第63卷 第1期 吉林大学学报(理学版) Vol.63 No.1
2025年1月 Journal of Jilin University (Science Edition) Jan 2025

研究综述

doi:10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024496

足够接近的旅行商问题研究综述

史丰源[1],欧阳丹彤[1,2],张立明[1,2]
(1. 吉林大学 计算机科学与技术学院,长春 130012;
2. 吉林大学 符号计算与知识工程教育部重点实验室,长春 130012)

摘要:考虑组合优化问题中的经典问题旅行商问题(traveling salesman problem,TSP)的变体——足够接近的旅行商问题(close-enough traveling salesman problem,CETSP).首先,综合介绍TSP和CETSP的历史、求解方法和算法,包括精确算法(如分支定界法、线性规划)和启发式算法(如粒子群优化、贪心算法等).TSP要求在给定城市列表和距离的条件下,找到访问每座城市一次并回到起点的最短路径.CETSP是TSP的推广,允许在每个目标的邻域内选择任意点进行访问,而非精确位置,适用于可容忍误差的实际应用,如物流配送、智能交通、无线传感器网络等.CETSP具有更高的灵活性和适应性,可大幅度减少计算资源和时间消耗,特别在大规模问题中有更大优势.其次,介绍CETSP在实际应用中的潜力,尤其在物流、工业制造、交通规划、信息通讯等领域,为提高效率、降低成本、推动智能化决策提供了有效解决方案.最后,指出了CETSP的一些未来研究方向.

关键词:足够接近的旅行商问题;启发式算法;路径规划;模型应用

中图分类号:TP301.6 **文献标志码**:A **文章编号**:1671-5489(2025)01-0114-10

Research Review of Close Enough Traveling Salesman Problem

SHI Fengyuan[1], OUYANG Dantong[1,2], ZHANG Liming[1,2]
(1. *College of Computer Science and Technology*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*;
2. *Key Laboratory of Symbolic Computation and Knowledge Engineering of Ministry of Education*, *Jilin University*, *Changchun* 130012, *China*)

Abstract: We consider a variant of the classic problem of the traveling salesman problem (TSP) in combinatorial optimization problem: the close enough traveling salesman problem (CETSP). Firstly, we comprehensively introduce the history, solving methods, and algorithms for both TSP and CETSP, including exact algorithms (such as branch and bound method, linear programming) and heuristic algorithms (such as particle swarm optimization, greedy algorithms, etc.). The TSP requires finding the shortest path to visit each city once and return to the starting point given a list of cities and distances. CETSP is a generalization of TSP, allowing the visiting point for each target to be chosen from within a specified neighborhood, rather than exact location. It is suitable for practical applications that can tolerate errors, such as logistics distribution, intelligent transportation, and wireless sensor networks, etc. CETSP has higher flexibility and adaptability, which can significantly reduce computational resources and time consumption, particularly for large-scale problems with

收稿日期:2024-12-05.

第一作者简介:史丰源(2000—),男,汉族,硕士研究生,从事基于模型诊断的研究,E-mail:Shify23@mails.jlu.edu.cn. **通信作者简介**:欧阳丹彤(1968—),女,满族,博士,教授,博士生导师,从事人工智能和基于模型诊断的研究,E-mail:ouyd@jlu.edu.cn.

基金项目:国家自然科学基金(批准号:62076108;61872159;61672261).

greater advantages. Secondly, we introduce the potential of CETSP in practical applications, especially in logistics, industrial manufacturing, traffic planning, information and communication, offering effective solutions for improving efficiency, reducing costs, and promoting intelligent decision-making. Finally, we have identified some future research directions for CETSP.
Keywords: close enough traveling salesman problem; heuristic algorithm; path planning; model application

组合优化问题(combinatorial optimization problem，COP)[1]是在有限数目可行解的集合中找出最优解的一类优化问题，其广泛应用于物流、电信、交通、军事等领域. 虽然不同组合优化问题的应用背景不同，但绝大多数组合优化问题通过数学建模后都可以抽象为混合整数规划问题，因此，如何高效地求解组合优化问题是学术界研究的一个重要课题.

虽然这类问题的应用广泛，但在求解过程中，随着问题的规模越来越大，同时产生了巨大的时间成本，而且现有的许多方法对解决这类问题都没有很好的综合效果，因此组合优化问题是 NP-难[2]问题. 旅行商问题(traveling salesman problem，TSP)[3]是一个经典的组合优化问题. 本文以旅行商问题作为切入点，通过对该问题的简单归纳引申出 TSP 问题的变体问题足够接近的旅行商问题(close-enough traveling salesman problem，CETSP)，综合介绍足够接近的旅行商问题的启发式解决方法及其应用，并对 CETSP 模型未来的研究方向进行了展望.

1　旅行商问题的产生与发展

TSP 是一个组合优化问题，可描述为给定一系列城市和每对城市之间的距离，求解访问每座城市一次并回到起始城市的最短路径. TSP 作为一个被广泛认可的数学和运筹学问题，随着计算机科学和运筹学的发展而备受关注. TSP 问题最初来源于实际生活中的旅行商行走问题，即如何规划一条最短的路线，使旅行商能访问每座城市一次并返回出发点. 该问题在物流、配送、路线规划等领域应用广泛. 在 20 世纪 50 年代，TSP 问题首次被正式定义[4]，并且很快被证明是 NP-难问题，即没有已知的多项式时间算法可解决所有实例. 经过多年的发展，目前该问题的求解算法已有很多，主要分为找出最优解的精确算法和基于经验或直观规则构建解，不保证找到最优解，但能在合理时间内得到较好的可行解启发式算法[5].

