doi：10.13413/j.cnki.jdxblxb.2024497

具强吸收项的拟线性抛物方程解的紧支集和熄灭

李亚楠，王春朋
(吉林大学 数学学院，长春 130012)

摘要：考虑一类具强吸收项的拟线性抛物方程 Cauchy 问题，由于强吸收项的作用，该问题的解可以在有限时刻具有紧支集和发生熄灭. 首先，利用比较原理，通过构造合适的上解证明该问题的解在某个时刻后具有一致的紧支集，甚至还可以在任意正时刻后都具有一致的紧支集. 其次，在一定条件下，利用该问题的解在不同时刻的 L^1 范数估计，证明其在有限时刻发生熄灭.

关键词：拟线性抛物方程；强吸收项；紧支集；熄灭

中图分类号：O175.29 **文献标志码**：A **文章编号**：1671-5489(2025)01-0001-08

Compact Supports and Extinction of Solutions to Quasilinear Parabolic Equations with Strong Absorption Terms

LI Yanan, WANG Chunpeng
(*College of Mathematics, Jilin University, Changchun* 130012, *China*)

Abstract: We considered the Cauchy problem of a class of quasilinear parabolic equations with strong absorption terms. Due to the effect of the strong absorption term, the solution to the problem could possess compact support and extinguish at a finite time. Firstly, by using the comparison principle and constructing suitable supersolutions, it was proven that the solution possessed a uniform compact support after a certain time and even after any positive time. Secondly, under some conditions, it was proven that the solution extinguished at a finite time by using the L^1 norm estimates of the solution to the problem at different times.

Keywords: quasilinear parabolic equation; strong absorption term; compact support; extinction

0 引 言

考虑如下具强吸收项的拟线性抛物方程 Cauchy 问题非负有界解的紧支集和熄灭：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u^m + a(x)u^q = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,+\infty), \quad (1) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \quad (2) \end{cases}$$

其中 $m \geqslant 1$，$0 < q < 1$，$0 \leqslant u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$，$0 \leqslant a \in C(\mathbb{R}^N)$满足如下条件：

(H_1) $\varliminf\limits_{x \to \infty} a(x) = K_0 \in (0,+\infty]$；

收稿日期：2024-12-06.

第一作者简介：李亚楠(1999—)，女，汉族，硕士研究生，从事非线性扩散方程的研究，E-mail：yanan22@mails.jlu.edu.cn. **通信作者简介**：王春朋(1975—)，男，汉族，博士，教授，博士生导师，从事退化和混合型偏微分方程的研究，E-mail：wangcp@jlu.edu.cn.

基金项目：吉林省自然科学基金面上项目(批准号：20230101001JC).

(H_2) 存在 $\eta>\dfrac{N(m-1)}{2(1-q)}$，使得 $a^{-\eta}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$.

对于带有吸收项的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u^m+u^q=0,\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^N\times(0,+\infty),\tag{3}$$

其中 $m\geqslant1$，$q>0$. 吸收项指数 q 的临界值为 $q=m$ 和 $q=1$，即当 $q>m$，$1<q\leqslant m$ 或 $0<q<1$ 时，方程(3)的解具有不同性质. 当 $q>m$ 时，扩散项足够强，对于具有紧支集的初值，解的紧支集随 $t\to+\infty$ 扩张至全空间[1-7]；当 $m>1$ 且 $1<q\leqslant m$ 时，吸收项占主导地位且方程(3)的紧支集具有局部化性质[8-9]，即对具有紧支集的初值，存在不依赖于时间 t 的 $R>0$，使得对一切 $t>0$，都有

$$\operatorname{supp}\,u(\cdot,t)\subset\overline{B_R(0)},\tag{4}$$

其中 $B_R(0)$是$\mathbb{R}^N$ 中以原点为球心、以 R 为半径的球；而当 $0<q<1$ 时，吸收项仍占主导地位，并且吸收效应变得更强(称为强吸收)，此时方程(3)的解会出现两种不同于 $q\geqslant1$ 情况的新现象：一方面，方程的非负有界解在有限时刻熄灭[10-11]；另一方面，即使初值不具有紧支集，只要初值 $u_0\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$非负且满足 $\lim\limits_{x\to\infty}u_0(x)=0$，方程(3)的解的支集具有瞬时收缩性质[11-13]，即对任意的 $\tau>0$，都存在仅依赖于 τ 的 $R>0$，使得对一切 $t\geqslant\tau$，都有式(4)成立.

