

# 一类机翼模型的动力学行为

程利芳, 刘欣, 张理涛, 陈灿  
(郑州航空工业管理学院 数学学院, 郑州 450046)

**摘要:** 研究一类修正机翼模型的平衡点和极限环的分岔行为以及平衡态的吸引域. 结果表明: 结构恢复力矩系数将影响平衡态的分岔结构, 导致两对具有相反稳定性的非平凡平衡点因同时发生 Fold 分岔而出现共存或消失现象; 当某些初始分量固定时, 吸引域呈中心对称的结构分布; 当频率比作为分岔参数时, 平凡平衡点因发生 Hopf 分岔而失去稳定性, 稳定极限环发生 Pitchfork 分岔产生 2 个稳定的极限环; 随着频率比的进一步减小, 2 个共存极限环同时发生 Neimark-Sacker 分岔, 出现 2 个稳定的二维环面.

**关键词:** Hopf 分岔; Pitchfork 分岔; 吸引域; 极限环

**中图分类号:** O415.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2026)02-0430-09

## Dynamical Behavior of a Kind of Wing Model

CHENG Lifang, LIU Xin, ZHANG Litao, CHEN Can

(School of Mathematics, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou 450046, China)

**Abstract:** We studied the bifurcation behaviors of equilibrium points and limit cycles as well as attraction domain of equilibrium state of a modified wing model. The results show that bifurcation structure of equilibrium state is affected by the coefficients of the structural restoring moment so that two pairs of nontrivial equilibrium points with opposite stability coexist or vanish due to the simultaneous occurrence of Fold bifurcations. The attraction domains exhibit a centrosymmetric structural distribution when some initial components are fixed. When the frequency ratio is used as a bifurcation parameter, the trivial equilibrium point loses stability due to Hopf bifurcation, and the stable limit cycles undergo a Pitchfork bifurcation to produce two stable limit cycles. With further reduction of the frequency ratio, two coexisting limit cycles simultaneously undergo a Neimark-Sacker bifurcation, leading to two stable two-dimensional toruses.

**Keywords:** Hopf bifurcation; Pitchfork bifurcation; attraction domain; limit cycle

机翼颤振是其结构在均匀来流中受到气动力、弹性力和惯性力的耦合作用而发生的衰减振动, 是一种严重的动不稳定现象<sup>[1]</sup>. 这些振荡可能发生在发散颤振飞行包线内, 其振幅、频率和持续时间对飞行器气动表面结构的完整性有重要影响<sup>[2]</sup>. 当结构颤振超过某个临界值时, 机翼会在极短时间内甚至几秒内发生结构破坏, 容易导致灾难性事故, 因此飞行时需避免危险颤振发生. 在飞机的设计与制造过程中, 结构非线性是不可避免的, 这种非线性的强度会显著影响系统的颤振特性<sup>[3-4]</sup>, 使系统呈现出极其复杂的动力学行为, 如极限环颤振、倍周期分岔、叉型分岔以及混沌运动等. 因此, 揭示机翼的颤振机理及振动模式对飞机机翼的设计具有重要意义.

收稿日期: 2024-12-09.

第一作者简介: 程利芳(1978—), 女, 汉族, 博士, 讲师, 从事非线性及其动力系统的研究, E-mail: lfczam@126.com.

基金项目: 河南省高等学校重点项目(批准号: 25ZX013; 24ZX008)和河南省自然科学基金(批准号: 252300420350).

通常机翼的非线性包含结构非线性和气动非线性两类: 结构的大弹性变形、控制机构的间隙和摩擦等均可导致结构非线性; 机翼的大迎角、跨声速、超声速和高超声速激波等均可导致气动非线性<sup>[5-6]</sup>.

周碧柳<sup>[7]</sup>利用 Hopf 分岔显式临界准则, 分析了机翼颤振 Hopf 分岔的存在性与稳定性; 文献[8-9]对含有结构和气动立方非线性的超音速二元机翼系统的动力学行为进行了研究, 结果表明, 通过倍周期分岔可使系统混沌; Hao 等<sup>[10]</sup>研究了受非定常气动载荷和随机扰动影响的三自由度机翼模型, 对确定系统与随机系统的机翼颤振问题进行了对比, 结果表明, 机翼系统具有二次分岔, 存在平衡点和极限环共存的双稳态现象, 其中随机干扰明显增加了机翼系统的颤振临界速度和振幅; Zhang 等<sup>[11]</sup>采用基于 Wagner 函数的空气动力学理论, 得到了时域内作用在机翼上的空气动力和力矩, 并研究了两种刚度非线性, 结果表明, 具有间隙非线性的系统其动力学行为较复杂, 通过倍周期分岔产生了混沌, 具有迟滞非线性的系统动力学行为较简单, 仅产生 Hopf 分岔; Cai 等<sup>[12]</sup>研究了不可压缩流中在俯仰和沉浮方向均具有结构二次和三次非线性项的二元机翼系统的分岔与混沌现象; 王立才<sup>[13]</sup>将矩阵的奇异值分解方法与紧缩技术相结合, 研究了立方非线性机翼亏损系统的 Hopf 动态分岔问题, 利用 Jordan 形非线性控制方程, 研究了多个亏损特征值的动态分岔、反馈控制和优化控制问题; 文献[14-16]研究了俯仰自由度方向的立方非线性结构刚度对机翼颤振边界的影响, 基于不同的系统参数、初始条件或非线性程度, 利用不同的数值积分法预测了系统的静态分岔与动态分岔. 尽管三次结构非线性备受关注, 但实验数据证明三次多项式不能完全模拟所有的结构非线性. 例如, 当多项式系数通过实验数据拟合时, 不能总忽略五阶非线性项, 为预测极限环的 Fold 分岔, 文献[17-20]引入了关于俯仰或沉浮自由度方向的五阶多项式. 此外, 讨论极限环的 Pitchfork 分岔和 Neimark-Sacker 分岔也需考虑五阶非线性项.

基于此, 本文将文献[21]中的模型进行扩展, 考虑俯仰自由度方向的五阶非线性项, 分析高阶项对系统分岔行为的影响, 给出机翼模型的运动方程及气动弹性系数, 研究平衡态的存在性及稳定性, 给出 3 个稳定平衡态的吸引域, 并分别讨论平衡态的静态分岔和原点平衡态的 Hopf 分岔以及极限环分岔.