精确算法旨在找到 TSP 的最优解. 暴力搜索法通过列举所有可能的城市排列顺序，计算每种排列的路径总长度，从而找出最短路径，适用于城市数量较少的小规模问题，但计算复杂度极高，为 $O(n!)$，其中 n 表示城市数量. 随着城市数量的增加，计算时间呈指数级增长，在这种数据量下应用精确算法变得不切实际.

动态规划法[6]将问题分解为多个子问题，利用子问题的重叠性，通过递归关系求解，在城市数量相对较少时能有效减少计算量，但空间复杂度较高，需存储大量中间结果，对大规模问题可能面临内存限制.

分支定界法基于树状搜索结构，对解空间进行系统性搜索，通过计算下界(如使用最小生成树等方法估计路径长度下限)剪枝不必要的分支，适用于中等规模问题，但对复杂问题实例，下界估计可能不够精确，导致搜索空间大、计算时间长.

线性规划与割平面法将 TSP 问题转化为线性规划问题，通过添加约束条件(割平面)逐步逼近整数最优解，对一些特殊结构的 TSP 问题或结合其他优化技术时，能有效找到最优解或高质量近似解，但割平面的生成和选择需要技巧和计算资源，大规模问题可能需要复杂算法和求解线性规划模型.

但经典 TSP 是一种基础的求最短路径规划问题，它只需考虑总路程最短这一单一条件约束，而大部分实际应用问题却不能被简单的直接归纳为 TSP 问题，例如配送无人机、无线传感器网络中的数据采集、通信网络中的信号覆盖等. 在这些场景中，销售员(如无人机或信号设备)不需要精确到达每个点，只需覆盖一个范围，因此研究 CETSP 有助于为这些问题找到更高效的解决方案. CETSP 的研究

有助于在一些受限条件(如有限的燃料、时间或资源)下规划更短的路径,减少销售员的行程时间或成本.在物流、通信、地理数据收集等领域有广泛应用.

2 足够接近的旅行商问题

作为TSP的变体,CETSP首次由Gulczynski等[7]提出,CETSP模型相比于传统TSP更贴近一些实际问题,如机器人路径规划[8]等.CETSP是TSP的一种实用推广,其目标是只要到达一个区域(邻域)而不是精确位置.约束条件中额外的自由度允许通过确定访问邻近区域的合适位置节省总的旅行成本.

2.1 问题描述

在欧氏平面上给定 n 个目标的集合 $V=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 和初始仓库 p_0,每个目标 V 有一个半径为 r 的圆盘邻域 N.目标是找到最短的Hamilton环 $S=\{p_0,p_1,\cdots,p_n,p_0\}$,Hamilton环在仓库 p_0 处开始和结束,p_i 为通过每个目标 v_i 盘邻域 N_i 中的点.定义 $d(x,y)$ 为点 x 和点 y 之间的距离,$f(S)$ 为所求的最终距离,则CETSP的定义如下:

$$\text{CETSP:}\quad \min f(S)=\sum_{i=0}^{N-1} d(p_i,p_{i+1})+d(p_N,p_0),$$
$$\text{s.t. } S=\{p_0,p_1,\cdots,p_N,p_0\},\quad p_i\in N_i,\ i=1,2,\cdots,N.$$

2.2 问题特点

在传统TSP中,推销员必须精确访问目标,而在CETSP中,允许在目标城市的邻域范围内选择一个合适位置进行访问.路径只需覆盖目标城市所在区域而不是精确坐标,因此路径优化考虑的是通过区域而不是点.TSP路径优化的目标是最短距离,而CETSP路径优化的目标是足够接近的最短距离,路径不必经过精确位置.这种优化目标相比于传统TSP更灵活,适用性更强,且能容忍一定误差,减少计算的复杂度.

标准CETSP模型是圆形的覆盖区域,但其也适应不同形状的覆盖区域,如椭圆形、多边形等,这取决于实际问题的需求.在三维空间中,覆盖区域可以是球体或其他三维形状.例如,在无人机执行任务时,其信号覆盖范围可能是一个不规则的三维空间区域,CETSP可以对这种情况进行建模.

CETSP和TSP的特殊性导致其可以获得较短的路径,在许多实际应用中更有效.图1为TSP访问和CETSP访问示意图,其中黑色三角形表示仓库,黑色节点是目标及其圆盘邻域.由图1可见,CETSP巡视明显短于TSP巡视,并且CETSP更符合实际情况.CETSP可以视为TSP的推广,如果所有圆盘邻域的半径都为0,则CETSP即简化为标准TSP.CETSP是一个NP-难问题,在计算上很难求解.