Kalashnikov[10]研究了当 $N=1$ 时方程(3)满足初值为 $0\leqslant u_0\in C(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$的 Cauchy 问题，证明了当 $0<q<m$ 且 $m\geqslant1$ 时，若 u_0 具紧支集，则问题的非负弱解 u 具有局部化性质. 文献[10]还证明了当 $0<q<1\leqslant m$ 时，问题的非负弱解 u 在有限时刻熄灭. 目前，对下列具强吸收项的拟线性抛物方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u^m+|x|^\sigma u^q=0,\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^N\times(0,+\infty)\tag{5}$$

的研究备受关注，其中 $0<q<1\leqslant m$，$\sigma>0$，并引入了临界指数

$$\sigma^*=\begin{cases}\dfrac{2(1-q)}{m-1}, & m>1,\\ +\infty, & m=1.\end{cases}$$

例如：Belaud 等[14-18]和 Kondratiev 等[19]研究了方程(5)在$\mathbb{R}^N$ 中有界区域上的齐次 Dirichlet 问题和齐次 Neumann 问题，证明了当 $0<\sigma<\sigma^*$ 时，问题的解在有限时刻熄灭. Iagar 等[20-21]研究了方程(5)满足初值 $0\leqslant u_0\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$的 Cauchy 问题，证明了当 $0<\sigma<\sigma^*$ 时，问题的非负弱解都在有限时刻熄灭；而当 $m>1$ 且 $\sigma\geqslant\sigma^*$ 时，根据初值 u_0 的不同，问题的非负弱解既有可能在有限时刻熄灭，又有可能不熄灭.

本文研究具有更一般的吸收项系数的方程(1)，其中吸收项系数 $0\leqslant a\in C(\mathbb{R}^N)$满足条件($H_1$)和条件($H_2$). 本文不要求初值 u_0 具有紧支集，而仅假设 $0\leqslant u_0\in L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. 首先，利用比较原理，通过构造合适的上解，证明当 a 满足条件(H_1)时，问题(1)-(2)的解在某个时刻后具有一致的紧支集. 特别地，如果 $K_0=+\infty$，则问题(1)-(2)的解可以在任意正时刻后都具有一致的紧支集. 其次，如果 a 满足条件(H_1)和条件(H_2)，利用解在不同时刻的 L^1 范数估计，证明问题(1)-(2)的解在有限时刻发生熄灭.

1 预备知识

首先，给出问题(1)-(2)弱解的定义.

定义 1 对于非负函数 $u\in L^1(\mathbb{R}^N\times(0,+\infty))\cap L^\infty(\mathbb{R}^N\times(0,+\infty))$，若对任意的 $T>0$，有

$$u^m\in L^2(0,T;H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)),$$

且积分等式

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\left(u(x,t)\frac{\partial\zeta}{\partial t}-\nabla u^m(x,t)\cdot\nabla\zeta(x,t)-a(x)u^q(x,t)\zeta(x,t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{\mathbb{R}^N}u_0(x)\zeta(x,0)\mathrm{d}x=0$$

对 $|x|$ 充分大和 T 处为 0 的所有函数 $\zeta\in C^1(\mathbb{R}^N\times[0,T])$ 都成立，则称 u 是问题(1)-(2)的非负弱解.

其次，给出问题(1)-(2)弱解的适定性与比较原理，其证明类似于文献[21]中的定理 1.1.

命题 1　若 $m\geqslant 1$ 且 $0<q<1$，则问题(1)-(2)存在唯一的非负弱解，满足

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leqslant\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},\qquad t\geqslant 0.$$

此外，若 u_i 分别是当 $u_0=u_{0,i}$ 时问题(1)-(2)的非负弱解，其中 $0\leqslant u_{0,i}\in L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)(i=1,2)$ 且 $u_{0,1}\leqslant u_{0,2}$ a.e. 于 $\mathbb{R}^N$，则 $u_1\leqslant u_2$ a.e. 于 $\mathbb{R}^N\times(0,+\infty)$.