## 1 机翼模型的运动方程

本文考虑不可压缩流中具有沉浮位移  $h$  (向下为正) 和俯仰角  $\alpha$  (抬头为正) 两自由度的二元机翼颤振系统模型, 如图 1 所示, 其中点  $A, C, E$  分别表示翼型的气动中心 (假设在  $1/4$  弦处)、重心和弹性中心 (刚心), 其控制方程<sup>[22]</sup>为

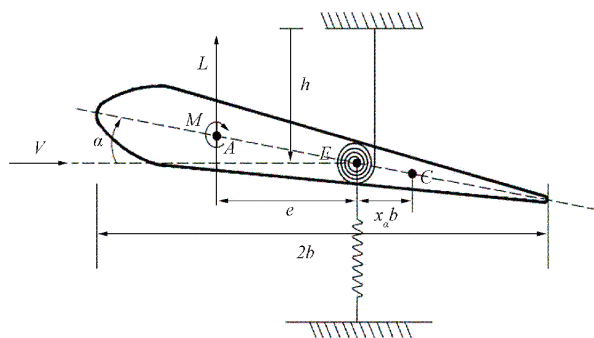


图 1 机翼剖面结构示意图

Fig. 1 Schematic diagram of wing section structure

其控制方程<sup>[22]</sup>为

$$\begin{cases} m\ddot{h} + S_a\ddot{\alpha} + D_h\dot{h} + K_h h = -L, \\ S_a\ddot{h} + I_a\ddot{\alpha} + D_a\dot{\alpha} + M(\alpha) = M_a, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $L = 2\pi\rho b V^2 \alpha$  和  $M_a = 4\pi e \rho b^2 V^2 \alpha$  分别表示绕弹性轴的气动升力和力矩<sup>[22]</sup>,  $\rho$  和  $V$  分别表示空气密度和来流速度. 机翼模型的系数及其物理意义如下:  $m$  表示机翼单位展长质量,  $e$  表示气动中心与弹性中心的距离,  $b$  表示半弦长,  $x_c$  表示弹性中心到重心的无量纲距离,  $r_a$  表示关于弹性轴的无量纲旋转半径,  $\omega_h, \omega_a$  表示沉浮与俯仰方向的结构频率,

$\zeta_h, \zeta_a$  表示沉浮与俯仰方向的黏性阻尼比,  $S_a = m x_c b$  表示质量静力矩,  $I_a = m r_a^2 b^2$  表示转动惯量,  $K_h = m \omega_h^2$  表示线性沉浮刚度系数,  $M(\alpha) = I_a \omega_a^2 (K_1 \alpha + K_3 \alpha^3 + K_5 \alpha^5)$  表示非线性俯仰弹簧恢复力矩,  $D_h = 2\zeta_h m \omega_h$  表示沉浮阻尼系数,  $D_a = 2\zeta_a I_a \omega_a$  表示俯仰阻尼系数.

## 2 平衡点的存在性与稳定性

引进无量纲时间  $\tau = \omega_a t$ , 无量纲空速  $U = \frac{V}{b\omega_a}$ , 固有频率比  $\bar{\omega} = \frac{\omega_h}{\omega_a}$ , 质量比  $\mu = \frac{m}{\rho b^2}$ , 则式(1)可表

示为

$$\begin{cases} \frac{h''}{b} + x_a \alpha'' + 2\zeta_h \bar{\omega} \frac{h'}{b} + \bar{\omega}^2 \frac{h}{b} + \frac{2U^2 \alpha}{\mu} = 0, \\ x_a \frac{h''}{b} + r_a^2 \alpha'' + 2\zeta_a r_a^2 \alpha' + \left( K_1 r_a^2 - \frac{4eU^2}{\mu} \right) \alpha + K_3 r_a^2 \alpha^3 + K_5 r_a^2 \alpha^5 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{d\tau}$ ,  $(\cdot)'' = \frac{d^2(\cdot)}{d\tau^2}$ .

令  $y_1 = \frac{h}{b}$ ,  $y_2 = \frac{h'}{b}$ ,  $y_3 = \alpha$ ,  $y_4 = \alpha'$ , 式(2)可写成

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = \frac{-r_a^2}{r_a^2 - x_a^2} \left[ \bar{\omega}^2 y_1 + 2\zeta_h \bar{\omega} y_2 - x_a \left( K_1 - \frac{4eU^2}{\mu r_a^2} - \frac{2U^2}{\mu x_a} \right) y_3 - x_a (2\zeta_a y_4 + K_3 y_3^3 + K_5 y_3^5) \right], \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = \frac{1}{r_a^2 - x_a^2} \left[ x_a \bar{\omega}^2 y_1 + 2\zeta_h x_a \bar{\omega} y_2 - U^2 \left( \frac{K_1 r_a^2}{U^2} - \frac{4e + 2x_a}{\mu} \right) y_3 - r_a^2 (2\zeta_a y_4 + K_3 y_3^3 + K_5 y_3^5) \right]. \end{cases} \quad (3)$$

易证式(3)的平衡点为

$$\begin{cases} E_0 = (0, 0, 0, 0), \\ E_{1,2} = \left( \mp \frac{U^2 \sqrt{\delta_2}}{r_a K_5 \mu^2 \bar{\omega}^2}, 0, \pm \frac{\sqrt{\delta_2}}{2\mu r_a K_5}, 0 \right), \\ E_{3,4} = \left( \mp \frac{U^2 \sqrt{\delta_3}}{r_a K_5 \mu^2 \bar{\omega}^2}, 0, \pm \frac{\sqrt{\delta_3}}{2\mu r_a K_5}, 0 \right), \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} \delta_1 = 16e\mu K_5 U^2 - 4K_1 K_5 \mu^2 r_a^2 + K_3^2 \mu^2 r_a^2, \\ \delta_2 = -2\mu r_a K_5 (\mu r_a K_3 - \sqrt{\delta_1}), \\ \delta_3 = -2\mu r_a K_5 (\mu r_a K_3 + \sqrt{\delta_1}). \end{cases}$$