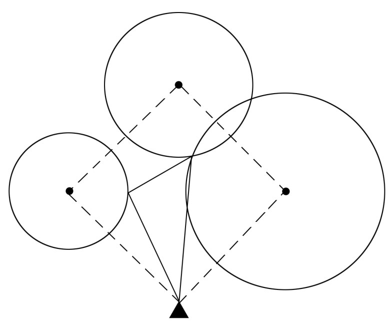

图1 TSP访问和CETSP访问示意图

Fig.1 Schematic diagrams of TSP interview and CETSP interview

2.3 应用场景

与传统的TSP适用于对路径精度要求非常高的场景不同,CETSP适用于可以容忍误差的实际问题,尤其是在路径规划时间和计算资源有限的情况下.例如在大规模物流配送中,当城市数量庞大时,完全精确的路径优化不现实,而CETSP模型可提供足够接近的路径解决方案;在无人驾驶和智能交通中,若处于动态变化的交通环境中,则可能不需要绝对最优的路径,而是一个足够好的解,能在合理的时间内快速生成.相比于TSP的求解必须遵循严格的最优标准,路径误差不可容忍,计算结果的灵活性较低,CETSP则提供了一定的灵活性,允许在一些约束条件下进行权衡,如时间、计算资源、路径长度等,允许在给定的误差范围内找到一个接近最优的解.这种容错性使CETSP在一些现实场

景下更具实用性.

3　CETSP 模型的求解算法

在 CETSP 的研究中，基于 TSP，Cariou 等[9]开发了几种启发式算法，主要采用三阶段启发式方法进行求解. Mennell[10]提出了一种三阶段 Steiner 区域启发式算法，降低了解决问题的复杂性，并使用二阶锥规划(SOCP)[11]改进路径质量. Behdani 等[12]提出了一种基于混合整数规划(MIP)[13]的精确算法，为 CETSP 提供了可行的最优解，但在处理大规模问题上性能欠佳. 之后研究者们引入了基于分支限界[14]和 SOCP 的精确算法[15]，这些方法能在有限步内达到某些最优解，但同样难以处理更大规模的问题. Carrabs 等[16]结合离散化技术和 MIP 的方法，提出了一种新型启发式算法，解决 CETSP 问题. Yang 等[17]结合粒子群优化和遗传算法提出了混合算法，相比于 MIP 方法可更有效地处理 CETSP 实例. Wang 等[18]开发了一种快速的三步启发式算法(SZVNS)，该算法利用变量邻域搜索策略. Carrabs 等[19]提出的(lb/ub)Alg 方法引入了新的离散化策略，并结合了 Carousel 贪婪算法，提高了搜索效率. Di Placido 等[20]提出了一种有效的遗传算法，表明该领域的元启发式方法仍有潜力，并获得了更多的更优解.

由于 CETSP 的解空间在问题规模扩大的过程中会呈现指数式增长，精确算法难以求解，启发式算法相比于盲目搜索则会更有效，因为启发函数经过设计修改，一般可以在较短的时间内得到一个搜索问题的最优解，对于 NP-难问题，使用启发式算法也可以在多项式时间内得到一个当前的最优解，所以目前人们更多使用启发式算法对 CETSP 进行求解. 随着问题的发展，无论是从原始的优化推销员路径问题、机器人调度问题，还是到现在的无人机协同任务分配、无线传感器网络中的数据采集、通信网络中的信号覆盖等问题中，虽然由于问题变体的多样性导致求解的侧重点不同，但都可以使用启发式算法对其进行求解. 本文主要围绕启发式算法解决 CETSP 展开综述.

3.1　基于离散化的启发式算法

离散化的启发式算法主要是指在解决优化问题时，特别是在处理连续变量需要被转化为离散变量的场景中，采用的一些基于经验和直观构造的算法. 这些方法在可接受的计算时间和空间花费下，为组合优化问题提供可行解，虽然这些解可能不是最优的，但在实际应用中通常能在合理的时间内得到较好的方案.

Carrabs 等[21]提出了周边离散化方案(PDS)和内部离散化方案(IDS)，将 CETSP 转化为广义旅行商问题(GTSP)，然后通过混合整数规划(MIP)模型求解. 之后，他们进一步改进了内部离散化方案，结合 SOCP 进一步优化解的质量.

PDS 方案其核心在于通过合理选择离散化点逼近最优解. PDS 方案将每个邻域 $N(v)$的圆周 C_v 等分为 k 份，把离散化点放置在这些圆形弧的端点. 例如，当 $k=3$ 时，$\alpha=2\Pi/k=120°$，离散化点均匀分布在圆周上. 在最差情况下，即当最优路径 T 的转向点 p_1 位于圆周上 C_v 某圆形弧 d_1,d_2 的中点时，产生最大离散化误差.

IDS 方案核心也是选择离散化点逼近最优解. IDS 方案同样将每个邻域 $N(v)$的圆周 C_v 等分为 k 份，但把离散化点放置在每个弧对应的弦 ab 的中点. 如 $k=3$ 或 $k=4$ 时，离散化点的分布位置会相应改变.

这些离散化的启发式方法通过不同的离散化策略，在降低离散化误差方面逐步改进，为计算 CETSP 的最优解上下界提供了更有效的方法，有助于在实际应用中更快、更准确地找到接近最优的旅行路线. 这种离散化方案简单易行，适用于大规模问题，并且改进后的方案能显著提高解的质量. 但离散化的粒度会影响解的质量和计算效率，需要结合其他优化技术(如 SOCP)才能获得更好的结果.

3.2　基于 Steiner-zone 的启发式算法

Behdani 等[12]首次尝试精确求解 CETSP，提出了离散化方案：两阶段 MIP、Benders 分解和迭代算法，但未找到最优解. Mennel 等[22]提出了一种启发式算法，虽然找到了接近最优的解，但运行时间

较长. Wang 等[18]在上述方法的基础上，提出了一种快速三阶段启发式算法(SZVNS)，可在较短时间为 CETSP 提供高质量解.