2　解的紧支集

定理 1　设 $m\geqslant 1$，$0<q<1$，$0\leqslant u_0\in L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$，$a$ 满足条件(H_1). 若 u 是问题(1)-(2)的非负弱解，则存在仅依赖于 m,q,N,u_0,a 的 $T_0>0$ 和 $R_0>0$，使得

$$\operatorname{supp}u(\cdot,t)\subset\overline{B_{R_0}(0)},\qquad t\geqslant T_0.$$

证明：不妨设 $\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}>0$. 易见：当 $m>1$ 时，u 是多孔介质方程的下解；当 $m=1$ 时，u 是热方程的下解. 于是，由多孔介质方程的正则化效应[22]或热方程的标准表示公式可知：

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leqslant C_0(t-s)^{-\theta}\|u(\cdot,s)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{2\theta/N},\qquad t>s\geqslant 0,\tag{6}$$

其中 $\theta=\dfrac{N}{N(m-1)+2}$，$C_0>0$ 仅依赖于 m 和 N. 从而可不妨设

$$\frac{4m(m+q)N^2}{(m-q)^2}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{m-q}<\varliminf_{x\to\infty}a(x).\tag{7}$$

记

$$\mathscr{L}w=\frac{\partial w}{\partial t}-\Delta w^m+a(x)w^q.$$

取

$$W_R(x,t)=[Y_R(x)+Z_R(t)]^{1/m},\qquad(x,t)\in\{x:|x|\geqslant R\}\times[0,T],$$

其中

$$Y_R(x)=[\mathscr{A}(R)^{1/2}(\widetilde{R}-|x|)_+]^{2m/(m-q)},\quad |x|>R,$$
$$Z_R(t)=[\mathscr{B}(R)(T-t)]^{m/(1-q)},\qquad t\in(0,T),$$

这里 $T>0$ 和 $R>0$ 均为待定常数，而 $\widetilde{R}>R$，$\mathscr{A}(R)>0$ 和 $\mathscr{B}(R)>0$ 为仅依赖于 R 的待定常数. 对于 $z\in\mathbb{R}$，定义

$$z_+=\max\{z,0\}.$$

结合命题 1，只需找到 $R,\widetilde{R},\mathscr{A}(R)$ 和 $\mathscr{B}(R)$，使得

$$\mathscr{L}W_R\geqslant 0,\quad |x|>R,\quad t\in(0,T),\tag{8}$$
$$W_R(x,t)\geqslant\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\geqslant u(x,t),\quad |x|=R,\quad t\in(0,T),\tag{9}$$
$$W_R(x,0)\geqslant\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},\quad |x|>R.\tag{10}$$

首先，直接计算得

$$\frac{\partial W_R}{\partial t}=-\frac{\mathscr{B}(R)^{m/(1-q)}(T-t)^{(m+q-1)/(1-q)}}{(1-q)W_R^{m-1}(x,t)},$$

$$\frac{\partial W_R^m}{\partial x_i}=\frac{\partial Y_R}{\partial x_i}=-\frac{2m}{m-q}\mathscr{A}(R)^{m/(m-q)}(\widetilde{R}-|x|)_+^{(m+q)/(m-q)}\frac{x_i}{|x|},$$

$$\frac{\partial^2W_R^m}{\partial x_i^2}=\frac{2m}{m-q}\mathscr{A}(R)^{m/(m-q)}(\widetilde{R}-|x|)_+^{2q/(m-q)}\times$$
$$\left[\frac{m+q}{m-q}\cdot\frac{x_i^2}{|x|^2}-(\widetilde{R}-|x|)_+\left(\frac{1}{|x|}-\frac{x_i^2}{|x|^3}\right)\right],\quad i=1,2,\cdots,N,$$

$$\Delta W_R^m=\frac{2m}{m-q}\mathscr{A}(R)^{m/(m-q)}(\widetilde{R}-|x|)_+^{2q/(m-q)}\left[\frac{m+q}{m-q}-(N-1)\left(\frac{\widetilde{R}}{|x|}-1\right)_+\right].$$