对应的特征方程为

$$\begin{aligned} F(\lambda) = & \lambda^4 + \frac{2r_a^2(\bar{\omega}\zeta_h + \zeta_a)}{r_a^2 - x_a^2} \lambda^3 + \frac{\mu r_a^2(5K_5 y_3^4 + 4\bar{\omega}\zeta_h \zeta_a + 3K_3 y_3^2 + \bar{\omega}^2 + K_1) - 2U^2(x_a + 2e)}{\mu(r_a^2 - x_a^2)} \lambda^2 + \\ & \frac{2\bar{\omega}\mu r_a^2(5\zeta_h K_5 y_3^4 + 3\zeta_h K_3 y_3^2 + \bar{\omega}\zeta_a + \zeta_h K_1) - 8e\bar{\omega}\zeta_h U^2}{\mu(r_a^2 - x_a^2)} \lambda + \\ & \frac{\mu \bar{\omega}^2 r_a^2(5K_5 y_3^4 + 3K_3 y_3^2 + K_1) - 4e\bar{\omega}^2 U^2}{\mu(r_a^2 - x_a^2)} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

根据  $E_i (i=1, 2, 3, 4)$  的形式, 可得平衡点的存在性结论.

**命题 1** 假设距离参数  $e > 0$ ,

1) 若下列条件之一成立:

- ①  $K_3^2 < 4K_1 K_5 - \frac{16e\mu K_5 U^2}{\mu^2 r_a^2}$ ;
- ②  $K_1 > \frac{4eU^2}{\mu r_a^2}$ ,  $K_5 > 0$ ,  $K_3 > \sqrt{4K_1 K_5 - \frac{16eK_5 U^2}{\mu r_a^2}}$ ;
- ③  $K_1 < \frac{4eU^2}{\mu r_a^2}$ ,  $K_5 < 0$ ,  $K_3 < -\sqrt{4K_1 K_5 - \frac{16eK_5 U^2}{\mu r_a^2}}$ .

则式(3)只有一个平衡点  $E_0$ .

2) 若  $K_1 < 0$ ,  $K_5 > 0$ , 则式(3)有 3 个平衡点  $E_0, E_1$  和  $E_2$ .

3) 若  $K_1 > \frac{4eU^2}{\mu r_a^2}$ ,  $K_5 > 0$ ,  $K_3 < -\sqrt{4K_1 K_5 - \frac{16eK_5 U^2}{\mu r_a^2}}$ , 则式(3)有 5 个平衡点  $E_0, E_{1,2}$  和  $E_{3,4}$ .

4) 若  $K_1 > \frac{4eU^2}{\mu r_a^2}$ ,  $K_5 < 0$ , 则式(3)只有 3 个平衡点  $E_0, E_3$  和  $E_4$ .

5) 若  $K_1 < \frac{4eU^2}{\mu r_a^2}$ ,  $K_5 < 0$ ,  $K_3 > \sqrt{4K_1K_5 - \frac{16eK_3U^2}{\mu r_a^2}}$ , 则式(3)有 5 个平衡点  $E_0, E_{1,2}$  和  $E_{3,4}$ .

对于特征方程(4), 根据 Routh-Hurwitz 判据可得到平衡点的稳定性结论.

**命题 2** 假设平衡点  $E_0$  存在, 若满足以下条件:

- 1)  $r_a > x_a > 0$ ;
- 2)  $0 < e < \min\left\{\frac{\mu K_1 r_a^2}{4U^2}, r_a^2 \frac{[\bar{\omega}\mu\zeta_h r_a^2(4\bar{\omega}\zeta_h\zeta_a + \bar{\omega}^2 + 4\zeta_a^2) + \bar{\omega}\mu x_a^2(\bar{\omega}\zeta_a + \zeta_h K_1) - 2x_a U^2(\bar{\omega}\zeta_h + \zeta_a) + \mu K_1 \zeta_a r_a^2]}{4U^2(\bar{\omega}\zeta_h x_a^2 + \zeta_a r_a^2)}\right\}$ ;
- 3)  $0 < \zeta_h < 1$  且  $0 < \zeta_a$ ;
- 4)  $\zeta_a > \frac{U^4}{4\zeta_h \mu^2 \bar{\omega}^3 r_a^2 (1 - \zeta_h^2)}$ .

则  $E_0$  是稳定的.

证明:  $E_0$  稳定的充分必要条件是 Hurwitz 行列式  $D_i > 0 (i=0, 1, 2, 3, 4)$ . 由式(4)可得  $D_0 = 1$ ,

$$D_1 = \frac{2r_a^2(\bar{\omega}\zeta_h + \zeta_a)}{r_a^2 - x_a^2}.$$

若条件 1) 和 2) 成立, 则  $D_1 > 0, D_2 > 0$ . 计算可得

$$D_3 = \frac{4\bar{\omega}}{\mu^2(r_a^2 - x_a^2)^3} [G_1^2(\zeta_a, \zeta_h, \dots, r_a)x_a^2 + G_2(\zeta_a, \zeta_h, \dots, r_a)x_a + G_3(\zeta_a, \zeta_h, \dots, r_a)],$$

$$D_4 = \frac{\bar{\omega}^2(\mu K_1 r_a^2 - 4eU^2)}{\mu(r_a^2 - x_a^2)} D_3,$$

其中

$$G_1(\zeta_a, \zeta_h, \dots, r_a) = (\bar{\omega}\mu\zeta_a r_a^2 + \zeta_h \mu K_1 r_a^2 - 4\zeta_h e U^2) \sqrt{\bar{\omega}},$$

$$G_2(\zeta_a, \zeta_h, \dots, r_a) = -2U^2 r_a^2 (\bar{\omega}\zeta_h + \zeta_a) \frac{G_1}{\sqrt{\bar{\omega}}},$$

$$G_3(\zeta_a, \zeta_h, \dots, r_a) = \zeta_a \zeta_h r_a^2 \{ [\bar{\omega}^4 + 4\zeta_a \zeta_h \bar{\omega}^3 + (4K_1 \zeta_h^2 + 4\zeta_a^2 - 2K_1) \bar{\omega}^2 + 4K_1 \zeta_a \zeta_h \bar{\omega} + K_1^2] \mu^2 r_a^4 - 8U^2 [(2\zeta_h^2 - 1) \bar{\omega}^2 + 2\bar{\omega} \zeta_a \zeta_h + K_1] e \mu r_a^2 + 16e^2 U^4 \},$$