SZVNS 通过减少问题规模、构建初始解并优化解的方式高效解决 CETSP. 利用 Steiner 区域(Steiner-zone)[22-23]化简问题，将 CETSP 转化为标准 TSP，并通过可变邻域搜索(VNS)进一步优化，按顺序分为数据清理、构造初始解和解的优化三个阶段.

数据清理阶段的目的是减少问题规模，缩短运行时间. 由于并非所有客户都需要显式考虑，例如，如果一个客户的服务区域完全被另一个客户的服务区域覆盖，则可以将该客户从问题中移除. 通过这种修剪操作，减少需要处理的客户数量，从而降低计算复杂度.

构造初始解的过程需要用到 Steiner-zone，是指多个客户服务区域(圆盘)的重叠部分. 如果一个路径经过某个 Steiner-zone，则该区域内所有客户都被服务. Steiner-zone 的“度”定义为其包含的圆盘数量. 度越高，路径经过该区域时服务的客户越多，但区域面积通常较小，限制了选择 Steiner 点的灵活性.

在解决 Steiner-zone 的扫描问题中，Wang 等[18]开发了一种基于扫描线的算法. 这种算法通过水平扫描线逐步检查客户圆盘的重叠情况. 使用数据结构(如红黑树)快速存储和检索当前扫描线上的区间. 仅检查可能形成 Steiner 区域的子集，跳过无意义的子集. 为避免极端情况下的指数复杂度，限制 Steiner 区域的最大度数为 3.

在识别所有 Steiner 区域后，通过求解集合覆盖问题(set covering problem，SCP)，选择最少数量的 Steiner 区域覆盖所有客户. 从选定的 Steiner 区域中选择 Steiner 点，构造一条可行路径. 使用 3 种规则选择 Steiner 点，生成 3 条可行路径，并保留其中最优的一条作为初始解. 再在初始解的基础上，通过多种邻域操作进一步优化路径长度.

这种三阶段启发式算法通过数据清理和扫描线算法显著减少了问题规模，适用于不同客户的半径分布(均匀或非均匀)，能快速生成高质量的初始解，并提升解的精度. 但在计算过程中复杂度较高，尤其是在处理复杂实例时，由于对初始解的质量依赖较大，且 Steiner 区域最大度数限制为 3，可能会错过一些高质量解.

3.3 基于粒子群优化算法的方法

粒子群优化(PSO)算法[24]通常由多个简单个体(称为粒子或个体)组成，这些个体通过局部的感知和信息交换，协同工作，寻找问题的最优解. 粒子群优化算法的核心思想是个体通过局部的信息交流(如通过位置、速度等方式)协调行动，以实现全局目标的最优化.

Di Placido 等[20]提出了将 PSO 框架下的遗传算法(GA)利用种群进化的方式优化路径. GA[25]进一步改进了遗传操作(如多步交叉和变异)，并结合 K-means 聚类[26]初始化种群. GA 的核心操作包括选择、交叉和变异，并结合局部搜索和数学优化方法进一步改进解.

与大部分算法相同[27-28]，为减少问题规模，GA 同样在正式求解前需进行预处理，移除在覆盖其他目标时会被自动覆盖的目标节点. 主要包括以下两部分：如果一个目标节点的邻域完全包含在另一个目标节点的邻域中，则可以移除前者；如果一个目标节点的邻域与其他多个目标节点的邻域重叠，并且这些重叠区域已经被覆盖，则可以移除该目标节点. 通过这些预处理步骤，可显著减少问题规模，提高算法效率.

遗传算法的主要步骤包括种群初始化、适应度函数优化、选择、交叉、变异和改进[29]. 初始种群由随机生成的染色体组成，每个染色体表示一个可行解(即访问顺序). 染色体中的基因表示目标节点的访问顺序. 适应度函数用于评估每个染色体的质量，目标是最小化路径长度. 路径长度的计算考虑了目标节点的邻域覆盖特性. 使用基于适应度的选择机制(如轮盘赌选择或锦标赛选择)从种群中挑选染色体，优质解有更高的被选择概率. 采用部分匹配交叉或顺序交叉等方法生成新染色体. 交叉操作通过交换父代染色体的部分基因，产生新的解. 随机改变染色体中的基因顺序，以增加种群的多样性，避免陷入局部最优. 变异操作可能包括交换两个基因的位置或随机调整访问顺序. 每次生成或修改染色体后，调用改进操作对解进行局部优化. 最后对解进行优化，包括 2-opt 局部搜索、SOCP 和 3Alg

算法 3 种. 2-opt 局部搜索是交换两个节点顺序以优化路径顺序，减少路径长度. SOCP 是在固定访问顺序的情况下，通过数学优化调整路径中的转折点位置，进一步缩短路径. 3Alg 算法是基于贪心策略调整转折点位置，作为 SOCP 的快速替代方法. 由于 SOCP 求解耗时较长，算法仅对种群中的随机个体应用 SOCP，剩余节点使用 3Alg 算法.

这种算法由于结合了局部搜索(2-opt)与数学优化(SOCP 和 3Alg)的方法，使得遗传算法具有记忆性，即在全局搜索的同时进行局部优化，为 CETSP 提供了最优解，在理论和实际应用中效果较好，为类似问题的求解提供了重要参考.