由 $m\geqslant 1$，知

$$W_R^{m-1}(x,t) \geqslant Z_R^{(m-1)/m}(t) = [\mathscr{B}(R)(T-t)]^{(m-1)/(1-q)}, \quad |x| > R, \quad t \in (0,T),$$

从而

$$\frac{\partial W_R}{\partial t} \geqslant -\frac{\mathscr{B}(R)^{1/(1-q)}}{1-q}(T-t)^{q/(1-q)}, \quad |x| > R, \quad t \in (0,T), \tag{11}$$

进而由于 $a(x)$ 非负,并利用式(11)知,当 $|x|>R$ 且 $t\in(0,T)$ 时,有

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}W_R = {} & \frac{\partial W_R}{\partial t} - \Delta W_R^m + a(x)W_R^q \geqslant \\
& a(x)[\mathscr{A}(R)^{m/(m-q)}(\tilde{R}-|x|)_+^{2m/(m-q)} + \mathscr{B}(R)^{m/(1-q)}(T-t)^{m/(1-q)}]^{q/m} - \\
& \frac{2m}{m-q}\mathscr{A}(R)^{m/(m-q)}(\tilde{R}-|x|)_+^{2q/(m-q)}\left[\frac{m+q}{m-q} - (N-1)\left(\frac{\tilde{R}}{|x|}-1\right)_+\right] - \\
& \frac{\mathscr{B}(R)^{1/(1-q)}}{1-q}(T-t)^{q/(1-q)} \geqslant \\
& \frac{a(x)}{2}\mathscr{A}(R)^{q/(m-q)}(\tilde{R}-|x|)_+^{2q/(m-q)} + \frac{a(x)}{2}\mathscr{B}(R)^{q/(1-q)}(T-t)^{q/(1-q)} - \\
& \frac{2m}{m-q}\mathscr{A}(R)^{m/(m-q)}(\tilde{R}-|x|)_+^{2q/(m-q)}\left[\frac{m+q}{m-q} - (N-1)\left(\frac{\tilde{R}}{|x|}-1\right)_+\right] - \\
& \frac{\mathscr{B}(R)^{1/(1-q)}}{1-q}(T-t)^{q/(1-q)} = \\
& \frac{1}{2}\mathscr{A}(R)^{q/(m-q)}(\tilde{R}-|x|)_+^{2q/(m-q)} \times \\
& \left[a(x) - \frac{4m}{m-q}\mathscr{A}(R)\left(\frac{m+q}{m-q} - (N-1)\left(\frac{\tilde{R}}{|x|}-1\right)_+\right)\right] + \\
& \frac{1}{2}\mathscr{B}(R)^{q/(1-q)}(T-t)^{q/(1-q)}\left(a(x) - \frac{2}{1-q}\mathscr{B}(R)\right).
\end{aligned}$$

为使式(8)成立,只需证当 $|x|>R$ 时,恒有

$$\frac{m+q}{m-q} - (N-1)\left(\frac{\tilde{R}}{|x|}-1\right)_+ > 0, \tag{12}$$

$$\mathscr{A}(R) \leqslant \frac{a(x)}{\dfrac{4m}{m-q}\left[\dfrac{m+q}{m-q} - (N-1)\left(\dfrac{\tilde{R}}{|x|}-1\right)_+\right]}, \tag{13}$$

$$\mathscr{B}(R) \leqslant \frac{1-q}{2}a(x). \tag{14}$$

当 $N=1$ 时,式(12)恒成立. 而当 $N\geqslant 2$ 时,式(12)成立当且仅当

$$\tilde{R} < \left[\frac{m+q}{(m-q)(N-1)} + 1\right]|x|, \qquad R < |x| \leqslant \tilde{R}.$$

取

$$\tilde{R} = \begin{cases} 2R, & N=1, \\ \dfrac{NR}{N-1}, & N \geqslant 2, \end{cases} \tag{15}$$

则式(12)成立.