$$G_4(e, \zeta_a, \dots, r_a) = 16\bar{\omega} \zeta_a \zeta_h U^4 e^2 - 8\bar{\omega} \zeta_a \zeta_h \mu U^2 r_a^2 (2\bar{\omega}^2 \zeta_h^2 + 2\bar{\omega} \zeta_a \zeta_h - \bar{\omega}^2 + K_1) e + 4\bar{\omega}^3 \zeta_h \mu^2 \zeta_a^2 r_a^4 + (4\bar{\omega}^4 \zeta_h^2 \mu^2 r_a^2 + 4\bar{\omega}^2 \zeta_h^2 K_1 \mu^2 r_a^2 - U^4) r_a^2 \zeta_a^2 - \bar{\omega}^2 \zeta_h^2 U^4 r_a^2 + [\mu^2 \bar{\omega}^4 r_a^4 + (4\zeta_h^2 - 2) \mu^2 r_a^4 K_1 \bar{\omega}^2 + K_1^2 \mu^2 r_a^4 - 2U^4 r_a^2] \zeta_a \zeta_h \bar{\omega}$$

是  $\zeta_a, \zeta_h, \dots, r_a$  的函数.

显然,  $D_3 > 0$  的充分条件是判别式  $G_2^2 - 4G_1G_3 < 0$ . 进一步, 由于

$$G_2^2 - 4G_1G_3 = -4r_a^2(\bar{\omega}\mu\zeta_a r_a^2 + \zeta_h \mu K_1 r_a^2 - 4\zeta_h e U^2) G_4,$$

其中  $G_4$  是关于  $e, \zeta_a, \zeta_h, \dots, r_a$  的多项式. 由条件 2) 可知  $\bar{\omega}\mu\zeta_a r_a^2 + \zeta_h \mu K_1 r_a^2 - 4\zeta_h e U^2 > 0$ , 表明若要  $G_2^2 - 4G_1G_3 < 0$ , 则需  $G_4 > 0$ .  $G_4$  是关于  $e$  的二次多项式, 其二次系数为正. 若判别式

$$\Delta G_4 = 64\bar{\omega} \zeta_a \zeta_h U^4 r_a^2 (\bar{\omega}\zeta_h + \zeta_a)^2 (4\zeta_a \bar{\omega}^3 \zeta_h^3 \mu^2 r_a^2 - 4\zeta_h \zeta_a \bar{\omega}^3 \mu^2 r_a^2 + U^4) < 0,$$

则  $G_4 > 0$ . 由条件 3) 和 4) 可推出  $\Delta G_4 < 0$  恒成立, 因此  $G_2^2 - 4G_1G_3 < 0$  成立, 从而  $D_3 > 0$ . 显然, 当条件 2) 成立时,  $D_4 > 0$  也成立.

由于式(4)是关于  $y_3$  的偶函数, 与坐标  $y_1, y_2, y_4$  无关, 因此  $E_1$  和  $E_2$  ( $E_3$  和  $E_4$ ) 具有相同的稳定性.

**命题 3** 假设平衡点  $E_1$  和  $E_2$  存在, 若以下条件成立:

- 1)  $\zeta_h > 0$  且  $\zeta_a > 0$ ;
- 2)  $r_a > x_a > 0$ ;
- 3)  $\frac{\mu \bar{\omega}^2 (\bar{\omega} \zeta_h r_a^2 + \zeta_a x_a^2) + (4\bar{\omega} \mu \zeta_h \zeta_a r_a^2 - 2x_a U^2) (\bar{\omega} \zeta_h + \zeta_a)}{2(\bar{\omega} \zeta_h x_a^2 + \zeta_a r_a^2)} + \frac{8eU^2}{r_a^2} > \frac{K_3 \delta_2 + 8K_1 K_5^2 \mu^2 r_a^2}{4\mu K_5^2 r_a^2}$ ;

$$4) \zeta_a \bar{\omega}^3 K_5^2 \mu^4 r_a^4 (\bar{\omega} \zeta_h r_a^2 + \zeta_a x_a^2) + \zeta_h \delta_2 \sqrt{\delta_1} \left( \frac{\bar{\omega} \zeta_h x_a^2 + \zeta_a r_a^2}{4\mu^2 K_3^2 r_a^2} \delta_2 \sqrt{\delta_1} - r_a \mu \zeta_a \bar{\omega}^2 (r_a^2 - x_a^2) \right) + r_a (\bar{\omega} \zeta_h + \zeta_a) \times$$

$$(2\bar{\omega} \mu \zeta_h \zeta_a r_a^2 - U^2 x_a) (2\bar{\omega} \zeta_a K_5^2 \mu^3 r_a^3 + \zeta_h \delta_2 \sqrt{\delta_1}) > 0.$$

则平衡点  $E_1$  和  $E_2$  是稳定的.

证明: 与命题 2 证明类似, 故略.

**命题 4** 若平衡点  $E_3$  和  $E_4$  存在, 则平衡点  $E_3$  和  $E_4$  总是不稳定的.

证明: 由式(4)可得各阶 Hurwitz 行列式  $D_i (i=0, 1, 2, 3, 4)$ , 其中

$$D_1 = \frac{2r_a^2(\bar{\omega}\zeta_h + \zeta_a)}{r_a^2 - x_a^2}, \quad D_4 = \frac{\bar{\omega}^2 \sqrt{\delta_1} (\mu r_a K_3 + \sqrt{\delta_1})}{\mu^2 (r_a^2 - x_a^2) K_5} D_3.$$

若  $D_1 > 0$ , 则  $r_a^2 > x_a^2$ . 根据  $E_3$  和  $E_4$  的形式, 若它们存在, 则当  $\mu > 0$  且  $r_a > 0$  时,  $K_5 (\mu r_a K_3 + \sqrt{\delta_1}) < 0$ . 表明当  $D_3 > 0$  时,  $D_4 < 0$ . 因此平衡点  $E_3$  和  $E_4$  总是不稳定的.

为验证上述结论, 设  $K_1$  和  $K_3$  为自由变量, 其他参数列于表 1.