3.4　基于贪心算法的启发式方法

在经典 TSP 的背景下，传统贪心算法是一种常用的求解近似解的方法，其基本思想是在每步选择中都采取当前状态下最优(即最有利)的选择，而不考虑整体的最优解. 贪心算法简单直观，易于实现，计算速度相对较快. 在处理小规模问题或对解的精度要求不高的情况下，能快速得到一个可行的旅行路线. 但贪心算法并不能总是得到全局最优解，它易陷入局部最优解. 由于它只考虑当前的最优选择，而未考虑后续步骤的影响，可能会错过全局最优的路径. 特别是在复杂的旅行商问题中，城市之间的距离关系复杂，贪心算法得到的解可能与最优解相差较大.

在实际应用中，传统贪心算法虽然不能保证得到最优解，但仍具有一定的实用价值. 例如，在对实时性要求较高的场景中，需要快速得到一个可行的旅行路线，贪心算法可作为一种初步的解决方案，然后在此基础上进一步优化或调整.

CG(carousel greedy)算法[19]结合离散化方案，通过贪心策略[30]快速生成可行解，并在后续阶段优化路径. CG 算法的设计理念是设计一种通用的启发式框架，能在保持贪心算法速度和简单性的同时，提升其解的质量. CG 算法在计算成本可控的情况下，扩展解空间，比传统贪心算法的准确性更高，并具有比元启发式算法(如模拟退火、禁忌搜索等)更简单的结构.

CG 算法是一种构造性启发式算法，通过引入两个参数(α 和 β)，在构造解的过程中动态调整部分解，从而探索更多可能的解，并通过多次迭代调整，CG 算法可修正传统贪心算法中早期选择的错误. 与元启发式算法不同，CG 算法只生成一个最终可行解，而不是在多个解之间迭代优化. 通过多次调整部分解，CG 算法能修正早期选择中的错误.

CG 算法的执行过程可分为 3 个阶段：首先，使用传统贪心算法生成一个初始部分解；其次，通过多次迭代调整部分解，延长解的构造过程，在每次迭代中，都移除部分解中的某些元素(由参数 β 控制)，并使用贪心算法重新选择元素，迭代次数由参数 α 控制；最后，在上个阶段的基础上，使用贪心算法完成剩余部分解的构造，生成最终的可行解.

CG 算法的时间复杂度可表示为 $T(\mathrm{CG})=(1+\alpha)O(1)$，其中 $O(1)$ 为原始贪心算法的复杂度. 由于 α 和 β 的值较小，CG 算法的运行时间通常只比传统贪心算法增加 5～10 倍，但却显著提升了解的质量. 与其他元启发式算法(如模拟退火、禁忌搜索、蚁群优化算法)相比，CG 算法的运行时间较少，尤其适合处理大规模问题. 文献[19]还将 CG 算法应用于多个经典的组合优化问题中，如最小标号生成树，最小顶点覆盖问题等.

实验结果表明，CG 算法在解的质量上优于传统贪心算法，并在某些情况下接近甚至超过元启发式算法，且 CG 算法的运行时间显著低于元启发式算法，尤其在大规模问题上表现出色. 但由于贪心策略可能导致局部最优，在复杂实例的实验上可能导致适应性较差.

3.5　基于分支界定算法的方法

分支定界算法(branch-and-bound，BB)[14]是一种用于求解组合优化问题的通用方法，其核心思想是将问题的解空间划分为多个子空间(分支)，再为每个子问题计算一个上界或下界，以估计子问题的最优解(定界). 根据这个界限判断是否继续深入搜索或剪枝. 如果子问题的界限无法比当前最优解更好(即该解不可能超过或达到当前的最优解)，则停止进一步搜索，排除不可能包含最优解的子空间，从而缩小搜索范围，可高效找到最优解.

分支界定算法是一种灵活且强大的优化算法，尤其适用于求解具有组合性质的最优化问题. 通过

合理的界定和剪枝策略，可有效减少搜索空间，提高计算效率．但其性能依赖于问题的规模和分支界定的设计，在处理大规模问题时仍会面临时间和空间复杂度过高的问题．

文献[31]对分支界定算法进行改进以解决CETSP问题．先选择一个包含仓库的3个顶点作为初始部分序列，再使用SOCP[32]解决基于初始部分序列的最优旅行路径问题，得到路径长度的下界．确定初始部分序列的旅行路径是否覆盖了所有顶点，如果所有顶点都被覆盖，则找到了一个可行解，算法终止，如果未覆盖所有顶点，则将当前路径长度作为下界，并将其加入搜索树作为根节点．

从解的搜索树中选择一个部分序列进行探索，选择一个未被覆盖的顶点作为分支顶点，并在序列的所有可能位置插入该顶点，生成新的部分序列．对每个新生成的部分序列，解决相应的SOCP问题以获得旅行路径长度．如果新序列的路径长度小于当前已知的最佳解，则更新最佳解；如果新序列的路径长度大于或等于当前最佳解，则根据算法的剪枝策略，可将该序列从搜索树中移除．在搜索中使用循环最佳优先搜索(CBFS-CV)策略选择下一个要探索的节点，CBFS-CV策略通过维护一组有序且标记的轮廓，以指导搜索过程，每个轮廓包含一组未探索的搜索树节点．由于通过假设远离插入位置的顶点覆盖状态不会改变，所以可以减少顶点覆盖检查的数量，从而减少不必要的计算．基于上一步的可行解构建一个传统的TSP问题，并使用Concorde TSP求解器找到更好的可行解，基于该可行解构造一个新的SOCP问题．整个过程中使用探针方法减少需要存储的未探索节点的数量，通过在短暂的搜索中探索子树，并在必要时将未探索的节点重新插入搜索树．持续搜索直到到达预设的时间和空间限制，得到目前的最优解．