令

$$\alpha(r) = (1-\mathrm{e}^{-r})\inf_{|x|>r} a(x), \qquad r \geqslant 0, \tag{16}$$

由 $a(x)$ 非负且满足条件(H_1)知,存在 $r_0\geqslant 1$,使得 $\alpha(r)$ 是 $[r_0,+\infty)$ 上严格单调递增的正函数,

$$a(x) \geqslant \alpha(|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

且

$$\lim_{r\to+\infty}\alpha(r) = \varliminf_{x\to\infty} a(x).$$

于是,当 $|x|>R$ 时,有

$$\frac{a(x)}{\dfrac{4m}{m-q}\left[\dfrac{m+q}{m-q}-(N-1)\left(\dfrac{\tilde{R}}{|x|}-1\right)_+\right]}\geqslant\frac{(m-q)^2}{4m(m+q)}\alpha(R),$$

且

$$\frac{1-q}{2}a(x)\geqslant\frac{1-q}{2}\alpha(R).$$

取

$$\mathscr{A}(R)=\frac{(m-q)^2}{4m(m+q)}\alpha(R),\qquad \mathscr{B}(R)=\frac{1-q}{2}\alpha(R),\tag{17}$$

则式(13)和式(14)成立.

其次，当 $|x|>R$ 时，有

$$W_R(x,0)\geqslant Z_R^{1/m}(0)=\mathscr{B}(R)^{1/(1-q)}T^{1/(1-q)}.$$

取

$$\mathscr{B}(R)\geqslant\frac{1}{T}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{1-q},\tag{18}$$

则式(10)成立.

最后，需保证式(9)成立. 当 $N=1$ 时，有

$$W_R(x,t)\geqslant Y_R^{1/m}(x)=\mathscr{A}(R)^{1/(m-q)}R^{2/(m-q)}\geqslant\mathscr{A}(R)^{1/(m-q)},\quad |x|=R,\quad t\in(0,T);$$

而当 $N\geqslant2$ 时，

$$W_R(x,t)\geqslant Y_R^{1/m}(x)=\frac{\mathscr{A}(R)^{1/(m-q)}R^{2/(m-q)}}{(N-1)^{2/(m-q)}}\geqslant\frac{\mathscr{A}(R)^{1/(m-q)}}{N^{2/(m-q)}},\quad |x|=R,\quad t\in(0,T).$$

取

$$\mathscr{A}(R)\geqslant N^2\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{m-q}\tag{19}$$

即可.

综合式(17)～(19)，得

$$\alpha(R)\geqslant\frac{4m(m+q)N^2}{(m-q)^2}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{m-q},\qquad 且\ \alpha(R)\geqslant\frac{2}{(1-q)T}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{1-q},\tag{20}$$

再结合式(7)知，当

$$T\geqslant T_0\triangleq\frac{2(m-q)^2}{4m(m+q)(1-q)N^2\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{m-1}}$$

时，有

$$R\geqslant R_0\triangleq\alpha^{-1}\left(\max\left\{\alpha(r_0),\frac{4m(m+q)N^2}{(m-q)^2}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{m-q}\right\}\right).$$

于是由式(8)～(10)及比较原理知，当 $T\geqslant T_0$ 时，有

$$u(x,t)\leqslant W_{R_0}(x,t),\quad |x|\geqslant R_0,\quad t\in[0,T].$$

特别地，由式(15)知

$$u(x,T)\leqslant W_{R_0}(x,T)=0,\quad |x|\geqslant 2R_0,\quad T\geqslant T_0,$$

即

$$\operatorname{supp}\,u(\cdot,T)\subset\overline{B_{2R_0}(0)},\qquad T\geqslant T_0.$$

证毕.