表 1 固定参数值

Table 1 Fixed parameter values

| $\bar{\omega}$ | $r_a$    | $\zeta_h$ | $x_a$ | $U$ | $e$ | $\zeta_a$ | $K_5$ | $\mu$ |
|----------------|----------|-----------|-------|-----|-----|-----------|-------|-------|
| 0.343 35       | 0.538 52 | 0.1       | 0.2   | 0.9 | 0.5 | 0.2       | 0.2   | 60    |

情形 1) 当  $K_1 = 0.5, K_3 = 0.1$  时, 若命题 1 中①和命题 2 中的条件成立, 则唯一平衡点  $E_0$  存在且稳定, 如图 2(A)所示.

情形 2) 当  $K_1 = -0.1, K_3 = 0.1$  时,  $\delta_1 = 96.551 97 > 0, \delta_2 = 85.236 18 > 0, \delta_3 = -168.756 03 < 0$ . 由命题 1 中 2) 和命题 3 易证  $E_0$  是不稳定的, 平衡点  $E_{1,2}$  共存且稳定, 如图 2(B)所示.

情形 3) 当  $K_1 = 0.1, K_3 = -0.1$  时, 命题 1 中条件 3) 成立. 所以存在 5 个平衡点  $E_0, E_{1,2}$  和  $E_{3,4}$ . 进一步可推出  $E_0$  和  $E_{1,2}$  稳定,  $E_{3,4}$  不稳定, 如图 2(C)所示.

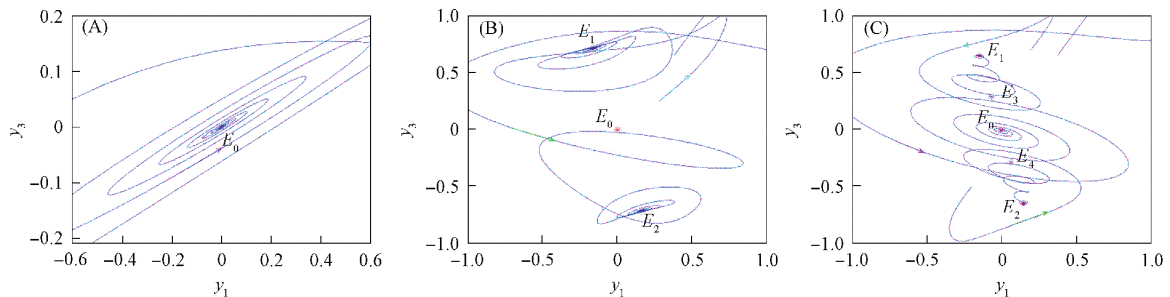


图 2 平衡点的分布及其稳定性

Fig. 2 Distribution and stability of equilibrium points

### 3 稳定平衡点的吸引域

当初值  $y_i \in [-1, 1] (i=1, 2, 3, 4)$  时, 为可视化的需要, 分以下 4 种情形讨论平衡点  $E_0, E_1$  和  $E_2$  的吸引域.

1) 当初始值  $y_1(0) = y_2(0), y_3(0) = y_4(0)$  时, 结果如图 3(A)所示, 其中黄色、红色和蓝色区域分别表示平衡点  $E_0, E_1$  和  $E_2$  的吸引域. 由图 3(A)可见, 吸引域在  $y_1 - y_3$  平面内呈中心对称分布. 表明除中心状态  $E_0$  外, 机翼模型的运动轨迹趋于偏心平衡状态  $E_1$  或  $E_2$ , 最终结果取决于初始状态的取值.

2) 当初始值  $y_1(0) = y_3(0), y_2(0) = y_4(0)$  时, 结果如图 3(B)所示. 由图 3(B)可见, 吸引域在  $y_1 - y_2$  平面内仍呈中心对称结构, 其中  $E_0$  的吸引域主要位于上方和下方, 表明当俯仰角和俯冲位移具有相同的初始点且变化率约大于 0.5 时, 机翼的摆振只能趋于中心位置  $E_0$ .

3) 当  $y_1(0) = y_4(0), y_2(0) = y_3(0)$  时, 结果如图 3(C)所示. 由图 3(C)可见, 不同平衡点的吸引

域呈片状对称结构, 其中  $E_0$  的吸引域主要位于右上方和左下方, 表明变量的较大扰动只能导致系统轨迹趋于平衡状态  $E_0$ .

4) 当初始分量  $y_2(0), y_4(0)$  固定时, 不同平衡态  $E_0, E_1$  和  $E_2$  的吸引域如图 4 所示, 其中: 图 4(A) 对应  $y_2(0) = -0.42, y_4(0) = 0.2$ ; 图 4(B) 对应  $y_2(0) = 0.42, y_4(0) = 0.2$ ; 图 4(C) 对应  $y_2(0) = -0.42, y_4(0) = -0.2$ ; 图 4(D) 对应  $y_2(0) = 0.42, y_4(0) = -0.2$ . 由图 4(A), (D) 可见, 当变量的变化方向相反时, 机翼系统的轨迹可趋于任意平衡态  $E_0, E_1$  或  $E_2$ . 由图 4(B), (C) 可见, 当变量均朝正(或负)方向变化时, 除中心状态  $E_0$  外, 机翼系统也可能稳定于较低的平衡状态  $E_2$  (或较高平衡状态  $E_1$ ).

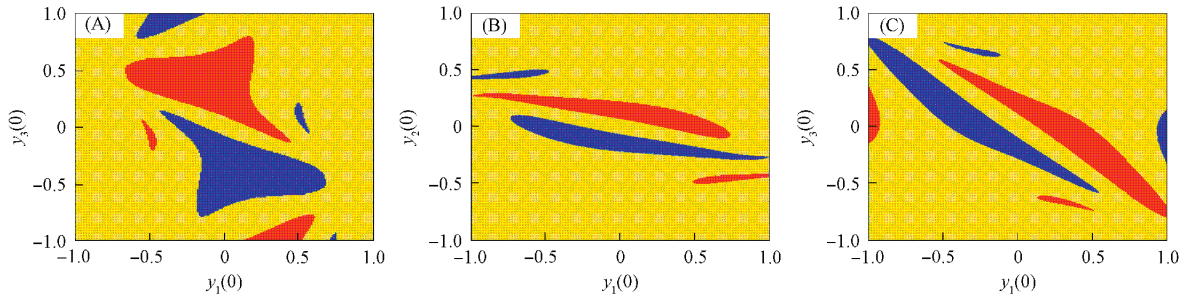


图 3 两个初值分量随另两个初值分量变化时, 平衡点  $E_0, E_1$  和  $E_2$  的吸引域

Fig. 3 Attraction domains of equilibrium points  $E_0, E_1$  and  $E_2$  when two initial value components vary with the other two initial value components

