1-299. (ZHOU Y C, CAO H, XIAO Y N. *Difference Equations and Their Applications* [M]. Beijing: Science Press, 2014: 1-299.)
- [6] OLDENBURGER R. Infinite Powers of Matrices and Characteristic Roots [J]. *Duke Mathematical Journal*, 1940, 6(2): 357-361.
- [7] JIAO J J, QUAN Q, DAI X J. Dynamics of a New Impulsive Predator-Prey Model with Predator Population Seasonally Large-Scale Migration [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2022, 132: 108096-1-108096-7.
- [8] DAI X J, JIAO J J, QUAN Q, et al. Dynamics of a Predator-Prey System with Sublethal Effects of Pesticides on Pests and Natural Enemies [J]. *International Journal of Biomathematics*, 2024, 17(1): 2350007-1-2350007-25.
- [9] 焦建军, 陈兰荪, 李利梅. 污染环境下载瞬时与非瞬时脉冲收获的种群动力学模型 [J]. *吉林大学学报(理学版)*, 2019, 57(5): 1088-1094. (JIAO J J, CHEN L S, LI L M. Dynamics of Single Population Model with Transient and Non-transient Impulsive Harvesting in Polluted Environment [J]. *Journal of Jilin University (Science Edition)*, 2019, 57(5): 1088-1094.)
- [10] 吴艳梅, 窦家维, 马丽. 环境污染下具有脉冲扩散的近远海渔业系统连续优化收获问题 [J]. *陕西科技大学学报*, 2016, 34(6): 187-196. (WU Y M, DOU J W, MA L. Optimal Harvesting Problem for a Class of Inshore-Offshore Fishery System with Impulsive Diffusion in a Polluted Environment [J]. *Journal of Shaanxi University of Science and Technology*, 2016, 34(6): 187-196.)
- [11] QUAN Q, DAI X J, JIAO J J. Dynamics of a Predator-Prey Model with Impulsive Diffusion and Transient/Nontransient Impulsive Harvesting [J/OL]. *Mathematics*, (2023-07-24) [2024-12-01]. <https://doi.org/10.3390/math/11143254>.
- [12] 韦香妮, 谭芬, 黄小林, 等. 扩散系数依赖生态资源丰富度的单种群扩散模型 [J]. *生物数学学报*, 2017, 32(1): 65-74. (WEI X N, TAN F, HUANG X L, et al. A Single Diffusion Population Model with Diffusion Coefficient Depends on Ecological Resource Richness [J]. *Journal of Biomathematics*, 2017, 32(1): 65-74.)

(责任编辑: 赵立芹)