定理 2　设 $m\geqslant1$，$0<q<1$，$0\leqslant u_0\in L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$，$a$ 满足条件(H_1)且 $K_0=+\infty$. 若 u 是问题(1)-(2)的非负弱解，则对任意的 $t>0$，$u(\cdot,t)$都具紧支集，且对任意的 $\tau>0$，都存在仅依赖于 m,q,N,u_0,a 和 τ 的 $R>0$，使得

$$\operatorname{supp}\,u(\cdot,t)\subset\overline{B_R(0)},\qquad t\geqslant\tau.$$

证明：类似于定理 1 的证明，但此时显然满足式(7)，于是由式(20)知，

$$R \geqslant R_T \triangleq \alpha^{-1}\left(\max\left\{\alpha(r_0),\ \frac{4m(m+q)N^2}{(m-q)^2}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{m-q},\frac{2}{(1-q)T}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{1-q}\right\}\right).$$

从而

$$u(x,T) \leqslant W_{R_T}(x,T)=0,\quad |x| \geqslant 2R_T,\quad T>0,$$

即

$$\operatorname{supp} u(\cdot,T) \subset \overline{B_{2R_T}(0)},\qquad T>0.$$

注意到 R_T 关于 $T\in(0,+\infty)$ 单调递减，且当 T 充分大时 R_T 是常值，所以对任意的 $t>0$，$u(\cdot,t)$ 都具紧支集，且对任意的 $\tau>0$，都存在仅依赖于 m,q,N,u_0,a 和 τ 的 $R>0$，使得

$$\operatorname{supp} u(\cdot,t) \subset \overline{B_R(0)},\qquad t \geqslant \tau.$$

证毕.

注1 定理1表明：只要 $K_0>0$（可以是 $+\infty$），问题(1)-(2)的解在某个时刻后具有一致的紧支集. 定理2表明：当 $K_0=+\infty$ 时，问题(1)-(2)的解可以在任意正时刻后都具有一致的紧支集. 此外，定理1和定理2中都不要求 a 满足条件(H_2). 特别地，a 可以在一个有界区域内为零.

3 解在有限时刻熄灭

定义2 若 $\|u(\cdot,T_e)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}=0$，但对任意的 $t\in[0,T_e)$ 都有 $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\neq 0$，则称问题(1)-(2)的解 u 在有限时刻 $T_e\in(0,+\infty)$ 熄灭，其中 T_e 称为熄灭时刻.

为证明问题(1)-(2)的非负弱解在有限时刻熄灭，需如下迭代引理.

引理1[23] 设 $\varphi(t)$ 是 $[k_0,+\infty)$ 上的非负单调不增函数. 若

$$\varphi(h) \leqslant \left(\frac{M}{h-k}\right)^\alpha[\varphi(k)]^\beta,\qquad h>k\geqslant k_0,$$

则

$$\varphi(k_0+d)=0,\quad d=2^{\beta/(\beta-1)}M[\varphi(k_0)]^{(\beta-1)/\alpha},$$

其中 $\alpha>0$，$\beta>1$，$M>0$ 均为常数.

定理3 若 $m\geqslant 1$，$0<q<1$，a 满足条件(H_1)和条件(H_2)，则对任意的 $0\leqslant u_0\in L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$，问题(1)-(2)的非负弱解 u 都在有限时刻熄灭.

证明：由定理1和定理2知，可不失一般性假设 u_0 具紧支集，并且存在 $R_0>0$，使得

$$\operatorname{supp} u(\cdot,t) \subset \overline{B_{R_0}(0)},\qquad t>0.$$

任取 $T>0$，当 $t\in(0,T)$ 时，将方程(1)两端同时在 $\mathbb{R}^N\times[t,T]$ 上积分，得

$$\begin{aligned}\int_t^T\int_{\mathbb{R}^N}a(x)u^q(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s&=\int_t^T\int_{\mathbb{R}^N}\left(\Delta u^m(x,s)-\frac{\partial u}{\partial t}(x,s)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\\&-\int_{\mathbb{R}^N}\int_t^T\frac{\partial u}{\partial t}(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x=\\&\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}-\|u(\cdot,T)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\leqslant\\&\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}\tag{21}$$

取

$$b=1-q+\frac{1}{\eta},$$

则由式(21)知，

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}&\geqslant\int_t^T\|u(\cdot,s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{-b}\left(\int_{\mathbb{R}^N}a(x)\|u(\cdot,s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{b}u^q(x,s)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s\geqslant\\&\int_t^T\|u(\cdot,s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{-b}\left(\int_{B_{R_0}(0)}a(x)u^{b+q}(x,s)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{22}$$