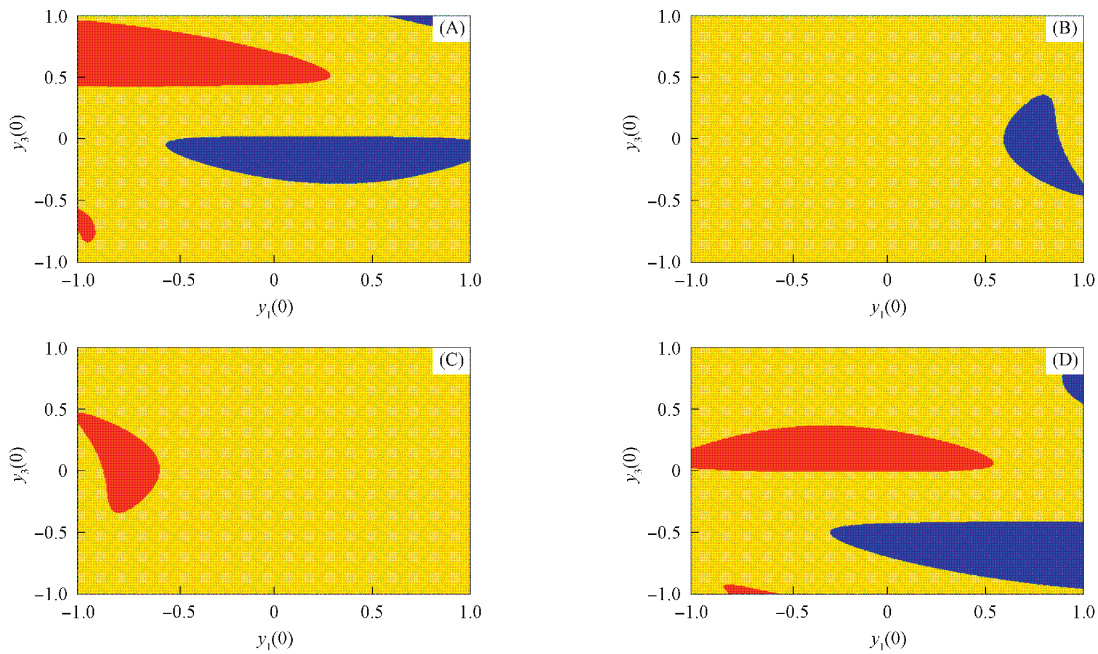


图 4 两个初值分量固定时, 平衡点  $E_0, E_1$  和  $E_2$  的吸引域

Fig. 4 Attraction domains of equilibrium points  $E_0, E_1$  and  $E_2$  for two fixed initial value components

### 4 平衡点的静态分岔

以  $K_1, K_3$  和  $K_5$  为分岔参数时, 平衡态  $E_0, E_1$  和  $E_2$  的静态分岔如图 5 所示.

当  $K_3 = -0.1$ , 其他参数见表 1, 以  $K_1$  为分岔参数时, 在  $K_1 = 0.093 1$  处,  $F(\lambda) |_{E_0} = 0$ , 表明平衡点  $E_0$  在该处发生分岔, 产生了另外的平衡点分支. 由图 5(A) 可见,  $K_1 = 0.093 1$  是一个分支点  $BP_1$ , 不稳定平衡点  $E_0$  在该处发生了亚临界的 Pitchfork 分岔并获得其稳定性, 同时 2 个不稳定的对称平衡点分支  $E_3$  和  $E_4$  分离, 分别在  $LP_1$  和  $LP_2$  处(对应于  $K_1 = 0.105 6$ ) 发生 Fold 分岔, 不稳定平衡态分支变为稳定的分支  $E_1$  和  $E_2$ . 当  $K_1 = 0.1$  时, 系统存在 2 个不稳定和 3 个稳定平衡点, 在  $LP_1$  和

LP<sub>2</sub> 处, 2 个稳定分支与不稳定分支重合.

当  $K_1=0.1$ , 其他参数见表 1, 以  $K_3$  为分岔参数时, 结果如图 5(B) 所示. 由图 5(B) 可见, 在  $K_3=-0.074 3$  处, 平衡点分支  $E_1$  和  $E_3$  以及平衡点分支  $E_2$  和  $E_4$  分别在  $LP_3$  和  $LP_4$  处重叠. 当  $K_3>-0.074 3$  时, 只存在一个稳定的平衡点分支  $E_0$ ; 当  $K_3<-0.074 3$  时, 存在 3 个稳定平衡点  $E_0, E_1$  和  $E_2$  以及 2 个不稳定平衡点  $E_3$  和  $E_4$ . 因此  $K_3$  作为分岔参数将影响非平凡平衡点的分岔结构, 导致两对非平凡平衡点同时发生 Fold 分岔, 出现相反稳定性的两对平衡点同时共存和消失的现象. 当  $K_1=0.1, K_3=-0.1$ , 其他参数见表 1, 以  $K_5$  为分岔参数时, 结果如图 5(C) 所示. 由图 5(C) 可见, 系统在  $K_5-y_1$  平面内与在  $K_3-y_1$  平面内的分岔结构基本相同.