4 CETSP应用领域

4.1 物流配送

在城市物流配送中，快递公司需要安排车辆为多个客户送货，CETSP模型可考虑将每个客户地址周围的一定区域(例如以客户地址为圆心的圆形区域)作为货物可送达的范围，而无需精确到客户门口的具体位置．这样可以在保证客户能收到货物的前提下，优化车辆的行驶路线，减少总行驶里程，降低运输成本，提高配送效率[33]．例如，对一个拥有多个小区客户的快递配送区域，车辆可以在小区门口附近(覆盖区域内)完成货物交接，而不必进入每个小区内部的具体地址．

对电商企业的仓储中心到多个零售点的货物运输，CETSP模型有助于确定最佳的配送顺序和路径，使货物能及时、高效地到达各零售点，同时减少车辆的空载里程和能源消耗．

在冷链物流网络中，涉及到易腐货物的运输，如生鲜食品、药品等．CETSP模型可用于构建具有无人机运输功能的新型预冷站，解决根据各产地日产量的运输方式选择及新型预冷站当日无人机和卡车的运输能力分配等问题．例如，在水果产地，根据果园的分布情况(视为客户点)，利用CETSP模型确定无人机和卡车的最优运输路线，将采摘的水果快速运输到预冷站，保证水果的新鲜度，同时提高冷链物流网络的运行效率，减少资源浪费．

4.2 工业制造

在电子电路设计中，需要在电路板上布置各种电子元件并连接它们的线路．CETSP模型可以确定线路的最佳布局，将电子元件视为客户点，线路需要经过元件周围的一定区域(覆盖区域)．通过优化线路路径，减少线路长度，不仅可以降低生产成本(减少材料使用)，还能减少信号传输延迟和干扰，提高电路的性能和可靠性．例如，在高密度电路板设计中，CETSP模型可以帮助工程师在有限的空间内规划出最短且干扰最小的线路连接方案．

在工厂中，有大量的生产设备需要定期巡检维护．将每台设备视为一个客户点，设备周围的可操作区域视为覆盖区域，CETSP模型可用于规划巡检人员或巡检机器人的最优巡检路径．从而确保设备得到及时检查，同时减少巡检时间和人力成本，提高生产设备的维护效率，保障生产线的正常运行．

4.3 交通规划

在城市公共交通系统中，公交车或地铁的线路规划可以借助CETSP模型．以公交站点为客户点，站点周围一定范围为覆盖区域，优化公交车辆的行驶路线，使乘客能在站点附近方便地上下车，同时

提高公交车辆的运行效率，减少乘客的候车时间和出行成本．例如，在设计新的公交线路时，考虑如何以最短的路径连接多个站点覆盖区域，满足居民的出行需求．

对于智能交通系统中的出租车调度，CETSP 模型可以帮助确定出租车在接送乘客时的最优行驶路径，提高出租车的运营效率，减少空驶里程，降低能源消耗，同时也为乘客提供更快捷的服务．

在规划智能交通基础设施(如交通传感器、摄像头等)的布局时，CETSP 模型可用于确定这些设备的最佳安装位置．将需要监测或控制的交通路段视为客户点，设备的有效监测范围作为覆盖区域，通过优化设备布局，以最少的设备数量实现对交通状况的全面监测和有效控制，提高智能交通系统的性能．

4.4　信息通讯

在无线网络建设中，基站的布局对信号覆盖和通信质量至关重要．将需要覆盖的区域划分为多个客户点及其覆盖区域，CETSP 模型可用于确定基站的最佳位置，使基站能以最少的数量实现对目标区域的有效覆盖，同时减少信号干扰，提高网络通信质量，降低建设成本．例如，在城市中规划移动通信基站的布局，确保各区域都能获得良好的信号服务．

在无线传感器网络中，传感器节点分布在监测区域内[34]，数据采集设备(如移动数据采集器或无人机)需要定期收集传感器数据．将传感器节点视为客户点，数据采集设备能与传感器通信的有效范围作为覆盖区域，CETSP 模型可以帮助规划数据采集设备的最优路径，提高数据采集效率，延长传感器网络的使用寿命，降低数据采集成本．例如，在环境监测传感器网络中，无人机按 CETSP 模型规划的路径采集各传感器节点的数据，实现对环境参数的实时监测．

随着技术的不断进步和发展，CETSP 模型的应用领域还将不断拓展，为解决各种实际优化问题提供更有效的解决方案．

5　未来研究方向

CETSP 是 TSP 的一种变体和推广，TSP 是经典的组合优化问题，而 CETSP 在 TSP 的基础上扩展了访问区域，将访问目标从精确位置扩展到一定的邻域范围，提升了解决问题的灵活性．这种拓展丰富了组合优化问题的类型，为理论研究提供了新的方向和思路．作为 NP-难问题，CETSP 的研究有助于推动 NP-难问题的研究与发展，其复杂的解空间结构和较高的求解难度，促使人们需要不断探索新的算法和理论．在算法研究中，CETSP 的求解推动了多种算法的发展和改进，但这些算法仍存在不足．