由 Hölder 不等式及 u 的非负性知，对任意的 $s\in(t,T)$，有

$$\|u(\cdot,s)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\leqslant\|a^{-\eta}\|_{L^1(B_{R_0}(0))}^{(b+q-1)/(b+q)}\left(\int_{B_{R_0}(0)}a(x)u^{b+q}(x,s)\mathrm{d}x\right)^{1/(b+q)},$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x) u^{b+q}(x,s)\mathrm{d}x \geqslant \|a^{-\eta}\|_{L^1(B_{R_0}(0))}^{-b-q+1} \|u(\cdot,s)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{b+q}. \tag{23}$$

再由式(6)及 $b>0$ 知，

$$\|u(\cdot,s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{-b} \geqslant C_0^{-b}(s-t)^{b\theta} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{-2b\theta/N}, \qquad s>t\geqslant 0. \tag{24}$$

于是由式(22)～(24)知，对任意的 $0\leqslant t\leqslant T$，有

$$C_1\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \geqslant \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{-2b\theta/N}\int_t^T (s-t)^{b\theta}\|u(\cdot,s)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{b+q}\mathrm{d}s,$$

即

$$\int_t^T (s-t)^{b\theta}\|u(\cdot,s)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{b+q}\mathrm{d}s \leqslant C_1\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{(N+2b\theta)/N}, \tag{25}$$

其中 $C_1>0$ 仅依赖于 m,N,q,η 和 a.

类似于式(21)，可证

$$\|u(\cdot,s)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|u(\cdot,T)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \int_s^T\int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^q\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqslant \|u(\cdot,T)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \qquad s\in(t,T),$$

再结合式(25)知，

$$C_1\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{(N+2b\theta)/N} \geqslant \|u(\cdot,T)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{b+q}\int_t^T(s-t)^{b\theta}\mathrm{d}s = \frac{1}{b\theta+1}(T-t)^{b\theta+1}\|u(\cdot,T)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{b+q}, \quad t\in(0,T),$$

即

$$\|u(\cdot,T)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_2(T-t)^{-(b\theta+1)/(b+q)}\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{(N+2b\theta)/[N(b+q)]}, \qquad t\in(0,T), \tag{26}$$

其中 $C_2>0$ 仅依赖于 m,N,q,η 和 a.

当 $m>1$ 时，由条件(H_2)知，

$$b=1-q+\frac{1}{\eta}<\frac{(1-q)[N(m-1)+2]}{N(m-1)},$$

从而

$$N+2b\theta-N(b+q)=N(1-q)-\frac{N^2(m-1)}{N(m-1)+2}b>0,$$

于是

$$\frac{N+2b\theta}{N(b+q)}>1; \tag{27}$$

而当 $m=1$ 时，$\theta=\frac{N}{2}$，从而

$$N+2b\theta-N(b+q)=N(1-q)>0,$$

即式(27)仍成立. 于是由式(26),(27)及引理 1 知，存在 $T_e\in(0,+\infty)$，使得 $\|u(\cdot,T_e)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}=0$，即问题(1)-(2)的解 u 在有限时刻熄灭. 证毕.

参 考 文 献

[1] KAMIN S, PELETIER L A. Large Time Behaviour of Solutions of the Porous Media-Equation with Absorption [J]. Israel J Math, 1986, 55(2): 129-146.

[2] KAMIN S, UGHI M. On the Behaviour as $t\to\infty$ of the Solutions of the Cauchy Problem for Certain Nonlinear Parabolic Equations [J]. J Math Anal Appl, 1987, 128(2): 456-469.

[3] KAMIN S, VÉRON L. Existence and Uniqueness of the Very Singular Solution of the Porous Media Equation with Absorption [J]. J Analyse Math, 1988, 51(1): 245-258.

[4] KAMIN S, PELETIER L A, VÁZQUEZ J L. Classification of Singular Solutions of a Nonlinear Heat Equation [J]. Duke Math J, 1989, 58(3): 601-615.

[5] KWAK M. A Porous Media Equation with Absorption. Ⅰ. Long Time Behaviour [J]. J Math Anal Appl, 1998, 223(1): 96-110.