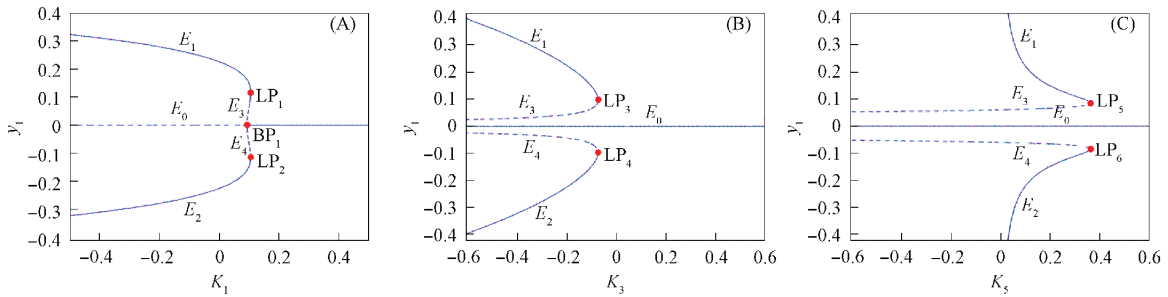


图 5 系统的分岔结构

Fig. 5 Bifurcation structure of system

对比图 5(A)~(C) 可见, 参数  $K_3$  和  $K_5$  在非平凡平衡点的分岔结构中具有相同作用, 均导致两对具有相反稳定性的平衡点出现共存和消失的现象, 参数  $K_1$  可影响所有平衡点的分岔结构.

### 5 Hopf 分岔

以  $\omega$  为分岔参数, 其他参数见表 1, 当  $K_1=0.1, K_3=-0.1$  时, 系统(3)在  $E_0$  处的特征方程为

$$F(\lambda, \omega) = \lambda^4 + (0.232\omega + 0.464)\lambda^3 + (1.16\omega^2 + 0.0928\omega - 0.0136)\lambda^2 + (0.464\omega^2 + 0.0016\omega)\lambda + 0.008\omega^2 = 0. \tag{5}$$

经计算, 在  $\omega=0.169 91$  处,  $F(\lambda, \omega)=0$  存在一对共轭纯虚特征值  $\pm 0.164 77i$ , 第一 Lyapunov 系数<sup>[23]</sup>  $l_1=-0.002 4$ . 表明系统将在该处发生一个超临界的 Hopf 分岔, 同时生成一个稳定的极限环序列, 如图 6 所示.  $\omega$  的相图如图 7 所示.

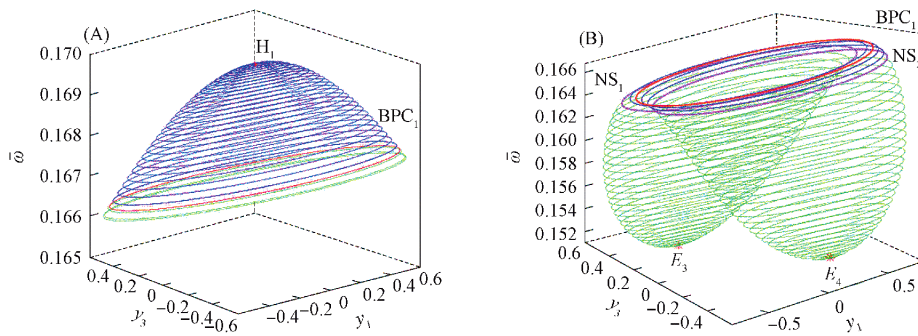


图 6 平衡点  $E_0$  的 Hopf 分岔图(A)与极限环的分岔图(B)

Fig. 6 Hopf bifurcation diagram of equilibrium point  $E_0$  (A) and bifurcation diagram of limit cycles (B)

由图 6(A) 可见, 平衡点  $E_0$  在  $H_1$  处失去稳定性, 从  $H_1$  处分岔出一系列稳定极限环,  $\omega=0.168$  的相图如图 7(A) 所示. 随着  $\omega$  的减小, 出现一个极限环的分岔点  $BPC_1$  (对应  $\omega=0.167 07$ ), 稳定极限环(蓝色)变为不稳定极限环(绿色). 由图 6(B) 可见, 随着  $\omega$  的进一步减小, 两组稳定极限环序列从  $BPC_1$  点分离, 即原来的极限环序列在  $BPC_1$  处经历了极限环的 Pitchfork 分岔,  $\omega=0.166 8$  的相图如图 7(B) 所示. 随着  $\omega$  的进一步减小, 两组极限环序列分别在  $NS_1$  和  $NS_2$  处经历了 Neimark-Sacker 分岔, 变为不稳定的极限环序列(图 6(B) 中绿色曲线), 同时出现 2 个稳定的二维环面, 如图 7(C) 所示.

当  $\bar{\omega}$  进一步减小时, 两组不稳定极限环的振幅逐渐减小, 分别收缩到平衡点  $E_3$  和  $E_4$ .

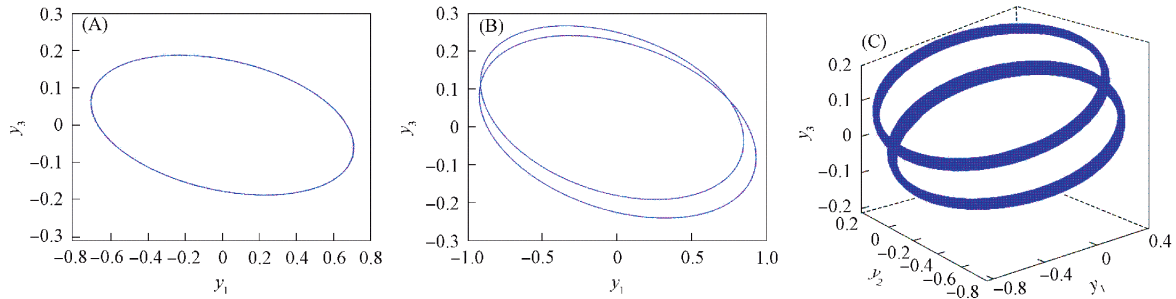


图 7  $\bar{\omega}=0.168$ (A),  $\bar{\omega}=0.1668$ (B)和  $\bar{\omega}=0.1664$ (C)的相图

Fig. 7 Phase diagrams of  $\bar{\omega}=0.168$  (A),  $\bar{\omega}=0.1668$  (B) and  $\bar{\omega}=0.1664$  (C)

综上所述, 随着  $\bar{\omega}$  的减小, 从  $H_1$  处分离出的稳定极限环, 经一系列极限环分岔变为不稳定极限环, 不稳定极限环失稳后的振幅逐渐减小, 最后终止于平衡点  $E_3$  和  $E_4$ . 若沿极限环演化的逆方向去观察, 则 2 个不稳定极限环的产生是由于平衡点  $E_3$  和  $E_4$  同时经历了次临界的 Hopf 分岔所致.