在离散化启发式算法中，PDS 和 IDS 的提出为将连续的邻域求解问题转化为离散的广义旅行商问题提供了方法，但离散化误差仍不可避免．尤其在目标点邻域较大或形状复杂的情况下，离散化点的分布可能无法完全覆盖邻域的边界，导致误差累积．由于改进离散化方案是针对圆形邻域设计，因此如果邻域形状较复杂，则离散化方案可能需要重新设计．这种算法主要关注优化路径长度，未来研究还可以考虑其他可能的优化目标，如路径平滑性等．

三段式启发式算法(如 SZVNS)结合了数据清理、初始解构建和解的优化等方法，利用 Steiner-zone 化简问题，这种多阶段的算法设计理念和对 Steiner-zone 的利用，丰富了启发式算法的设计方案．但该方案仍需进行优化，例如，由于剪枝算法的原理导致当客户半径均匀的情况下，没有客户可以被修剪，此时数据清理的效果较差．未来研究可以考虑与机器学习技术相结合，使用强化学习优化耗时较长的 VNS 搜索策略，动态调整搜索顺序或操作参数．

基于粒子群的优化算法在 CETSP 求解中通过结合局部搜索和数学优化方法，展示了如何在复杂的组合优化问题中利用种群进化和局部改进提高解的质量，推动了遗传算法等粒子群优化算法的进一步发展．在现有研究中，虽然 GA 在大多数实例上可以找到高质量的解，但在某些情况下，其计算时间明显高于其他启发式算法，如在变动重叠率实例中，GA 的计算时间长于 SZVNS，未来研究仍应在改进算法效率方面进行探索．

基于贪心算法的启发式方法(如 CG 算法)，通过引入参数动态调整部分解，拓展了解空间，为贪

心算法在复杂问题中的有效应用提供了新的范例，也启发了更多对传统简单算法进行改进以适应复杂组合优化问题的研究. 然而对于CG算法中的两个关键参数α和β，目前虽然有对其使用的推荐范围，但仍需针对具体问题进行调优，缺乏自动化，且不同问题的最佳参数组合差异较大，增加了算法的使用难度. 未来研究可以考虑引入自动化参数调优技术，以减少人工干预提高适用性. 由于CG算法的设计目标是生成单一解，因此会限制解空间的探索深度，尤其是在解空间复杂和局部最优较多的问题中，可以扩展CG的框架，生成多个可行解，如在每次迭代中记录多个部分解，并对这些部分解进行进一步优化.

目前对CETSP的研究取得了许多成果，但不同算法仍在不同方面(如计算效率、调整局部最优、种群多样性维护和实际应用普适性等)存在不足. 未来研究仍可针对这些问题进行改进，通过进一步优化不同算法的各组件和机制，提高其在不同问题实例上的性能和应用广泛性. 未来研究可以测试不同算法在不同问题规模、复杂度和多样性上的性能，以评估其鲁棒性和适应性，也可以考虑加入一些抗噪声的机制，以应对实际应用中的不确定性.

CETSP研究推动了智能化决策与自动化操作的发展，在面对大规模、复杂的任务分配和路径规划时，CETSP为相关算法和智能系统提供了有效的模型基础，使无人机、机器人等自动化设备能根据该模型更智能地规划任务路线，提高自动化作业的效率和精准度，为实现智能化的生产、配送、监测等多领域的运作奠定了基础.

参 考 文 献

[1] BLUM C，ROLI A. Metaheuristics in Combinatorial Optimization: Overview and Conceptual Comparison [J]. ACM Computing Surveys，2003，35(3)：268-308.

[2] ARORA S. Polynomial Time Approximation Schemes for Euclidean TSP and Other Geometric Problems [C]//Proceedings of 37th Conference on Foundations of Computer Science. Piscataway，NJ：IEEE，2002：2-11.

[3] KRUSKAL J B. On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1956，7(1)：48-50.

[4] LIN S，KERNIGHAN B W. An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling-Salesman Problem [J]. Operations Research，1973，21(2)：498-516.

[5] DORIGO M，GAMBARDELLA L M. Ant Colony System: A Cooperative Learning Approach to the Traveling Salesman Problem [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation，1997，1(1)：53-66.

[6] SCHOLZ J. Genetic Algorithms and the Traveling Salesman Problem a Historical Review [EB/OL]. (2019-01-17)[2024-11-20]. https://arxiv.org/abs/1901.05737.

[7] GULCZYNSKI D J，HEATH J W，PRICE C C. The Close Enough Traveling Salesman Problem: A Discussion of Several Heuristics [C]//Perspectives in Operations Research. Berlin：Springer，2006：271-283.

[8] NEDJATIA A，VIZVÁRIB B. Robot Path Planning by Traveling Salesman Problem with Circle Neighborhood: Modeling，Algorithm，and Applications [EB/OL]. (2020-03-14)[2024-11-10]. https://arxiv.org/abs/2003.06712.

[9] CARIOU C，MOIROUX-ARVIS L，PINET F，et al. Evolutionary Algorithm with Geometrical Heuristics for Solving the Close Enough Traveling Salesman Problem: Application to the Trajectory Planning of an Unmanned Aerial Vehicle [J]. Algorithms，2023，16(1)：44-1-44-16.

[10] MENNELL W K. Heuristics for Solving Three Routing Problems: Close-Enough Traveling Salesman Problem，Close-Enough Vehicle Routing Problem，and Sequence-Dependent Team Orienteering Problem [D]. Maryland：University of Maryland，2009.