[6] LEONI G. On Very Singular Self-similar Solutions for the Porous Media Equation with Absorption [J]. Differential Integral Equations, 1997, 10(6): 1123-1140.

[7] PELETIER L A, TERMAN D. A Very Singular Solution of the Porous Media Equation with Absorption [J]. J Differential Equations, 1986, 65(3): 396-410.

[8] CHAVES M, VÁZQUEZ J L, WALIAS M. Optimal Existence and Uniqueness in a Nonlinear Diffusion-Absorption Equation with Critical Exponents [J]. Proc Roy Soc Edinburgh: Sect A, 1997, 127(2): 217-242.

[9] MCLEOD J B, PELETIER L A, VÁZQUEZ J L. Solutions of a Nonlinear ODE Appearing in the Theory of Diffusion with Absorption [J]. Differential Integral Equations, 1991, 4(1): 1-14.

[10] KALASHNIKOV A S. The Propagation of Disturbances in Problems of Non-linear Heat Conduction with Absorption [J]. USSR Comput Math Math Phys, 1974, 14(4): 70-85.

[11] KALASHNIKOV A S. On the Dependence of Properties of Solutions of Parabolic Equations in Unbounded Domains on the Behavior of the Coefficients at Infinity [J]. Math USSR Sb, 1986, 53(2): 399-410.

[12] ABDULLAEV U G. Instantaneous Shrinking of the Support of Solutions to a Nonlinear Degenerate Parabolic Equation [J]. Mat Zametki, 1998, 63(3): 323-331.

[13] EVANS L C, KNERR B F. Instantaneous Shrinking of the Support of Nonnegative Solutions to Certain Nonlinear Parabolic Equations and Variational Inequalities [J]. Illinois J Math, 1979, 23(1): 153-166.

[14] BELAUD Y. Time-Vanishing Properties of Solutions of Some Degenerate Parabolic Equations with Strong Absorption [J]. Adv Nonlinear Stu, 2001, 1(2): 117-152.

[15] BELAUD Y, HELFFER B, VÉRON L. Long-Time Vanishing Properties of Solutions of Some Semilinear Parabolic Equations [J]. Ann Inst H Poincaré C Anal Non Linéaire, 2001, 18(1): 43-68.

[16] BELAUD Y, SHISHKOV A. Long-Time Extinction of Solutions of Some Semilinear Parabolic Equations [J]. J Differential Equations, 2007, 238(1): 64-86.

[17] BELAUD Y, DÍAZ J I. Abstract Results on the Finite Extinction Time Property: Application to a Singular Parabolic Equation [J]. J Convex Anal, 2010, 17(3/4): 827-860.

[18] BELAUD Y, SHISHKOV A. Extinction in a Finite Time for Solutions of a Class of Quasilinear Parabolic Equations [J]. Asymptot Anal, 2022, 127(1/2): 97-119.

[19] KONDRATIEV V A, VÉRON L. Asymptotic Behaviour of Solutions of Some Nonlinear Parabolic or Elliptic Equations [J]. Asymptot Anal, 1997, 14(2): 117-156.

[20] IAGAR R G, LAURENÇOT Ph. Finite Time Extinction for a Diffusion Equation with Spatially Inhomogeneous Strong Absorption [J]. Differential Integral Equations, 2023, 36(11/12): 1005-1016.

[21] IAGAR R G, LAURENÇOT Ph, SÁNCHEZ A. Self-similar Shrinking of Supports and Non-extinction for a Nonlinear Diffusion Equation with Spatially Inhomogeneous Strong Absorption [J]. Commun Contemp Math, 2024, 26(6): 2350028-1-2350028-42.

[22] VÁZQUEZ J L. Smoothing and Decay Estimates for Nonlinear Diffusion Equations. Equations of Porous Medium Type [M]. Oxford: Oxford University Press, 2006: 25.

[23] 伍卓群, 尹景学, 王春朋. 椭圆与抛物方程引论 [M]. 北京: 科学出版社, 2003: 77-78. (WU Z Q, YIN J X, WANG C P. Introduction to Elliptic and Parabolic Equations [M]. Beijing: Science Press, 2003: 77-78.)

(责任编辑: 赵立芹)