综上所述, 本文研究了一类简化机翼模型的动力学行为. 结果表明: 结构恢复力矩系数  $K_1, K_3$  和  $K_5$  对平衡点的数量有一定的影响; 参数  $K_3$  和  $K_5$  在非平凡平衡点的分岔结构中有相同作用, 参数  $K_1$  可影响所有平衡点的分岔结构. 当  $\bar{\omega}$  作为分岔参数时, 平衡点  $E_0$  失去稳定性产生了稳定的极限环序列, 稳定极限环序列失稳后产生 2 个分支的稳定极限环序列, 该序列因经历 Neimark-Sacker 分岔继续失稳变为不稳定的极限环序列. 随着  $\bar{\omega}$  的进一步减小, 不稳定极限环序列的振幅逐渐减小, 逐渐终止于不稳定平衡点  $E_3$  和  $E_4$ .

### 参 考 文 献

- [1] 李达. 压电驱动的柔性机翼颤振抑制方法研究 [D]. 上海: 上海工程技术大学, 2020. (LI D. Study on Flutter Suppression Method of Piezoelectric Actuated Flexible Wing [D]. Shanghai: Shanghai University of Engineering Science, 2020.)
- [2] LEE B H K, TRON A. Effect of Structural Nonlinearities on Flutter Characteristics of the CF-18 Aircraft [J]. Journal of Aircraft, 1989, 26(8): 781-786.
- [3] 蔡铭. 强非线性颤振分析方法研究 [D]. 广州: 中山大学, 2004. (CAI M. Methods for Studying Strongly Nonlinear Flutter [D]. Guangzhou: Zhongshan University, 2004.)
- [4] 赵德敏. 非线性颤振系统的分岔与混沌 [D]. 天津: 天津大学, 2010. (ZHAO D M. Bifurcation and Chaos of Nonlinear Flutter or Chatter System [D]. Tianjin: Tianjin University, 2010.)
- [5] MUNK D J, VIO G A, VERSTRAETE D. Response of a Three-Degree-of-Freedom Wing with Stiffness and Aerodynamic Nonlinearities at Hypersonic Speeds [J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 81(4): 1665-1688.
- [6] 钟顺. 空间飞行器中液固耦合晃动的非线性动力学研究 [D]. 天津: 天津大学, 2010. (ZHONG S. Nonlinear Dynamics Research on the Liquid-Solid Coupled Sloshing System in the Space Vehicle [D]. Tianjin: Tianjin University, 2010.)
- [7] 周碧柳. 具有结构非线性机翼的稳定性和分岔研究 [D]. 太原: 太原理工大学, 2018. (ZHOU B L. Research of Stability and Bifurcation on the Airfoil with Structural Nonlinearity [D]. Taiyuan: Taiyuan University of Technology, 2018.)
- [8] 郑国勇, 杨翔仁. 超音速流中结构非线性二元机翼的复杂响应研究 [J]. 振动与冲击, 2007, 26(12): 96-100. (ZHENG G Y, YANG Y R. Research on the Complex Responses of Structurally Nonlinear Binary Wings in Supersonic Flows [J]. Journal of Vibration and Shock, 2007, 26(12): 96-100.)
- [9] ZHENG G Y, YANG Y R. Chaotic Motions and Limit Cycle Flutter of Two Dimensional Wing in Supersonic Flow [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2008, 21(5): 441-448.
- [10] HAO Y, DU X W, MA C. Structurally Nonlinear Fluttering of a Three-Degree-Freedom Wing with Random

- Disturbances [J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2023, 23(11): 2350122-1-2350122-23.
- [11] ZHANG X Y, KHEIRI M, XIE W F. Nonlinear Dynamics and Gust Response of a Two-Dimensional Wing [J]. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2020, 123: 103478-1-103478-21.
- [12] CAI M, LIU W F, LIU J K. Bifurcation and Chaos of Airfoil with Multiple Strong Nonlinearities [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, 34(5): 627-636.
- [13] 王立才. 非线性机翼 Hopf 分叉控制理论 [D]. 长春: 吉林大学, 2020. (WANG L C. Control Theory of Nonlinear Airfoil Hopf Bifurcation [D]. Changchun: Jilin University, 2020.)
- [14] IRANI S, SARRAFZADEH H, AMOOZGAR M R. Bifurcation in a 3-DOF Airfoil with Cubic Structural Nonlinearity [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2011, 24(3): 265-278.
- [15] GHOMMEM M, ABDELKEFI A, NUHAIT A O, et al. Aeroelastic Analysis and Nonlinear Dynamics of an Elastically Mounted Wing [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, 331(26): 5774-5787.
- [16] 刘海英. 具有立方非线性机翼极限环颤振的研究 [D]. 天津: 天津大学, 2004. (LIU H Y. The Study of Limit Cycle Flutter for Airfoil with Cubic Stiffness [D]. Tianjin: Tianjin University, 2004.)
- [17] YAMASAKI H, EPUREANU B I. Forecasting Supercritical and Subcritical Hopf Bifurcations in Aeroelastic Systems [J]. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2017, 94: 400-405.
- [18] 李书群. 几类非线性模型的动力学分析 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2023. (LI S Q. Dynamic Analysis of Several Kinds of Nonlinear Models [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2023.)
- [19] LI S Q, ZHOU L Q. Stability and Bifurcation Analysis for an Airfoil Model with a High-Order Nonlinear Spring [J]. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 60(2): 185-197.
- [20] MARTINI D, GIACOMO I, ALBERTOI T. Detection of Subcritical Hopf and Fold Bifurcations in an Aeroelastic System via the Describing Function Method [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2022, 157: 111892-1-111892-13.
- [21] HE S, GUO S J, LI W H, et al. Nonlinear Aeroelastic Behavior of an Airfoil with Free-Play in Transonic Flow [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 138: 106539-1-106539-69.
- [22] DOWELL E H. *A Modern Course in Aeroelasticity* [M]. Fifth Revised and Enlarged Edition. Berlin: Springer Science & Business Media, 2015: 81-85.
- [23] KUZNETSOV Y A. *Elements of Applied Bifurcation Theory* [M]. 3rd ed. Berlin: Springer Science & Business Media, 2004: 91-104.

(责任编辑: 王 健)