[11] ALIZADEH F，GOLDFARB D. Second-Order Cone Programming [J]. Mathematical Programming，2003，95(1)：3-51.

[12] BEHDANI B，SMITH J C. An Integer-Programming-Based Approach to the Close-Enough Traveling Salesman Problem [J]. INFORMS Journal on Computing，2014，26(3)：415-432.

[13] DECKEROVÁ J，KUČEROVÁ K，FAIGL J. On Improvement Heuristic to Solutions of the Close Enough

Traveling Salesman Problem in Environments with Obstacles [C]//2023 European Conference on Mobile Robots (ECMR). Piscataway，NJ：IEEE，2023：1-6.
[14] LAWLER E L，WOOD D E. Branch-and-Bound Methods：A Survey [J]. Operations Research，1966，14(4)：699-719.
[15] HA M H，BOSTEL N，LANGEVIN A，et al. An Exact Algorithm for the Close Enough Traveling Salesman Problem with Arc Covering Constraints [C]//ICORES. [S. l.]：DBLP，2012：233-238.
[16] CARRABS F，CERRONE C，CERULLI R，et al. A Novel Discretization Scheme for the Close Enough Traveling Salesman Problem [J]. Computers & Operations Research，2017，78：163-171.
[17] YANG Z，XIAO M Q，GE Y W，et al. A Double-Loop Hybrid Algorithm for the Traveling Salesman Problem with Arbitrary Neighbourhoods [J]. European Journal of Operational Research，2018，265(1)：65-80.
[18] WANG X Y，GOLDEN B，WASIL E. A Steiner Zone Variable Neighborhood Search Heuristic for the Close-Enough Traveling Salesman Problem [J]. Computers & Operations Research，2019，101：200-219.
[19] CARRABS F，CERRONE C，CERULLI R，et al. An Adaptive Heuristic Approach to Compute Upper and Lower Bounds for the Close-Enough Traveling Salesman Problem [J]. INFORMS Journal on Computing，2020，32(4)：1030-1048.
[20] DI PLACIDO A，ARCHETTI C，CERRONE C. A Genetic Algorithm for the Close-Enough Traveling Salesman Problem with Application to Solar Panels Diagnostic Reconnaissance [J]. Computers & Operations Research，2022，145：105831-1-105831-23.
[21] CARRABS F，CERRONE C，CERULLI R，et al. Improved Upper and Lower Bounds for the Close Enough Traveling Salesman Problem [C]//Green，Pervasive，and Cloud Computing. Berlin：Springer，2017：165-177.
[22] MENNELL W，GOLDEN B，WASIL E. Asteiner-Zone Heuristic for Solving the Close-Enough Traveling Salesman Problem [C]//2th INFORMS Computing Society Conference：Operations Research，Computing，and Homeland Defense. [S. l.]：Informs，2011：1-23.
[23] SINHA ROY D，GOLDEN B，WANG X Y，et al. Estimating the Tour Length for the Close Enough Traveling Salesman Problem [J]. Algorithms，2021，14(4)：123-1-123-9.
[24] DI PLACIDO A，ARCHETTI C，CERRONE C，et al. The Generalized Close Enough Traveling Salesman Problem [J]. European Journal of Operational Research，2023，310(3)：974-991.
[25] LEI Z Y，HAO J K. An Effective Memetic Algorithm for the Close-Enough Traveling Salesman Problem [J]. Applied Soft Computing，2024，153：111266-1-111266-50.
[26] DENG Y，LIU Y，ZHOU D Y. An Improved Genetic Algorithm with Initial Population Strategy for Symmetric TSP [J]. Mathematical Problems in Engineering，2015，2015(1)：212794-1-212794-6.
[27] MOSCATO P，COTTA C. A Modern Introduction to Memetic Algorithms [C]//Handbook of Metaheuristics. Berlin：Springer，2010：141-183.
[28] NERI F，COTTA C. Memetic Algorithms and Memetic Computing Optimization：A Literature Review [J]. Swarm and Evolutionary Computation，2012，2：1-14.
[29] REN J，HAO J K，WU F，et al. An Effective Hybrid Search Algorithm for the Multiple Traveling Repairman Problem with Profits [J]. European Journal of Operational Research，2023，304(2)：381-394.
[30] CERRONE C，CERULLI R，GOLDEN B. Carousel Greedy：A Generalized Greedy Algorithm with Applications in Optimization [J]. Computers & Operations Research，2017，85：97-112.
[31] ZHANG W D，SAUPPE J J，JACOBSON S H. Results for the Close-Enough Traveling Salesman Problem with a Branch-and-Bound Algorithm [J]. Computational Optimization and Applications，2023，85(2)：369-407.
[32] COUTINHO W P，NASCIMENTO R Q，PESSOA A A，et al. A Branch-and-Bound Algorithm for the Close-Enough Traveling Salesman Problem [J]. INFORMS Journal on Computing，2016，28(4)：752-765.
[33] DECKEROVÁ J，KUČEROVÁ K，FAIGL J. On Improvement Heuristic to Solutions of the Close Enough Traveling Salesman Problem in Environments with Obstacles [C]//2023 European Conference on Mobile Robots (ECMR). Piscataway，NJ：IEEE，2023：1-6.
[34] FAIGL J. GSOA：Growing Self-organizing Array-Unsupervised Learning for the Close-Enough Traveling Salesman Problem and Other Routing Problems [J]. Neurocomputing，2018，312：120-134.

（责任编辑：韩　啸）